

Научная статья

УДК 532.529, 519.63

doi: 10.17223/19988621/88/6

Численное исследование полидисперсных двухфазных течений в осесимметричном сопле Лаваля с учетом силы Магнуса, действующей на вращающиеся капли

Владимир Петрович Бушланов¹, Владимир Григорьевич Бутов²,
Анатолий Алексеевич Глазунов³

¹ Государственный морской университет им. Ф.Ф. Ушакова, Новороссийск, Россия

^{2,3} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ bushlanovvp@yandex.ru

² bvg@niipmm.tsu.ru

³ gla@niipmm.tsu.ru

Аннотация. Выполнено численное исследование двухфазного течения в осесимметричном сопле Лаваля с учетом процессов коагуляции, вращения, дробления капель и силы Магнуса, действующей на них. Показано, что учет силы Магнуса приводит к отклонению предельных линий (траекторий) фракций капель к контуру сопла, смещению мест выпадения капель к минимальному сечению сопла и увеличению угла их столкновения со стенкой сопла.

Ключевые слова: двухфазное течение, коагуляция, вращение и дробление капель, сила Магнуса, математическая модель

Благодарности: Исследование выполнено при поддержке Программы развития Томского государственного университета (Приоритет – 2030) и Государственного морского университета им. Ф.Ф. Ушакова в г. Новороссийске.

Для цитирования: Бушланов В.П., Бутов В.Г., Глазунов А.А. Численное исследование полидисперсных двухфазных течений в осесимметричном сопле Лаваля с учетом силы Магнуса, действующей на вращающиеся капли // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 88. С. 66–78. doi: 10.17223/19988621/88/6

Original article

Numerical modeling of polydisperse two-phase flows in an axisymmetric de Laval nozzle with account for the Magnus force acting on rotating droplets

Vladimir P. Bushlanov¹, Vladimir G. Butov², Anatoliy A. Glazunov³

¹ Admiral Ushakov Maritime State University, Novorossiysk, Russian Federation

^{2,3} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ bushlanovvp@yandex.ru

² bvg@niipmm.tsu.ru

³ gla@niipmm.tsu.ru

Abstract. The available papers on two-phase flows in de Laval nozzles are focused on the effect of various initial conditions, models of coagulation, fragmentation, and rotation of droplets on their local and integral characteristics. Some papers note that due to the difference in the velocities of the gas and droplets along the nozzle axis, the Magnus force acts on the rotating droplets perpendicular to the specified difference and deflects the trajectories of the droplets toward the nozzle wall.

In an earlier paper, the authors proposed a mathematical model of a two-phase flow in an axisymmetric de Laval nozzle that accounts for the Magnus force on the basis of the kinetic equation. The present article is devoted to a numerical study of a polydisperse two-phase flow in a de Laval nozzle with account for the coagulation, fragmentation, and rotation of droplets and the Magnus force. This study is based on the “monodisperse” model of fragments developed by I.M. Vasenin and A.A. Shreiber, the method of labeled drops (the Lagrange method), and the finite-difference schemes of second order accuracy.

The calculations are carried out for a test nozzle configuration with condensate formation on the nozzle wall both with and without the Magnus force accounted. The calculated results show that the Magnus force has different impacts on the trajectories of droplets of various sizes. It should be noted that the limiting trajectories of the droplets approach the nozzle wall due to the Magnus force, resulting in the earlier dropout on the wall. Therefore, when designing the divergent section of the nozzle, it is necessary to consider the revealed approach of the location of the dropout, which is associated with the Magnus force, to the nozzle throat.

Keywords: two-phase flow, coagulation, rotation, and fragmentation of droplets, the Magnus force, mathematical model

Acknowledgments: This study was supported by the Tomsk State University Development Programme (Priority 2030) and by the Admiral Ushakov Maritime State University in Novorossiysk.

For citation: Bushlanov, V.P., Butov, V.G., Glazunov, A.A. (2024) Numerical modeling of polydisperse two-phase flows in an axisymmetric de Laval nozzle with account for the Magnus force acting on rotating droplets. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 88. pp. 66–78. doi: 10.17223/19988621/88/6

Исследования полидисперсных двухфазных течений в осесимметричном сопле Лаваля с учетом процессов столкновения капель конденсата друг с другом и взаимодействия капель с газом актуальны для ракетно-космической и теплоэнергетической техники.

К настоящему времени опубликован ряд статей [1–8], посвященных различным аспектам этой тематики. Первой работой по исследованию осесимметричного течения в сопле Лаваля в рамках модели полной коагуляции частиц и их аэродинамического дробления является работа [1]. В последующих исследованиях [2–5] проанализированы особенности двухфазных течений с учетом коагуляции и дробления частиц при столкновениях. В работах [6–8] предложено учитывать еще и вращение частиц, возникающее из-за нецентральных столкновений капель.

В [6–8] показано, что в результате многочисленных столкновений собственные моменты импульсов капель могут возрастать и достигать критических величин, что приводит к их разрушению центробежными силами.

Можно отметить ряд обобщающих монографий по данному направлению [9–15]. В них выполнен анализ моделей двухфазных течений различной степени сложности, приведены соответствующие системы уравнений, описывающие эти модели, методы их реализации и результаты численных и экспериментальных исследований особенностей течений в соплах Лаваля.

В работе [16] нами предложена модель двухфазного течения с учетом силы Магнуса, действующей на вращающиеся капли. Представленное далее исследование является численной реализацией работы [16]. Результаты расчетов позволили получить новые данные по локальным характеристикам двухфазного течения, в частности по траекториям предельных линий тока вращающихся капель.

Рассмотренная в [16] модель описывает неравновесное двухфазное течение смеси газа и полидисперсных жидких капель конденсата в осесимметричном сопле Лаваля. Учитываются процессы коагуляции, дробления, вращения капель и силы Магнуса, действующие на вращающиеся капли в потоке.

При моделировании двухфазного течения использовались следующие допущения [16]:

1. Течение описывается многожидкостной моделью сплошной среды, предложенной Х.А. Рахматулиным и развитой в работах Р.И. Нигматулина, А.Н. Крайко, Л.Е. Стернина, И.М. Васенина, А.А. Шрайбера. Согласно этой модели, двухфазное течение заменяется «взаимопроникающими» течениями нескольких сплошных сред: средой газа и «сплошных сред» капель. В каждой точке течения состояние сред характеризуется своими скоростями, температурами, внутренними энергиями. Состояние газа определяется скоростями (u, v) , давлением p , плотностью ρ и полной энтальпией H , а параметры среды фракций капель – скоростями (u_i, v_i) , массой капель m_i , условной плотностью «газа» капель ρ_i , квадратами моментов вращения M_i^2 , радиальной составляющей момента вращения M_{2i} , моментом второго порядка радиальной скорости $\langle v_1 v_1 \rangle_i$ и моментом второго порядка компоненты силы Магнуса в радиальной плоскости $\langle v_1 L_2 \rangle_i$, количеством капель в единице объема n_i .

2. Все капли разбиты на K_p фракций. Капли имеют сферическую форму и одинаковый радиус r_i (индекс i – номер фракции). Объемом, занимаемым каплями, пренебрегаем.

3. Течение стационарное.

4. Газ совершенный, химически не реагирующий.

5. Влияние капель на течение газа не учитывается.

6. Процессы коагуляции, вращения и дробления капель при столкновениях учитывались по «монодисперсной» модели осколков И.М. Васенина [9] и А.А. Шрайбера [10].

7. Сила Магнуса учтена в математической модели, предложенной нами в [16].

Система уравнений, описывающая двухфазное осесимметричное течение с учетом сделанных допущений, состоит из системы уравнений для газа и K_p систем уравнения для фракций капель и имеет следующий вид (обозначения такие же, как в [16]):

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x}(y\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(y\rho v) = 0, \\
 & \frac{\partial}{\partial x}(y\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y\rho uv) + \frac{\partial}{\partial x}(y\rho p) = 0, \\
 & \frac{\partial}{\partial x}(y\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(y\rho v^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y\rho p) - p = 0, \\
 & \frac{\partial}{\partial x}(y\rho Hu) + \frac{\partial}{\partial y}(y\rho Hv) = 0, \\
 & p = \rho (\gamma - 1) / \gamma \cdot [H - (u^2 + v^2) / 2], \quad p = \rho RT, \\
 & \frac{\partial}{\partial x}(y\rho_i u_i) + \frac{\partial}{\partial y}(y\rho_i v_i) = y[n_i \sum_{j=1}^i K_{ij} \Phi_{ij} \rho_j - \rho_i \sum_{j=i}^{K_p} K_{ij} \Phi_{ij} n_j], \\
 & \frac{\partial}{\partial x}(yn_i u_i) + \frac{\partial}{\partial y}(yn_i v_i) = -yn_i \sum_{j=i}^{K_p} K_{ij} \Phi_{ij} n_j, \\
 & \frac{\partial}{\partial x}(y\rho_i u_i^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y\rho_i u_i v_i) = \\
 & = y \left[\rho_i \Phi_{Ri} (u - u_i) + n_i \sum_{j=1}^i K_{ij} \rho_j (u_j - u_i) + \rho_i \sum_{j=1}^{K_p} K_{ij} n_j (1 - \Phi_{ij}) (u_j - u_i) - \right. \\
 & \quad \left. - u_i \left(\rho_i \sum_{j=i}^{K_p} K_{ij} \Phi_{ij} n_j - n_i \sum_{j=1}^i K_{ij} \Phi_{ij} \rho_j \right) \right], \\
 & \frac{\partial}{\partial x}(y\rho_i v_i u_i) + \frac{\partial}{\partial y}(y\rho_i v_i^2) = \\
 & = y \left[\rho_i \Phi_{Ri} (v - v_i) + n_i \sum_{j=1}^i K_{ij} \rho_j (v_j - v_i) + \rho_i \sum_{j=1}^{K_p} K_{ij} n_j (1 - \Phi_{ij}) (v_j - v_i) - \right. \\
 & \quad \left. - v_i \left(\rho_i \sum_{j=i}^{K_p} K_{ij} \Phi_{ij} n_j - n_i \sum_{j=1}^i K_{ij} \Phi_{ij} \rho_j \right) \right], \\
 & \frac{\partial}{\partial x}(y\rho_i T_i u_i) + \frac{\partial}{\partial y}(y\rho_i T_i v_i) = \\
 & = y \left[\rho_i \Phi_{ai} (c_p / c_s) (T - T_i) + n_i \sum_{j=1}^i K_{ij} \rho_j (E_j - E_i) + \rho_i \sum_{j=1}^{K_p} K_{ij} \rho_j (1 - \Phi_{ij}) (E_j - E_i) - \right. \\
 & \quad \left. - T_i \left(\rho_i \sum_{j=i}^{K_p} K_{ij} \Phi_{ij} n_j - n_i \sum_{j=1}^i K_{ij} \Phi_{ij} \rho_j \right) \right], \\
 & \frac{\partial}{\partial x}(yn_i M_i^2 u_i) + \frac{\partial}{\partial y}(yn_i M_i^2 v_i) + \frac{\partial}{\partial y}(yn_i L_i^2 v_i) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -y \left[2 \varphi_{Mi} M_{2i}^2 + \sum_{j=1}^i K_{ij} \Phi_{ij} n_j n_i (0,5 M_{oij}^2 + M_{2j}^2) - n_i K_{ij} \Phi_{ij} n_j M_{2i}^2 \right], \\
 &\quad \frac{\partial}{\partial x} (y n_i M_{2i} u_i) + \frac{\partial}{\partial y} (y n_i M_{2i} v_i) + \frac{\partial}{\partial y} (y n_i \langle v_1 L_2 \rangle) = \\
 &= y \left[2 \varphi_{Mi} M_{2i} + \sum_{j=1}^i K_{ij} \Phi_{ij} n_j n_i (M_{2i} + M_{2j}) - n_i \sum_{j=i}^{K_p} K_{ij} \Phi_{ij} n_j M_{2i} \right], \\
 &\quad \frac{\partial}{\partial x} (y n_i u_i [\langle v_1 L_2 \rangle_i + v_i M_{2i}]) + \frac{\partial}{\partial y} (y n_i [2 v_i \langle v_1 L_2 \rangle_i + M_{2i} \langle v_1 v_1 \rangle_i + v_i^2 M_{2i}]) + \\
 &\quad + y n_i [(\varphi_{Ri} + \varphi_{Mi} / 2) (\langle v_1 L_2 \rangle_i + v_i M_{2i})] = \\
 &\quad y \left\{ \Delta (v M_{2i})_i + n_i [\varphi_{Ri} M_{2i} v - \varphi_{Mi} \Delta u_i (M_{2i}^2 + M_{2i}^2) / 2] \right\}, \\
 &\quad \frac{\partial}{\partial x} (y \rho_i u_i [v_i^2 + \langle v_1 v_1 \rangle_i]) + \frac{\partial}{\partial y} \{ y \rho_i v_i [v_j^2 + 3 \langle v_1 v_1 \rangle_i] \} + y \rho_i \varphi_{Ri} [v_i^2 + \langle v_1 v_1 \rangle_i] = \\
 &\quad y \left\{ \Delta (m v^2)_i + \rho_i [2 \varphi_{Ri} v_i v - 2 \varphi_{Mi} \Delta u_i (M_{2i} v_i + \langle v_1 L_2 \rangle_i)] \right\}, \\
 &\quad K_{ij} = \pi (r_i + r_j)^2 |U_i - U_j| \mathfrak{E}_{ij},
 \end{aligned}$$

где: γ – показатель адиабаты для газа, M_{oij}^2 – квадрат момента относительного движения капелек i и j , Φ_{ij} – коэффициент эффективности столкновений, $\mathfrak{E}_{ij}$ – коэффициент захвата, K_{ij} – коэффициент коагуляции, умноженный на коэффициент захвата, $\varphi_{Ri}, \varphi_{Mi}, \varphi_{ai}$ – параметры динамического, вращательного и теплового взаимодействия капли с газом, c_p – теплоемкость газа при постоянном давлении, c_B – теплоемкость вещества капли.

Как и в [15], выражения для коэффициентов имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{E}_{ij} &= \left[1 + \frac{0.75 \ln(4 Stk_{ij})}{2 Stk_{ij} - 1.214} \right]^{-2}, \quad Stk_{ij} = \frac{|U_i - U_j| r_i^2 \rho_B}{9 r_j \eta}, \quad r_i < r_j, \\
 \Phi_{ij} &= 1 - 0.247 Re_{Bij}^{0.434} \Gamma^{0.133} \left(\frac{r_i}{r_j} \right)^{0.273}, \quad r_j > r_i, \quad Re_{Bij} = \frac{2 |u_i - u_j| \rho_B r_i}{\eta_B}, \quad \Gamma = \frac{\eta_B^2}{2 r_j \sigma_B \rho_B}, \\
 \varphi_{Ri} &= \frac{9 f_D \eta}{2 \rho_B r_i^2}, \quad f_D = \frac{C_{Di} Re_{ri}}{24}, \quad \varphi_{Mi} = \frac{15 \eta}{\rho_B r_i^2}, \quad \varphi_{ai} = \frac{3 \eta Nu_i}{2 \rho_B r_i^2 Pr},
 \end{aligned}$$

C_{Di} , Re_{ri} , Nu_i , Pr – соответственно коэффициент аэродинамического сопротивления, относительное число Рейнольдса, число Нуссельта и число Прандтля, Stk_{ij} – число Стокса.

$$E_j - E_i = c_B (T_j - T_i) + 0.5 \cdot (u_j - u_i)^2,$$

где первые четыре уравнения – это законы сохранения массы, количества движения и энергии газа. Следующие два соотношения – это выражение для энтальпии газа H и уравнение состояния. Далее записаны уравнения для частиц соответ-

ственно: сохранения массы, изменения числа частиц i -й фракции, количеств движения вдоль оси сопла и в поперечном направлении, энергии частиц, квадрата момента вращения M_i^2 , радиальной составляющей момента вращения M_{2i} , суммы произведения радиальной скорости и радиальной составляющей момента вращения M_{2i} и момента второго порядка – компоненты силы Магнуса в радиальной плоскости $\langle v_1 L_2 \rangle_i$, и последнее – суммы квадрата радиальной скорости и момента второго порядка радиальной скорости $\langle v_1 v_1 \rangle_i$.

Область интегрирования Gg для газовой фазы ограничивалась входным сечением сопла $x = x_n$ и его срезом $x = x_a$, контуром сопла $y = Y(x)$ и осью симметрии: $Gg\{x_n \leq x \leq x_a, 0 \leq y \leq Y(x)\}$. Области интегрирования каплей i -й фракции отличаются от области Gg только верхними границами $y = Y_i(x)$ ($i = 1, \dots, Kp$), где $Y_i(x)$ – предельная линия (траектория) каплей i -й фракции. Для расчета параметров газа используется метод работы [17]. Вся область расчета разбивается на две подобласти: до-трансзвуковую и сверхзвуковую. В качестве правой границы первой подобласти выбирается сечение $x = x_{ss}$, в котором реализуется сверхзвуковое истечение, а вторая подобласть – от $x = x_{ss}$ и до среза сопла. Расчет параметров газа в первой подобласти осуществлялся на основе метода установления. При этом во входном сечении сопла задавалось три граничных условия: энтальпия торможения, энтропия и направления вектора скорости. На контуре – условие непротекания, а на оси сопла – условия симметрии потока. Рассчитанные установившиеся значения для параметров течения газа в сечении $x = x_{ss}$ задавались в качестве начальных условий при расчете во второй подобласти. Уравнения для параметров фракций каплей являются x -гиперболическими во всей области течения при $u_i > 0$, поэтому они интегрировались в стационарной постановке во всей расчетной области. Во входном сечении сопла полагалось, что течение «равновесное» [15], и задавалось девять начальных условий:

$$\begin{aligned} u_i(x_n, y) = u(x_n, y), \quad u_i(x_n, y) = u(x_n, y), \quad T_i(x_n, y) = T(x_n, y), \quad M_i^2(x_n, y) = 0, \\ \rho_i(x_n, y) = \rho(x_n, y) \cdot g_i z / (1 - z), \quad n_i(x_n, y) = \rho_i(x_n, y) / m_i, \quad M_{2i}(x_n, y) = 0, \\ \langle v_1 L_2 \rangle_i(x_n, y) = 0, \quad \langle v_1 v_1 \rangle(x_n, y) = 0, \end{aligned}$$

где: g_i – нормированная функция распределения по расходам фракций, которая задавалась нормально-логарифмическим законом распределения каплей по радиусам [15], z – весовая доля каплей. Положение предельных линий тока каплей всех фракций на входе сопла полагалось равным значению ординаты контура сопла: $Y_i(x_n) = Y(x_n)$. В дальнейшем расчет предельных линий каплей определялся следующим образом: $Y_i(x + \Delta x) = Y_i(x) + v_i(x, Y_i) / u_i(x, Y_i) \Delta x$. Если $Y_i(x + \Delta x) > Y(x + \Delta x)$, то полагается $Y_i(x + \Delta x) = Y(x + \Delta x)$ (место выпадения каплей i -й фракции на стенку сопла).

Для численного решения каждой из подсистем газа и фракций каплей области интегрирования преобразовывались в прямоугольные с помощью следующей замены независимых переменных: $\zeta = x, \eta = y / Y(x), \eta_i = y / Y_i(x)$. Уравнения интегрировались в безразмерных переменных.

Для определения двухфазных параметров течения во всей расчетной области сопла Лавалия использовался приближенный метод работы [18]. На первом этапе

выполнялся расчет «равновесного» течения газа во всей расчетной области. На втором этапе осуществлялась маршевая прогонка вдоль сопла уравнений подсистем фракций капель по рассчитанному полю параметров газа. Численная реализация уравнений для газа основана на использовании явной разностной схемы второго порядка точности Мак-Кормака [17].

Подсистемы уравнений для фракций капель являются «жесткими» [15], и для их интегрирования применялась устойчивая явно-неявная разностная схема, также второго порядка точности [9, 11, 20]. Члены уравнений, отвечающие за силовое, вращательное и тепловое взаимодействия между газом и каплями, учитывались неявно, а коагуляционные члены – явно.

Расчеты двухфазных течений проводились для сопла, контур которого в до-трансзвуковой области задавался функцией на основе косинуса [8], а в сверхзвуковой области – полиномом третьей степени. $x_n = -1.8$, $y_n = 1.8$, $x_{\min} = 0$, $x_a = 10.8$ (все линейные размеры отнесены к радиусу минимального сечения $r_{\min}$). Параметры продуктов сгорания задавались для модельного «равновесного» состава и были взяты из [2].

На рис. 1, 2 показаны предельные линии траекторий капель с учетом силы Магнуса и без учета силы Магнуса. В скобках за номером фракции указан радиус капель в микронах. Верхняя линия – контур сопла. Правая вертикальная линия к оси сопла – срез сопла. Видно, что учет силы Магнуса приводит к более раннему выпадению капель на контур сопла.

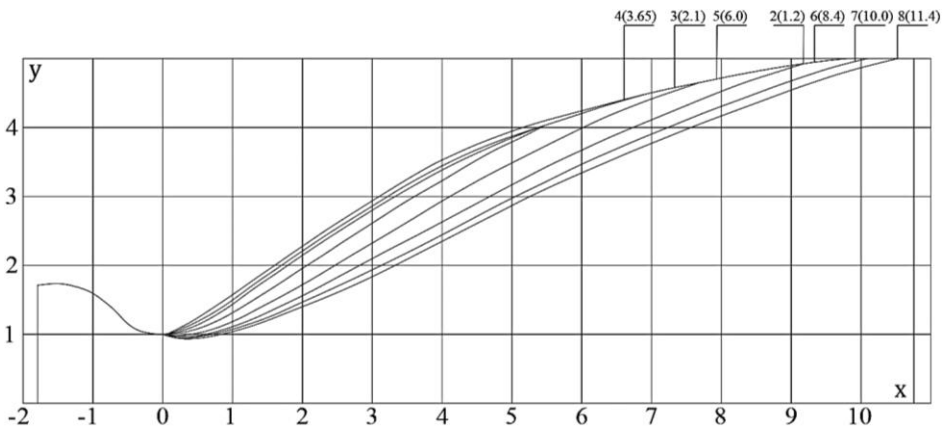


Рис. 1. Предельные линии траекторий капель с учетом силы Магнуса.

В скобках указан радиус частиц в микронах

Fig. 1. Limiting lines of droplet trajectories with account for the Magnus force.

The radius of the particles (in microns) is indicated in parentheses

На рис. 3 приведена зависимость безразмерного модуля момента количества движения (номер фракции капель опущен, σ – коэффициент поверхностного натяжения жидкости в капле)

$$\Omega_n = \left\{ \frac{M^2}{\rho \sigma} \left[\frac{4\pi\rho}{3m} \right]^{7/3} \right\}^{1/2}$$

от радиуса капель фракций в точке области сопла с координатами $x = 0.6$, $y = 0$. Увеличение безразмерного модуля момента количества движения с увеличением радиуса капли приводит к большему влиянию силы Магнуса на крупные капли, чем на мелкие (рис. 4, 5). Здесь указаны линии траекторий капель соответственно радиусов 3.6 и 6 мкм. Верхние – с учетом силы Магнуса, нижние – без учета силы Магнуса.

На рис. 6 представлена зависимость координат выпадения капель на контур сопла от их радиусов. Сплошная линия – с учетом силы Магнуса, штриховая – без учета силы Магнуса.

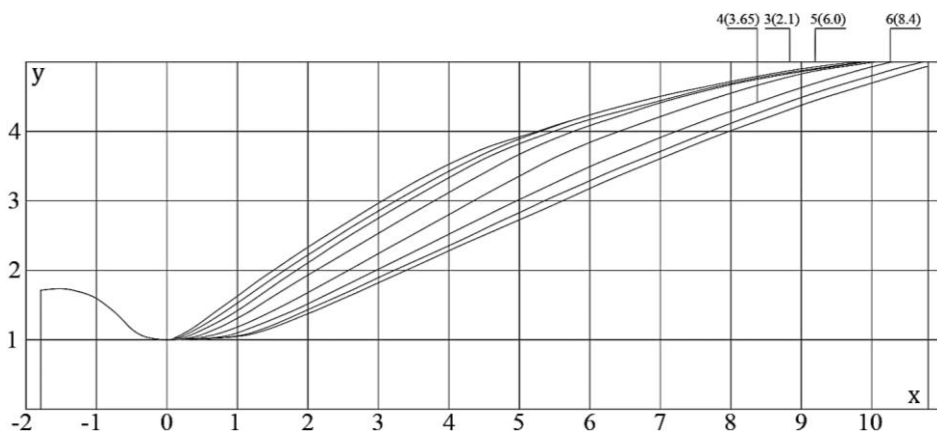


Рис. 2. Предельные линии траекторий капель без учета силы Магнуса.

В скобках указан радиус капель в микронах

Fig. 2. Limiting lines of droplet trajectories with no account for the Magnus force.

The radius of the droplets (in microns) is indicated in parentheses

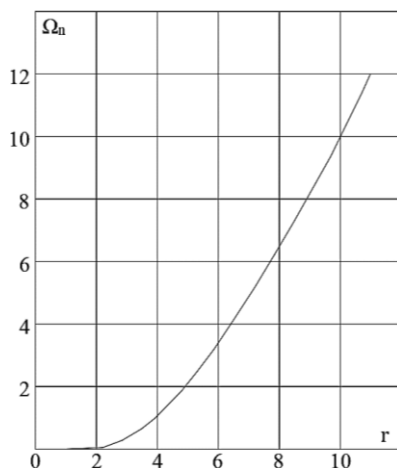


Рис. 3. Зависимость безразмерного модуля момента количества движения от радиуса капель в точке $x = 0.6$, $y = 0$

Fig. 3. Dimensionless modulus of the angular momentum as a function of the radius of droplets at the point $x = 0.6$, $y = 0$

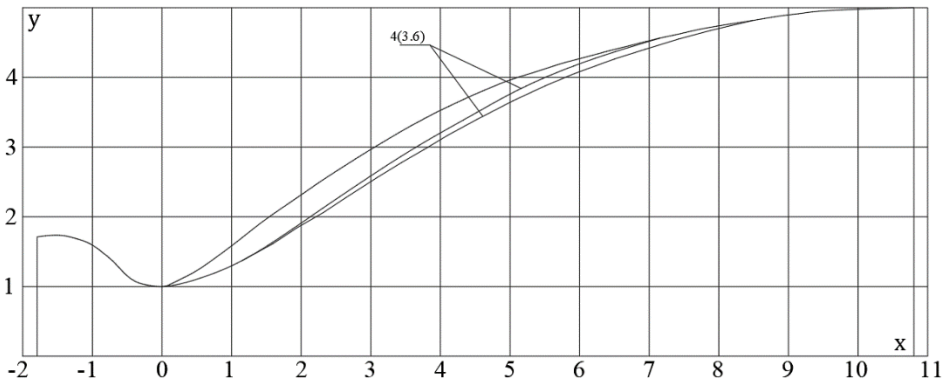


Рис. 4. Линии траекторий капель радиуса 3.6 мкм. Верхняя линия с учетом силы Магнуса, нижняя – без учета силы Магнуса

Fig. 4. Trajectory lines of droplets with a radius of 3.6 microns. The upper and lower lines correspond to the cases with or with no account for the Magnus force, respectively

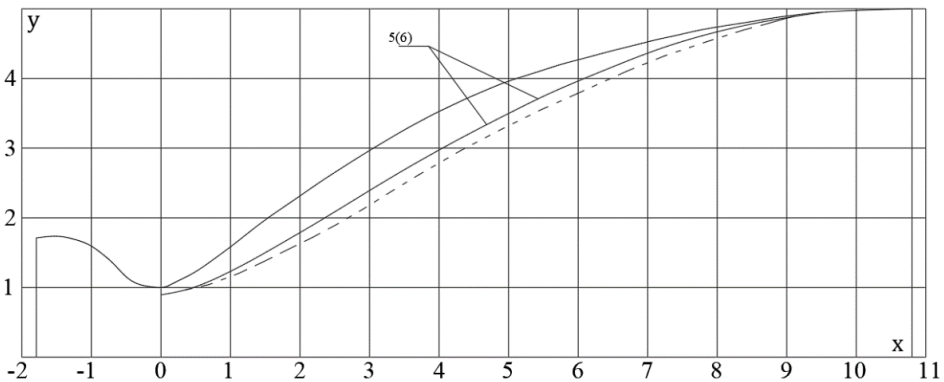


Рис. 5. Линии траекторий капель радиуса 6 мкм. Сплошная линия с учетом силы Магнуса, штриховая – без учета силы Магнуса

Fig. 5. Trajectory lines of droplets with a radius of 6 microns. The solid and dashed lines correspond to the cases with or with no account for the Magnus force, respectively

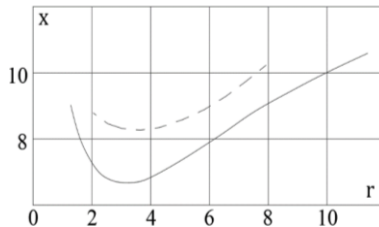


Рис. 6. Зависимость места выпадения от радиуса капель (мкм). Сплошная линия с учетом силы Магнуса, штриховая – без учета силы Магнуса

Fig. 6. Dropout location as a function of the droplet radius (in microns). The solid and dashed lines correspond to the cases with or with no account for the Magnus force, respectively

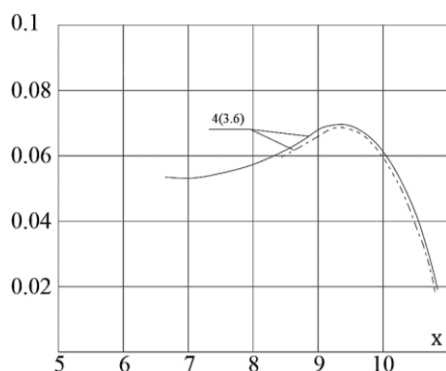


Рис. 7. Зависимость угла встречи (в радианах) со стенкой сопла каплей радиуса 3.6 мкм от абсциссы сопла

Fig. 7. Impact angle (in radians) for the nozzle wall and droplets with a radius of 3.6 microns as a function of the nozzle abscissa

На рис. 7 показана зависимость угла встречи (в радианах) со стенкой сопла каплей радиуса 3.6 мкм от абсциссы сопла. Сплошная линия – с учетом силы Магнуса, штриховая – без учета силы Магнуса. Из рис. 7 наглядно видно, что учет силы Магнуса приводит к более раннему (порядка радиуса минимального сечения) выпадению каплей в сверхзвуковой области сопла и увеличению угла их встречи со стенкой по сравнению с течением без учета силы Магнуса.

Таким образом, результаты расчетов показывают влияние диффузии вращающихся каплей под действием силы Магнуса на места их выпадения на стенку сопла и на углы встречи с контуром сопла. При построении контура сверхзвуковой области сопла следует учитывать указанную диффузию, так как выпадение каплей конденсата может привести к эрозии сопла (вплоть до его разрушения). Дальнейшее уточнение влияния силы Магнуса на интегральные и локальные параметры полидисперсных газокapельных течений связаны с учетом влияния конденсированной фазы на параметры газовой фазы и использованием более общей полидисперсной модели осколков дробления. Для этого требуется уточнение ряда экспериментальных зависимостей по взаимодействию вращающихся каплей разных размеров; в частности, необходимо определить коэффициент эффективности их взаимодействия, число осколков дробления и их угловые скорости.

Список источников

1. Кисаров Ю.Ф., Липанов А.М. Расчет параметров двухфазного течения в осесимметричном сопле Лавала с учетом коагуляции и дробления частиц // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1975. № 4. С. 161–165.
2. Рычков А.Д. Численное исследование двухфазных течений в осесимметричных соплах Лавала с учетом процессов коагуляции и дробления частиц конденсата // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1980. № 1. С. 82–90.
3. Бутков В.Г., Васенин И.М., Дьяченко Н.Н. Модель движения полидисперсного конденсата с учетом случайных пульсаций скорости и температуры коагулирующих частиц // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1981. № 3. С. 33–39.
4. Маслов Б.Н., Стернин Л.Е., Шрайбер А.А. Численное исследование особенностей двухфазного течения с коагуляцией и дроблением частиц в осесимметричных соплах Лавала // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1982. № 3. С. 145–153.

5. Рычков А.Д., Шрайбер А.А. Осесимметричное полидисперсное двухфазное течение с коагуляцией и дроблением частиц при произвольном распределении осколков по массам и скоростям // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1985. № 3. С. 73–79.
6. Васенин И.М., Архипов В.А., Глазунов А.А., Трофимов В.Ф. Исследование полидисперсных течений в соплах с учетом вращения частиц // Инженерно-физический сборник статей. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1985. С. 31–35.
7. Глазунов А.А., Васенина Т.В., Еремин И.В., Кувишинов Н.Е. Исследование неравновесных пространственных двухфазных течений в эллиптических соплах с учетом коагуляции, дробления и вращения частиц и полидисперсной модели осколков // Известия вузов. Физика. 2004. № 10. С. 31–36.
8. Glazunov A.A., Vasenin I.M., Ivanov V.A., Kuvshinov N.E., Narimanov R.K. Two-phase flow in the nozzles of solid rocket motors // Journal of Propulsion and Power. 1995. V. 11 (4). P. 583–592. doi: 10.2514/3.23884
9. Васенин И.М., Архипов В.А., Бутов В.Г., Глазунов А.А., Трофимов В.Ф. Газовая динамика двухфазных течений в соплах. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1986. 262 с.
10. Шрайбер А.А. Многофазные полидисперсные течения с переменным фракционным составом дискретных включений // Итоги науки и техн. Комплексные и специальные разделы механики. М. : Изд-во ВИНТИ, 1988. Т. 3. С. 3–80.
11. Рычков А.Д. Математическое моделирование газодинамических процессов в каналах и соплах. Новосибирск : Наука, 1988. 222 с.
12. Стернин Л.Е., Маслов Б.Н., Шрайбер А.А., Подвысоцкий А.М. Двухфазные моно- и полидисперсные течения газа с частицами. М. : Машиностроение, 1980. 172 с.
13. Крайко А.Н., Нигматулин Р.И., Старков В.К., Стернин Л.Е. Механика многофазных сред // Итоги науки и техники. Гидромеханика. М. : ВИНТИ, 1972. № 6. С. 93–174.
14. Стернин Л.Е., Шрайбер А.А. Многофазные течения газа с частицами. М. : Машиностроение, 1994. 320 с.
15. Стернин Л.Е. Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. М. : Машиностроение, 1974. 212 с.
16. Бушланов В.П., Бутов В.Г., Глазунов А.А. К построению математической модели двухфазного течения в осесимметричном сопле Лаваля // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 84. С. 93–108. doi: 10.17223/19988621/84/8
17. Глазунов А.А., Рычков А.Д. Исследование неравновесных двухфазных течений в осесимметрических соплах Лаваля // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1977. № 5. С. 86–91.
18. Камзолов В.Н., Маслов Б.Н., Пирумов У.Г. Исследование траекторий частиц в соплах Лаваля // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1971. № 5. С. 136–143.
19. MacCormack R.W. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering // Journal of Spacecraft and Rockets. 2003. V. 40 (5). С. 757–763. doi: 10.2514/2.6901
20. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Течение газа с частицами. М. : Физматлит, 2008. 600 с.

References

1. Kisarov Y.F., Lipanov, A.M. (1975) Calculation of the parameters of two-phase flow in an axisymmetrical laval nozzle allowing for the coagulation and atomization of the particles. *Fluid Dynamics*. 10. pp. 675–679. doi: 10.1007/BF01026718
2. Rychkov A.D. (1980) Numerical investigation of two-phase flows in axisymmetric Laval nozzles with allowance for processes of coagulation and division of condensed particles. *Fluid Dynamics*. 15. pp. 67–74. doi: 10.1007/BF01089815
3. Butov V.G., Vasenin I.M., D'yachenko N.N. (1981) Model of the motion of a polydisperse condensate with allowance for random pulsations of the velocity and temperature of coagulating particles. *Fluid Dynamics*. 16. pp. 350–355. doi: 10.1007/BF01092366

4. Maslov B.N., Sternin L.E., Shraiber A.A. (1982) Numerical investigation of two-phase flow with coagulation and fragmentation of particles in axisymmetric Laval nozzles. *Fluid Dynamics*. 17. pp. 445–451. doi: 10.1007/BF01091284
5. Rychkov A.D. Shraiber A.A. (1985) Axisymmetric polydisperse two-phase flow with particle coagulation and fragmentation for an arbitrary distribution of the fragments by masses and velocities. *Fluid Dynamics*. 20. pp. 398–404. doi: 10.1007/BF01049992
6. Vasenin I.M., Arkhipov V.A., Butov V.G., Glazunov A.A., Trofimov V.F. (1985) Issledovanie polidispersnykh techeniy v soplakh s uchyotom vrashcheniya chastits [Study of polydisperse flows in nozzles taking into account rotation of particles]. *Inzhenerno-fizicheskiy sbornik statey*. Tomsk: Izdatel'stvo TGU. pp. 31–35.
7. Glazunov A.A., Vasenina T.V., Eryomin I.V., Kuvshinov N.E. (2004) Issledovanie neravnovesnykh prostranstvennykh dvukhfaznykh techeniy v ellipticheskikh soplakh s uchyotom koagulyatsii, drobleniya i vrashcheniya chastits i polidispersnoy modeli oskolkov [Study of nonequilibrium spatial two-phase flows in elliptical nozzles taking into account coagulation, fragmentation, and rotation of particles and the polydisperse model of fragments]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Fizika – Russian Physics Journal*. 10. pp. 31–36.
8. Glazunov A.A., Vasenin I.M., Ivanov V.A., Kuvshinov N.E., Narimanov R.K. (1995) Two-phase flow in the nozzles of solid rocket motors. *Journal of Propulsion and Power*. 11(4). pp. 583–592. doi: 10.2514/3.23884
9. Vasenin I.M., Arkhipov V.A., Butov V.G., Glazunov A.A., Trofimov V.F. (1986) *Gazovaya dinamika dvukhfaznykh techeniy v soplakh* [Gas dynamics of two-phase flows in nozzles]. Tomsk: Izdatel'stvo TGU.
10. Shrayber A.A. (1988) *Mnogofaznye polidispersnye techeniya s peremennym fraktsionnym sostavom diskretnykh vklyucheniy* [Multiphase polydisperse flows with variable fractional composition of discrete inclusions]. Volume 3. Moscow: VINITI. pp. 3–80.
11. Rychkov A.D. (1986) *Matematicheskoe modelirovanie gazodinamicheskikh protsessov v kanalakh i soplakh* [Mathematical modeling of gas-dynamic processes in channels and nozzles]. Novosibirsk: Nauka.
12. Sternin L.E., Maslov B.N., Shrayber A.A., Podvysotskiy A.M. (1980). *Dvukhfaznye mono- i polidispersnye techeniya gaza s chastitsami* [Two-phase mono- and polydisperse gas flows with particles]. Moscow: Mashinostroenie.
13. Krayko A.N., Nigmatulin R.I., Starkov V.K., Sternin L.E. (1972) *Mekhanika mnogofaznykh sred* [Mechanics of multiphase media]. *Itogi nauki i tekhniki. Gidromekhanika*. Volume 6. Moscow: VINITI. pp. 93–174.
14. Sternin L.E., Shrayber A.A. (1994) *Mnogofaznye techeniya gaza s chastitsami* [Multiphase gas flows with particles]. Moscow: Mashinostroenie.
15. Sternin L.E. (1974) *Osnovy gazodinamiki dvukhfaznykh techeniy v soplakh* [Fundamentals of gas dynamics of two-phase flows in nozzles]. Moscow: Mashinostroenie.
16. Bushlanov V.P., Butov V.G., Glazunov A.A. (2023) K postroeniyu matematicheskoy modeli dvukhfaznogo techeniya v osesimmetrichnom sope Lavalya [On the development of a mathematical model of a two-phase flow in an axisymmetric de Laval nozzle]. *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 84. pp. 93–108. doi: 10.17223/19988621/84/8
17. Glazunov A.A., Rychkov A.D. (1977) Investigation of nonequilibrium two-phase flows in axisymmetric Laval nozzles. *Fluid Dynamics*. 12. pp. 887–892. doi: 10.1007/BF01090324
18. Kamsolov B.N., Maslov B.N., Pirumov Y.G. (1971) Investigation of particle trajectories in Laval nozzles. *Fluid Dynamics*. 6. pp. 849–856. doi: 10.1007/BF01013868
19. Mac Cormack R.W. (2003) The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering. *Journal of Spacecraft and Rockets*. 40(5). pp. 757–763. doi: 10.2514/2.6901
20. Volkov K.N., Emel'yanov V.N. (2008) *Techenie gaza s chastitsami* [Gas flow with particles]. Moscow: Fizmatlit.

Сведения об авторах:

Бушланов Владимир Петрович – доктор физико-математических наук, профессор Государственного морского университета им. Ф.Ф. Ушакова, Новороссийск, Россия. E-mail: bushlanovvp@yandex.ru

Бутов Владимир Григорьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом математической физики Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: bvg@niipmm.tsu.ru

Глазунов Анатолий Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: gla@niipmm.tsu.ru

Information about the authors:

Bushlanov Vladimir P. (Doctor of Physics and Mathematics, Admiral Ushakov Maritime State University, Novorossiysk, Russian Federation). E-mail: bvp@

Butov Vladimir G. (Doctor of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: bvg@niipmm.tsu.ru

Glazunov Anatoliy A. (Doctor of Physics and Mathematics, Research Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: gla@niipmm.tsu.ru

Статья поступила в редакцию 04.03.2023; принята к публикации 10.04.2024

The article was submitted 04.03.2023; accepted for publication 10.04.2024