

## МЕХАНИКА

## MECHANICS

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/88/5

**О некоторых особенностях спектра продольных колебаний  
и звукоизлучения стержня****Артур Александрович Азаров<sup>1</sup>, Александр Леонидович Попов<sup>2</sup>,  
Дмитрий Анатольевич Челюбеев<sup>3</sup>**<sup>1, 2</sup> *Московский государственный строительный университет, Москва, Россия*<sup>2, 3</sup> *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*<sup>1</sup> *azaartale@mail.ru*<sup>2</sup> *popov@ipmnet.ru*<sup>3</sup> *da--ch@yandex.ru*

**Аннотация.** Работа посвящена согласованию теоретических моделей удара и послесударных продольных колебаний стержня с экспериментальными данными. Получено решение задачи о продольных колебаниях стержня со свободными концами при наличии трения, коэффициент которого определяется по совокупности много-частотных затухающих колебаний стержня после ударного воздействия. Определены и проанализированы амплитудно-частотные зависимости перемещений и скоростей концов стержня, их связь с акустическим давлением, излучаемым торцами при разных соотношениях между массой ударника и стержня. Продемонстрирован эффект сдвига амплитудного максимума акустического давления с частоты основного тона на обертона, зависящий от параметров, определяющих период осцилляции, и отношения масс ударника и стержня.

**Ключевые слова:** продольный удар, контактная сила, акустическое давление

**Для цитирования:** Азаров А.А., Попов А.Л., Челюбеев Д.А. О некоторых особенностях спектра продольных колебаний и звукоизлучения стержня // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 88. С. 53–65. doi: 10.17223/19988621/88/5

Original article

**On some features of the spectrum of longitudinal vibrations  
and sound emission of a rod****Artur A. Azarov<sup>1</sup>, Aleksandr L. Popov<sup>2</sup>, Dmitriy A. Chelyubeev<sup>3</sup>**<sup>1, 2</sup> *Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russian Federation*<sup>2, 3</sup> *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,  
Moscow, Russian Federation*

<sup>1</sup> azaartale@mail.ru

<sup>2</sup> popov@ipmnet.ru

<sup>3</sup> da--ch@yandex.ru

**Abstract.** This study is devoted to the correlation of theoretical models of the impact and post-impact longitudinal vibrations of a rod with the corresponding experimental data. A solution to the problem of longitudinal vibrations of a cylindrical rod is obtained using the Saint-Venant wave model with free ends in the presence of friction. The friction coefficient is determined by a set of multi-frequency damped vibrations of the rod after impact. The amplitude-frequency dependences of the displacements and velocities of the rod ends for free post-shock vibrations are determined and analyzed together with their relationship with the acoustic pressure emitted by the ends at different ratios between the masses of the striker and rod. The shift of the amplitude maximum of acoustic pressure from the frequency of the fundamental tone to the overtone is shown to depend on the parameters determining the oscillation period and the mass ratio of the striker and rod. This is inconsistent with the longitudinal vibration spectrum of the rod, whose maximum corresponds to the frequency of the fundamental tone at any mass ratio of the striking pair. The obtained data are experimentally validated.

**Keywords:** longitudinal impact, contact force, acoustic pressure

**For citation:** Azarov, A.A., Popov, A.L., Chelyubeev, D.A. (2024) On some features of the spectrum of longitudinal vibrations and sound emission of a rod. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 88. pp. 53–65. doi: 10.17223/19988621/88/5

## Введение

Изучение продольных колебаний стержня имеет обширную теоретическую базу. Достаточно упомянуть классические монографии Рэля [1], Лява [2] и Тимошенко [3]. Наиболее распространенной и простой моделью их описания является волновое уравнение. При его использовании предполагается, что поперечные размеры стержня малы по сравнению с его длиной. Это позволяет при определении продольных смещений стержня пренебречь влиянием поперечных деформаций, сопровождающих деформации расширения-сжатия в процессе продольных колебаний. Задача соударения тел также имеет богатую историю и большое практическое значение. Основы теории удара по стержням заложили Сен-Венан [4], Герц [5], Сирс [6]. Модель продольного удара Сен-Венана предполагает волновое распространение возмущений и отсутствие местных деформаций, что может быть обеспечено для идеально плоских торцов соударяемых тел. Модель удара Герца учитывает местную контактную деформацию соударяемых сферических тел, но не учитывает волновое движение. Модель Сирса объединяет оба подхода, учитывая местную деформацию и деформацию расширения-сжатия в продольной волне. Такая объединенная модель хорошо согласуется с экспериментами [7–9]. Современные направления работ, посвященных продольному удару, определяют время соударения, форму ударного импульса [10], различные эффекты, сопутствующие продольным колебаниям: поперечные колебания, возникающие в условиях параметрического резонанса [11], возможность потери устойчивости прямой формы стержня [12], а также возможности диагностики дефектов в стержне [13–14]. Большое количество современных работ посвящено рассеянию стержнями звуковых волн [15–17].

В настоящей работе рассмотрены удар и послеударные колебания стержня со свободными концами. Для получения спектров колебаний торцов с ограниченными амплитудами в математическую модель колебаний введено внутреннее трение, коэффициент затухания при котором определяется по совокупности многочастотных затухающих колебаний стержня после ударного воздействия. Подобное введение трения в модель Сен-Венана представлено в монографии [8], однако при анализе спектров послеударных колебаний стержня ранее не использовалось, что видно из цитированных работ [8–14]. Введение внешнего трения в модель Сен-Венана представлено в [18]. В части определения ударного импульса также используется волновая теория Сен-Венана, что позволяет получить явное аналитическое решение. Данное допущение оправдано условием свободного выходного конца, малым отношением массы ударника к массе стержня и малой скоростью столкновения соударяющихся тел, что подтверждается экспериментально. В экспериментальной части обнаружены некоторые особенности спектра звукоизлучения стержня, зависящие от соотношения масс ударника и стержня, что показано и в теоретической модели. Авторы также видят актуальность в продвижении подхода оперативности снятия информации о колебаниях стержневых элементов конструкций в сочетании с минимальным вмешательством в процесс колебаний, что обеспечивается бесконтактностью регистрации колебаний и применением современных быстродействующих спектроанализирующих устройств.

### Продольный удар телом по стержню со свободными концами

Рассматривается продольный удар по упругому стержню  $1$  длиной  $l$ , массы  $M$  с двумя свободными концами (рис. 1). По правому концу в начальный момент времени ударяет со скоростью  $v_0$  шарик или молоток  $2$  массой  $m$ , в результате чего возникает контактное взаимодействие. Ударник, как и в большинстве других работ, считается абсолютно твердым телом.

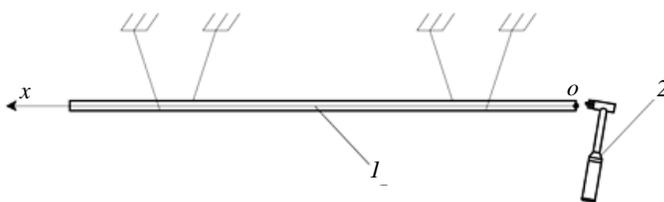


Рис. 1. Удар телом по стержню

Fig. 1. Longitudinal impact of a body on a rod

Колебания стержня по модели Сен-Венана с учетом диссипативных сил описываются одномерным волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\gamma \frac{\partial u}{\partial t}, \quad c^2 = \frac{E}{\rho} \quad (1)$$

где  $u(x, t)$  – функция продольного перемещения точек стержня,  $c$  – скорость звука,  $\rho$  – плотность стержня,  $E$  – модуль упругости,  $\gamma$  – коэффициент, учитывающий трение.

Граничные и начальные условия для функции перемещения запишем в виде:

$$ES \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = -P(t); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0; \quad u_{t=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad (2)$$

где  $P(t)$  – контактная сила на конце стержня,  $S$  – площадь поперечного сечения,  $l$  – длина стержня.

Решение краевой задачи (1), (2) представим в виде ряда по собственным формам колебаний стержня со свободными концами:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l},$$

$$T_n^{(2)}(t) + 2\gamma T_n^{(1)}(t) + \lambda_n^2 c^2 T_n(t) = \frac{2P(t)}{\rho S l}, \quad T_n(0) = 0, \quad \left. \frac{\partial T_n}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad (3)$$

$$T_n = \frac{2}{\rho S l} \int_0^t P(t_1) e^{-\gamma(t-t_1)} \frac{\sin \omega_n(t-t_1)}{\omega_n} dt_1, \quad \omega_n = \frac{\pi n c}{l}.$$

Для определения ударной силы запишем условие контакта [7, 11]:

$$v_0 t - \frac{1}{m} \int_0^t P(t_1)(t-t_1) dt_1 - \alpha = \int_0^t P(t_1) Y(t-t_1) dt_1, \quad (4)$$

где  $v_0$  – скорость ударника в момент удара по стержню,  $m$  – масса ударника,  $\alpha$  – упругая деформация в зоне контакта,  $Y$  – реакция системы на единичный импульс [19]:

$$Y(t-t_1) = \frac{(t-t_1)}{\rho S l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\rho S l \omega_n} \sin \omega_n(t-t_1).$$

В реакции на импульс первый член соответствует свободному перемещению системы как абсолютно твердого тела. Данная поправка позволяет получить решение интегрального уравнения (4) относительно  $P(t)$  в элементарных функциях; эффектом затухания ввиду незначительной продолжительности взаимодействия и для упрощения аналитического решения пренебрегаем.

При определении ударной силы без учета местного смятия ввиду малого отношения масс  $m/M$  и свободного края выходного конца стержня условие контакта (4) примет вид:

$$v_0 t - \frac{1}{m} \int_0^t P(t_1)(t-t_1) dt_1 - \frac{1}{\rho S l} \int_0^t P(t_1) \left( (t-t_1) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_n(t-t_1)}{\omega_n} \right) dt_1 = 0. \quad (5)$$

Отметим, что ряд в этом выражении сводится к табличному виду 5.4.2.9 [20]. Тогда выражение (5) упростится:

$$v_0 t - \frac{1}{m} \int_0^t P(t_1)(t-t_1) dt_1 - \frac{1}{\rho S c} \int_0^t P(t_1) dt_1 = 0. \quad (6)$$

Дифференцируя дважды каждый интеграл (6) по параметру  $t$ , приходим к дифференциальному уравнению относительно функции  $P(t)$ :

$$\frac{1}{m} P(t) + \frac{1}{\rho S c} \frac{dP(t)}{dt} = 0.$$

Решение этого уравнения представляется в виде:

$$P(t) = c\rho S v_0 e^{-\frac{Mct}{m l}}, \quad M = \rho S l. \quad (7)$$

Видно, что в этом решении учитывается только затухающая часть контактного импульса.

Для получения контактной силы с учетом местного смятия запишем условие контакта [7, 11], в котором местное смятие связано с контактной силой по формуле Герца:

$$v_0 t - \frac{1}{m} \int_0^t P(t_1)(t-t_1) dt_1 - \left( \frac{P(t)}{k} \right)^{\frac{2}{3}} = \int_0^t P(t_1) Y(t-t_1) dt_1, \quad k = \frac{2E\sqrt{R}}{3(1-\nu^2)},$$

где  $R$  – радиус кривизны ударника в точке контакта,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

В таком виде интегральное уравнение допускает только численное решение [11]. В отличие от (7), здесь уже присутствует не только затухающая, но и возрастающая часть ударного импульса.

Возвращаясь к решению краевой задачи (3) с учетом найденного выражения для ударной силы (7), получим, что функция перемещения имеет вид:

$$u(x, t) = \int_0^t P(t_1) Y(t-t_1) dt_1 = \frac{2c v_0}{l} \int_0^t e^{-\frac{Mct_1}{m l}} e^{-\gamma(t-t_1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_n(t-t_1)}{\omega_n} \cos \lambda_n x dt_1$$

Фурье-спектр перемещения  $u(x, t)$ , являющегося сверткой двух функций  $P(t)$  и  $Y(t)$ , с учетом  $u(x, t) = 0$  при  $t < 0$  является Лапласовым изображением:

$$U(x, \omega) = \int_0^{+\infty} u(x, t) e^{-i\omega t} dt = \frac{2c v_0}{l} \int_0^{+\infty} e^{-i\omega t} \int_0^t e^{-\frac{Mct_1}{m l}} e^{-\gamma(t-t_1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_n(t-t_1)}{\omega_n} \cos \lambda_n x dt_1 dt.$$

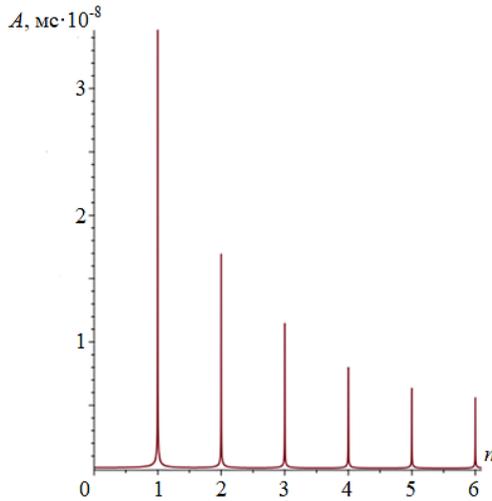
Согласно теореме свертки двух оригиналов [21], Фурье-спектр перемещений входного и выходного концов имеет вид произведения изображений; таким образом, с учетом преобразований, амплитуда принимает вид:

$$A(\omega) = \frac{2c v_0}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\left( (\omega - \omega_n)^2 + \gamma^2 \right) \left( (\omega + \omega_n)^2 + \gamma^2 \right) \left( \omega^2 + \frac{M^2 c^2}{m^2 l^2} \right)}}. \quad (8)$$

На рис. 2 показан фрагмент спектра послепударных колебаний для шести первых собственных частот продольных колебаний стержня при ударе шариком. Параметры соударяющихся пар приводятся в экспериментальной части.

Видно, что общей тенденцией является снижение амплитуд спектра с ростом номера частоты.

В экспериментальной части работы измеряются не перемещения торцов стержня, а акустическое давление, регистрируемое микрофоном, расположенным у торца стержня. Поэтому при согласовании теоретических и экспериментальных результатов необходимо перейти к определению акустического давления в окрестности торца стержня.



**Рис. 2.** Изменение амплитуд спектра послешоковых колебаний в зависимости от номера собственной частоты  
**Fig. 2.** Variation in amplitudes of the spectrum of post-shock oscillations depending on the natural frequency number

Для определения акустического давления плоского круглого торца стержня, пульсирующего в обе стороны с амплитудами, зависящими от частот, используется потенциал скоростей, который записывается в виде [22]:

$$\varphi(\omega) = \frac{|V(\omega)|}{2\pi} \iint_S \frac{e^{-i\frac{\omega}{c_1}r}}{r} dS, \quad (9)$$

где  $c_1$  – скорость звука в акустическом пространстве,  $r$  – расстояние от элемента излучающей поверхности  $dS$  до точки измерения,  $|V(\omega)|$  – амплитуда скорости излучающей поверхности.

Для направления вдоль оси стержня интеграл (9) приобретает явный вид. В этом случае амплитуда акустического давления на расстоянии  $l_0$  в зависимости от частоты с учетом связи с потенциалом скоростей  $p = i\omega\rho f$  представляется выражением [22]

$$|p(\omega)| = |V(\omega)| \left| \int_0^{r_0} i\omega\rho_1 \frac{e^{-i\frac{\omega}{c_1}\sqrt{l_0^2+r^2}}}{\sqrt{l_0^2+r^2}} r dr \right| = \rho_1 c_1 |V(\omega)| |f(\omega)|, \quad (10)$$

$$|f(\omega)| = 2 \left| \sin \left( \frac{\omega l_0 - \omega \sqrt{l_0^2 + r_0^2}}{2c_1} \right) \right|,$$

где  $l_0$  – расстояние до приемника,  $r_0$  – радиус стержня,  $\rho_1$  – плотность акустической среды.

Формула (10) справедлива тогда, когда плоскость торца поршня продолжается экраном, на котором считается равным нулю потенциал скорости вне поршня. Однако Л.Я. Гутиным показано, что звуковое поле и импеданс осциллирующей

поршневой диафрагмы и пульсирующей поршневой диафрагмы, излучающих без экрана, для направления вдоль оси стержня малоразличимы от случая с экраном [22].

Для определения амплитудно-частотной зависимости скорости из выражения перемещения  $u(x, t)$  в форме интеграла Дюамеля найдем функцию скорости  $v(x, t)$

$$v(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2v_0 mc \left( -Mc\omega_n e^{-\frac{M}{m}c t} + \left( (-Mc\gamma + lm(\gamma^2 + \omega_n^2)) \sin \omega_n t + Mc\omega_n \cos \omega_n t \right) e^{-\gamma t} \right)}{\omega_n \left( M^2 c^2 - 2Mc\gamma lm + l^2 m^2 (\gamma^2 + \omega_n^2) \right)} \cos \lambda_n x.$$

Фурье-спектр скорости  $v(x, t)$  входного торца стержня при  $x = 0$  с учетом  $v(t) = 0$  при  $t < 0$  является Лапласовым изображением:

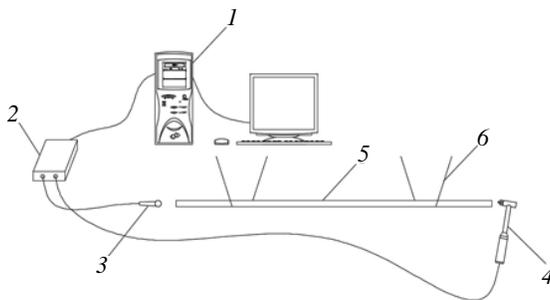
$$V(\omega) = \int_0^{+\infty} v(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{2\omega c v_0 l}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega^2 + \gamma^2 + 2\gamma\omega i) \left( \omega i + \frac{Mc}{ml} \right)}.$$

Отсюда видно, что амплитуда  $|V(\omega)|$  этого выражения получается умножением (8) на частоту  $\omega$ .

В результате определены амплитудно-частотная зависимость скорости  $|V(\omega)|$  и осциллирующая функция  $|f(\omega)|$ , что позволяет определить акустическое давление вдоль оси колеблющегося стержня на заданном расстоянии от торца стержня.

### Экспериментальное изучение спектра продольных колебаний стержня

Измерения проводились на установке, схематически показанной на рис. 3. Колебания цилиндрического стержня (5), подвешенного на двух нитях (6), возбуждались ударом по торцу стержня. Для этого использовался либо стальной шарик с массой, много меньшей массы стержня, либо ударный молоток AU02 (4) с массой 330 г, соединенный с двухканальным спектроанализатором A19-U2 (2).



**Рис. 3.** Схема экспериментальной установки для ударного возбуждения и регистрации продольных колебаний стержня

**Fig. 3.** Design of the experimental setup for shock excitation and registration of longitudinal vibrations of the rod

Регистрация колебаний осуществлялась с помощью лабораторного микрофона (3), установленного вблизи противоположного (выходного) торца стержня.

Сигнал от микрофона передавался на анализатор спектра А19-У2 и далее на компьютер (1), где обрабатывался с помощью программного комплекса ZETLab. Частота дискретизации данного анализатора спектра составляет 250 кГц. Исходя из теоремы Котельникова–Шеннона, верхней границей различаемого диапазона частот будет 125 кГц. В результате микрофонной записи и работы анализатора спектра производилась одновременная запись амплитудно-временных и амплитудно-частотных зависимостей колебаний торцов стержня.

В качестве образца использовался цилиндрический стержень из алюминиевого сплава длиной  $l = 1$  м, диаметром  $d = 20$  мм. На рис. 4 показана микрофонная запись многочастотного сигнала звукоизлучения стержня продолжительностью 0.1 с после ударного воздействия в момент времени  $t = 0$ .

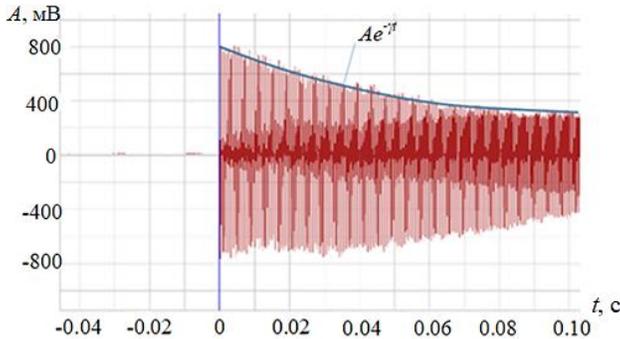


Рис. 4. Амплитудно-временная зависимость затухающих колебаний с экспоненциальной огибающей

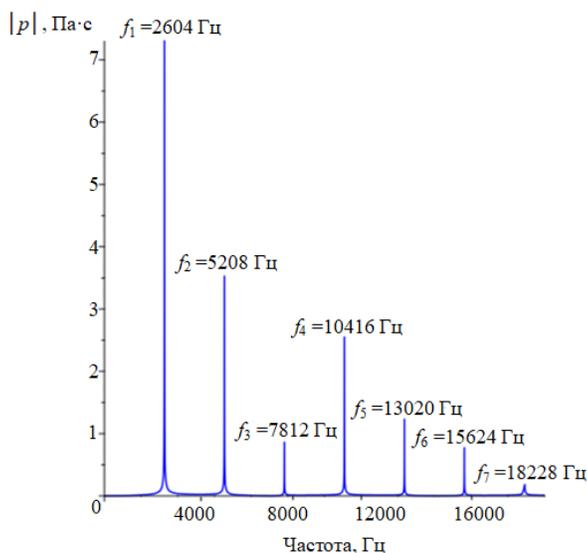
Fig. 4. Amplitude–time dependence of damped oscillations with exponential envelope

Среднее значение коэффициента  $\gamma$ , характеризующего скорость затухания колебаний во времени, определялось по огибающей экспериментальной амплитудно-временной зависимости (см. рис. 4) из условия:

$$\gamma = \frac{1}{k\Delta t} \ln \frac{A(t_0)}{A(t_0 + k\Delta t)} = \frac{1}{260 \cdot 0.000384} \ln \frac{800}{250} \cong 12c^{-1},$$

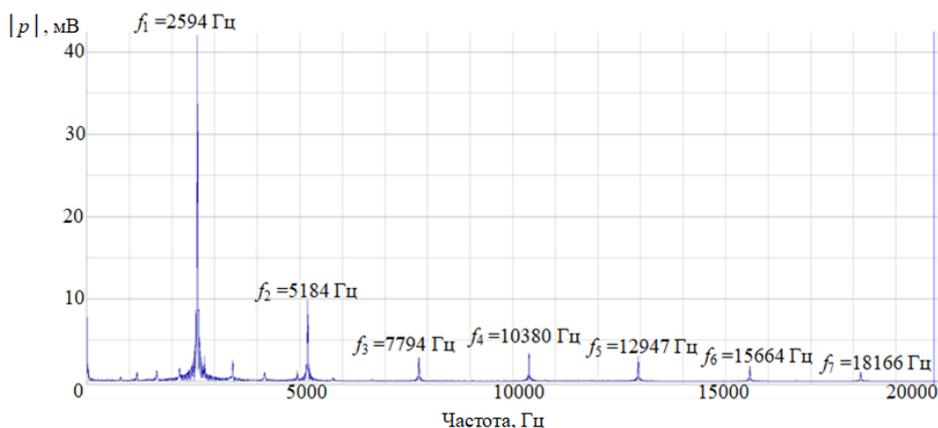
где  $t_0 + k\Delta t$  – продолжительность записи колебаний, равная 0.1 с,  $A(t)$  – амплитуда колебаний торца стержня в момент времени  $t$ . Начальная амплитуда  $A(t_0)$  соответствует моменту времени 0.00042 с, амплитуда окончания записи  $A(t_0 + k\Delta t)$  соответствует 0.1 с,  $k = 260$  – число периодов на интервале записи,  $\Delta t = 0.000384$  с – продолжительность периода колебаний.

Проведены серии экспериментов, в которых при разных соотношениях между массами ударника и стержня возбуждались колебания стержня и регистрировалось акустическое давление, излучаемое торцами на заданном расстоянии в условиях, где акустическое сопротивление среды соответствовало сопротивлению воздуха при температуре 20°C. На рис. 5–8 приведены расчетные и экспериментальные спектры акустического давления вблизи выходного конца стержня при максимальном и минимальном соотношениях масс соударяющейся пары  $m/M = 0.41$  и 0.014. Амплитуды экспериментальных спектров акустического давления по осям ординат отложены в единицах электрического сигнала, поступающего с микрофона (мВ).



**Рис. 5.** Теоретический спектр акустического давления в диапазоне частот 0–20 000 Гц при отношении масс  $m/M = 0.41$

**Fig. 5.** Theoretical acoustic pressure spectrum in the frequency range 0–20000 Hz with a mass ratio  $m/M = 0.41$



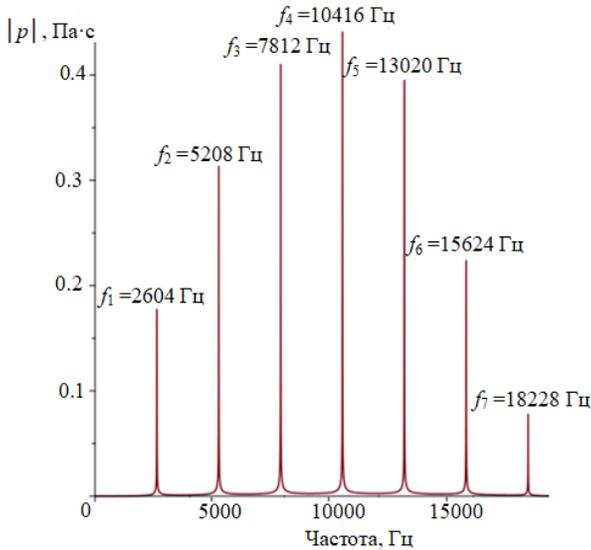
**Рис. 6.** Экспериментальный спектр акустического давления в диапазоне частот 0–20 000 Гц при отношении масс  $m/M = 0.41$

**Fig. 6.** Experimental acoustic pressure spectrum in the frequency range 0–20000 Hz with a mass ratio  $m/M = 0.41$

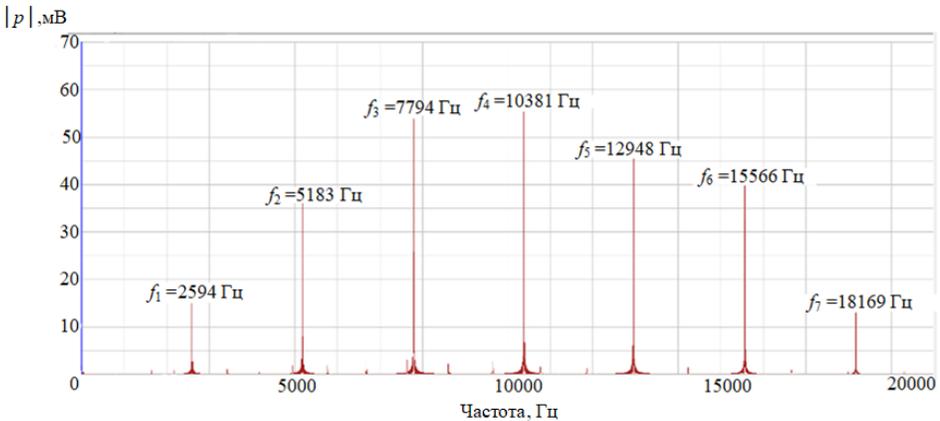
При расчете использовалась функция  $f(\omega)$  с периодом, определенным из эксперимента. В этом случае характер изменения амплитуд спектра частот теоретической модели совпадает с экспериментальными данными.

Приведенные данные показывают хорошее согласование результатов, полученных по теоретической модели, с экспериментальными результатами. По полученным АЧЗ видно, что при наибольшем отношении массы ударника к массе

стержня амплитудный максимум акустического давления выходного конца (см. рис. 6), регистрируемый микрофоном, соответствует частоте основного тона.



**Рис. 7.** Теоретический спектр акустического давления в диапазоне частот 0–20 000 Гц при отношении масс  $m/M = 0.014$   
**Fig. 7.** Theoretical acoustic pressure spectrum in the frequency range 0–20000 Hz with a mass ratio  $m/M = 0.014$



**Рис. 8.** Экспериментальный спектр акустического давления в диапазоне частот 0–20 000 Гц при отношении масс  $m/M = 0.014$   
**Fig. 8.** Experimental acoustic pressure spectrum in the frequency range 0–20000 Hz with a mass ratio  $m/M = 0.014$

При уменьшении  $m/M$  амплитудный максимум акустического давления выходного конца сдвигается по частоте и в данном случае соответствует 4-му обертому (см. рис. 7, 8). Данное различие объясняется тем, что при ударе по стержню молотком амплитуды скорости выходного конца на разных частотах отличаются

друг от друга значительнее осциллирующего эффекта функции  $f(\omega)$ ; таким образом, максимум акустического давления соответствует частоте основного тона. При стремлении отношения масс к нулю спектр меняется и диктующим максимумом оказывается осциллирующий эффект.

### **Заключение**

В работе решалась задача продольного удара и последующих колебаний цилиндрического стержня по волновой модели Сен-Венана. Получена амплитудно-временная зависимость ударной нагрузки. В части определения амплитуд продольных колебаний вблизи резонансных частот рассматривалась линейная постановка задачи. При таком подходе совместно с полученной амплитудно-временной зависимостью ударной нагрузки определены амплитудно-частотные зависимости для свободных послеударных колебаний. Определен спектр акустического давления по оси колебаний стержня, создаваемый послеударными колебаниями стержня. Продемонстрирован эффект сдвига амплитудного максимума акустического давления по частоте. Показано, что величина этого сдвига зависит от параметров, определяющих период осцилляции и отношения масс ударника и стержня, в отличие от спектра продольных колебаний на выходном торце стержня, максимум которого соответствует частоте основного тона при любом отношении масс соударяющейся пары. Проведена экспериментальная верификация полученных результатов.

### **Список источников**

1. Стрэтт Дж.В. (*Лорд Рэлей*). Теория звука. М. : ГИТТЛ, 1955. Т. 1. 504 с.
2. Ляв А. Математическая теория упругости. Л. : ОНТИ, 1935. 674 с.
3. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М. : Наука, 1967. 444 с.
4. Saint-Venant A. Sur le choc longitudinal de deux barres 'elastiques // J. de Math. (Liouville). Ser. 2. 1867. V. 12. P. 237–376.
5. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper // Za. f. Math. (Crelle). 1881. Bd. 92. P. 156–171.
6. Sears J.E. On the longitudinal impact of metal rods with rounded ends // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1908. V. 14. P. 49–106.
7. Бидерман В.Л. Теория удара. - М. : Машгиз, 1952. 76 с.
8. Гольдсмит В. Удар. Теория и динамические свойства соударяемых тел. М. : Стройиздат, 1965. 448 с.
9. Al-Mousawi M.M. On experimental studies of longitudinal and flexural wave propagations: An annotated bibliography // Applied Mechanics Reviews. 1986. V. 39. P. 853–864.
10. Hu B., Schiehlen W., Eberhard P. Comparison of Analytical and Experimental Results for Longitudinal Impacts on Elastic Rods // Journal of Vibration and Control. 2003. V. 9. P. 157–174. doi: 10.1177/107754603030745
11. Морозов Н.Ф., Беляев А.К., Товстик П.Е. Колебания стержня, вызванные продольным ударом тела // Доклады Академии наук. 2018. Т. 480, № 2. С. 164–169. doi: 10.7868/S0869565218140074
12. Беляев А.К., Товстик П.Е., Товстик Т.П. Тонкий стержень при продольном динамическом сжатии // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2017. № 4. С. 19–34.
13. Акулenco Л.Д., Нестеров С.В. Влияние дефекта массы на частоты и формы продольных колебаний стержня // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2014. № 1. С. 135–144.

14. Shifrin E.I., Popov A.L., Lebedev I.M., Chelyubeev D.A., Kozintsev V.M. Numerical and experimental verification of a method of identification of localized damages in a rod by natural frequencies of longitudinal vibration // *Acta Mechanica*. 2021. V. 232, is. 5. P. 1797–1808. doi: 10.1007/s00707-020-02919-w
15. Скобельцын С.А., Пешков Н.Ю. Рассеяние звука неоднородным упругим эллиптическим цилиндром в акустическом полупространстве // *Известия Тульского государственного университета. Технические науки*. 2018. № 7. С. 183–200.
16. Tolokonnikov L.A., Larin N.V. Scattering by a cylinder with an inhomogeneous coating of sound waves emitted by a linear source in a plane waveguide // *Math. Models Comput. Simul.* 2022. V. 14, is. 2. P. 250–260. doi: 10.1134/S2070048222020156
17. Пешков Н.Ю., Скобельцын С.А. Рассеяние звука упругим цилиндром с кусочно-непрерывным неоднородным покрытием // *Известия Тульского государственного университета. Технические науки*. 2020. № 10. С. 214–226.
18. Стойчев В.Б., Можаяев И.В. Прогнозирование параметров процесса погружения свай-труб пневматическими ударными машинами // *Известия вузов. Строительство*. 2004. № 3. С. 81–85.
19. Зегжда С.А. Соударение упругих тел. СПб. : Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1997. 316 с.
20. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М. : Наука, 1981. Т. 1: Элементарные функции. 623 с.
21. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. М. : Физматлит, 1985. Т. 2. 560 с.
22. Ржевкин С.Н. Курс лекций по теории звука. М. : МГУ, 1960. 336 с.

#### References

1. Strutt J.V. (Lord Rayleigh) (1926) *The Theory of Sound*. London: Macmillan and Company.
2. Love A. (1927) *Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge: Cambridge University Press.
3. Timoshenko S.P. (1955) *Vibration Problems in Engineering*. Toronto – New York – London: Van Nostrand Company.
4. Saint-Venant A. (1867) Sur le choc longitudinal de deux barres 'elastiques. *Journal de Mathématiques pures et appliquées de Liouville*. Ser.2.12. pp. 237–376.
5. Hertz H. (1881) Über die Berührung fester elastischer Körper. *Journal für die reine und angewandte. Mathematik*. 92. pp. 156–171.
6. Sears J.E. (1908) On the longitudinal impact of metal rods with rounded ends. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 14. pp. 49–106.
7. Biderman V.L. (1952) *Teoriya udara* [Theory of impact]. Moscow: Mashgiz.
8. Goldsmith W. (1960) *Impact: The Theory and Physical Behaviour of Colliding Solids*. London: Arnold.
9. Al-Mousawi M.M. (1986) On experimental studies of longitudinal and flexural wave propagations: An annotated bibliography. *Applied Mechanics Reviews*. 39. pp. 853–864. doi: 10.1115/1.3149516
10. Hu B., Schiehlen W., Eberhard P. (2003) Comparison of analytical and experimental results for longitudinal impacts on elastic rods. *Journal of Vibration and Control*. 9. pp. 157–174. doi: 10.1177/107754603030745
11. Morozov N.F., Belyaev A.K., Tovstik P.E. (2018) Kolebaniya sterzhnya, vyzvannye prodol'nym udarom tela [Rod vibrations caused by axial impact]. *Doklady akademii nauk – Doklady Physics*. 480(2). pp. 164–169. doi: 10.7868/S0869565218140074
12. Belyaev A.K., Tovstik T.P., Tovstik P.E. (2017) Thin rod under longitudinal dynamic compression. *Mechanics of Solids*. 52(4). pp. 364–377. doi: 10.3103/S0025654417040021
13. Akulenko L.D., Nesterov S.V. (2014) Mass defect influence on the longitudinal vibration frequencies and mode shapes of a beam. *Mechanics of Solids*. 49(1). pp. 104–111. doi: 10.3103/S0025654414010129
14. Shifrin E.I., Popov A.L., Lebedev I.M., Chelyubeev D.A., Kozintsev V.M. (2021) Numerical and experimental verification of a method of identification of localized damages in a rod by

- natural frequencies of longitudinal vibration. *Acta Mechanica*. 232(5). pp. 1797–1808. doi: 10.1007/s00707-020-02919-w
15. Skobel'tsyn S.A., Peshkov N.Yu. (2018) Rasseyanie zvuka neodnorodnym uprugim ellipticheskim tsilindrom v akusticheskom poluprostranstve [Scattering of sound by an inhomogeneous elastic elliptic cylinder in an acoustic half-space]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki – Izvestiya Tula State University. Technical Sciences*. 7. pp. 183–200.
  16. Tolokonnikov L.A., Larin N.V. (2022) Scattering by a cylinder with an inhomogeneous coating of sound waves emitted by a linear source in a plane waveguide. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 14(2). pp. 250–260. doi: 10.1134/S2070048222020156
  17. Peshkov N.Yu., Skobel'tsyn S.A. (2020) Rasseyanie zvuka uprugim tsilindrom s kusochno-neprevrynym neodnorodnym pokrytiem [Sound scattering by an elastic cylinder with a piecewise inhomogeneous coating]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki – Izvestiya Tula State University. Technical Sciences*. 10. pp. 214–226.
  18. Stoychev V.B., Mozhaev I.V. (2004) Prognozirovaniye parametrov protsessa pogruzheniya svay-trub pnevmaticheskimi udarnymi mashinami [Prediction of parameters of the pile-tube driving by pneumatic impact machines]. *Izvestiya vuzov stroitel'stvo – News of Higher Educational Institutions. Construction*. 3. pp. 81–85.
  19. Zegzhda S. A. (1997) *Soudarenie uprugikh tel* [Collision of elastic bodies]. Saint Petersburg: Saint Petersburg University Press.
  20. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. (1986) *Integrals and Series. Elementary Functions*. Volume 1. New York: Gordon and Breach.
  21. Piskunov N. (1987) *Differential and Integral Calculus*. Volume 2. Moscow: Mir.
  22. Rschevkin S.N. (1963) *A Course of Lectures on the Theory of Sound*. Oxford: Pergamon Press.

#### **Сведения об авторах:**

**Азаров Артур Александрович** – аспирант кафедры сопротивления материалов Московского государственного строительного университета, Москва, Россия. E-mail: azaartale@mail.ru

**Попов Александр Леонидович** – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории механики прочности и разрушения материалов и конструкций института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН; профессор кафедры сопротивления материалов Московского государственного строительного университета, Москва, Россия. E-mail: popov@ipmnet.ru

**Челюбеев Дмитрий Анатольевич** – ведущий инженер лаборатории механики прочности и разрушения материалов и конструкций института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия. E-mail: da--ch@yandex.ru

#### **Information about the authors:**

**Azarov Artur A.** (Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russian Federation). E-mail: azaartale@mail.ru

**Popov Aleksandr L.** (Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences; Professor, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russian Federation). E-mail: popov@ipmnet.ru

**Chelyubeev Dmitriy A.** (Leading Engineer, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation). E-mail: da--ch@yandex.ru

*Статья поступила в редакцию 26.11.2022; принята к публикации 10.04.2024*

*The article was submitted 26.11.2022; accepted for publication 10.04.2024*