

Научная статья

УДК 534.647

doi: 10.17223/19988621/88/7

Виброактивность электромеханических устройств вследствие наличия технологических погрешностей

Виктор Степанович Дмитриев¹, Леонид Леонидович Миньков²,
Дмитрий Владимирович Ермаков³,
Алексей Александрович Моховиков⁴, Виктор Юрьевич Шпильной⁵,
Ростислав Константинович Беликов⁶

² Томский государственный университет, Томск, Россия

^{3, 4, 5, 6} Томский политехнический университет, Томск, Россия

¹ dmitriev@tpu.ru

² lminkov@ftf.tsu.ru

³ dvermakov@tpu.ru

⁴ mohovikov@tpu.ru

⁵ vshpilnoy@list.ru

⁶ rkb3@tpu.ru

Аннотация. Рассматривается теоретическое обоснование наличия вибрации в рабочих режимах электромеханических устройств из-за технологических погрешностей, имеющих место при механической обработке деталей и сборке изделий. Показано обоснование наличия плотного спектра вибрации от технологических погрешностей элементов конструкции шарикоподшипников (наружного и внутреннего колец, шариков и сепаратора). В аналитическом виде показана зависимость амплитуды вибрации от величины технологических погрешностей.

Ключевые слова: вибрация, шарикоподшипник, демпфирование, ряд Фурье

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № FSMN-2020-0028 (теоретические исследования), гранта РНФ № 23-79-10107 (лабораторное оборудование, результаты исследования демпфирующих свойств материалов), гранта РНФ № 23-79-01199 (обработка данных).

Для цитирования: Дмитриев В.С., Миньков Л.Л., Ермаков Д.В., Моховиков А.А., Шпильной В.Ю., Беликов Р.К. Виброактивность электромеханических устройств вследствие наличия технологических погрешностей // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 88. С. 79–93. doi: 10.17223/19988621/88/7

Vibration activity in electromechanical devices caused by technological errors

Viktor S. Dmitriev¹, Leonid L. Minkov², Dmitry V. Ermakov³,
Aleksey A. Mokhovikov⁴, Viktor Yu. Shpil'noi⁵, Rostislav K. Belikov⁶

² Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

^{3, 4, 5, 6} Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation

¹ dmitriev@tpu.ru

² lminkov@ftf.tsu.ru

³ dvermakov@tpu.ru

⁴ mohovikov@tpu.ru

⁵ vshpilnoy@list.ru

⁶ rkb3@tpu.ru

Abstract. This article discusses a theoretical justification for the presence of vibration in operating modes of electromechanical devices due to technological errors occurring during the machining of parts and assembly of products. The reason for the presence of a dense spectrum of vibration caused by technological errors in the structural elements of ball bearings (outer and inner rings, balls, and cage) is also denoted. The analytical dependence of the vibration amplitude on the magnitude of technological errors is shown. It follows from the results of the analysis that for the most effective minimization of the vibration activity of an electromechanical device, it is necessary to use broadband damping, which is liquid-viscous in most cases.

In addition to the above, it is advisable to apply damping in the cascade version. When solving the system of vibration equations for an electromechanical device, replacing ball bearings with sliding bearings eliminates the first four terms, which characterize a wide and dense vibration spectrum of the ball bearings in the operating mode of the electromechanical device.

Keywords: vibration, ball bearing, damping, Fourier series

Acknowledgments: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, project no. FSMN-2020-0028 (theoretical research), grants from the Russian Science Foundation, project nos. 23-79-10107 (laboratory equipment, research methodology on the basis of damping characteristics of materials) and 23-79- 01199 (data processing techniques).

For citation: Dmitriev, V.S., Minkov, L.L., Ermakov, D.V., Mokhovikov, A.A., Shpil'noi V.Yu., Belikov, R.K. (2024) Vibration activity in electromechanical devices caused by technological errors. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 88. pp. 79–93. doi: 10.17223/19988621/88/7

Введение

Вопрос минимизации уровня механических вибраций в рабочем режиме механизмов – постоянно актуальная научно-техническая проблема. Механические колебания – весьма распространенный и технически важный вид движения в при-

роде. Механические колебания – это частный случай колебаний, существующих в оптике, электричестве, акустике теории атома и т.п. [1–6].

Физическая сущность механических колебательных систем и их назначение могут быть совершенно различными, однако между колебательными процессами в таких системах есть много общего, так как законы, управляющие этими процессами, одни и те же. Такая универсальность законов позволяет анализировать колебания с единой физико-математической точки зрения. Это значит, что механические колебания можно исследовать через аналогии и сравнения при помощи механической обобщенной модели.

Во всех инженерных задачах, если правильно понята физика колебательного процесса, математика – очень хороший инструмент исследования. Логично составленные математическая модель и алгоритм решения, обоснованно подобранные вычислительные средства – гарантия положительного результата в решении исследуемой научно-технической проблемы.

Следует отметить, что в эффективности решения минимизации виброактивности в рабочих режимах механизмов большое значение играют определение взаимосвязи параметров, определяющих уровень вибрации, и тип демпфирования.

Механизмы с шарикоподшипниковыми опорами продолжают использоваться и еще долго будут применяться в силу их технических достоинств: малых габаритов и веса, простоты и дешевизны, достаточно высоких точности и надежности, малого момента трения, высокой жесткости, способности выдерживать многочисленные запуски и остановки изделий.

В то же время подшипник является неисчерпаемым объектом исследований в качестве источника вибрации, что детально представлено в работе В.Ф. Журавлева и В.Б. Бальмонта [7]. Здесь только отметим, что основной источник вибрации заложен в неидеальности шарикоподшипника: движение сепаратора, переменная жесткость при действии радиальной нагрузки, взаимодействие микронеровностей шероховатых поверхностей, прорывающих масляную пленку в местах контакта шариков с поверхностью дорожек качения, гранность и волнистость рабочих поверхностей колец и шариков.

Проведенные теоретические и экспериментальные исследования [7] показывают, что доминирующими факторами неидеальности являются гранность шариков и волнистость дорожек качения; при исследовании в первом приближении остальные причины считаются несущественными. Такое ограничение позволяет более просто и наглядно решать задачу минимизации параметров вибрационного процесса.

В электромеханических устройствах (ЭМУ) вибрация обусловлена наличием возбуждающих воздействий различной физической природы – механической, электромагнитной, аэродинамической. Их причиной являются различные физические процессы. Например, совпадение частотных гармоник различного порядка с собственной частотой элементов конструкции, дисбаланс вращающихся частей электродвигателя, шумы электромагнитного происхождения от взаимодействия во времени и пространстве магнитных полей, индукции в воздушном зазоре, наличие пазов.

В данной статье причины вибрационного рабочего режима в ЭМУ рассматриваются в логической связи с предлагаемыми техническим решениями по их минимизации.

Цель настоящей статьи – рассмотрение теоретических основ проявления виброактивности в рабочих режимах ЭМУ из-за наличия технологических погрешностей изготовления функциональных узлов.

Причины возникновения вибрации

ЭМУ – это большой класс исполнительных механизмов (от исполнительного органа космических аппаратов до дрели), в которых движителем является электрический двигатель любого типа с установленным на его валу функциональным узлом, определяющим назначение ЭМУ.

Рабочий режим ЭМУ характеризуется генерируемой электродвигателем вибрацией, которая негативно сказывается не только на его надежности и долговечности, но также и на качестве функциональной работы целевой аппаратуры, находящейся в одной с ним технической системе.

Электрический двигатель, являющийся генератором этих вибраций, содержит десяток источников механических колебаний различной физической природы: дисбаланс, электромагнитные явления в электродвигателе, погрешность шарикоподшипников, технологические погрешности конструкции.

Существующие упругие и инерционные силы вызывают одно за другим сжатие и разряжение окружающей среды (колебания), и эти колебания воспринимаются как звук.

Теоретический анализ математической модели ЭМУ проводился с использованием классического математического аппарата теории колебаний. На рис. 1 показано ЭМУ массой M , состоящее из электродвигателя 1, который крепится к неподвижному основанию 2 посредством пружин 3 с жесткостью $k/2$ каждая, и демпфера 4 с коэффициентом демпфирования K_D .

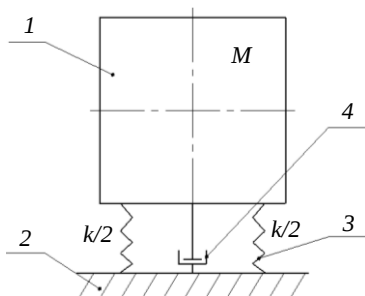


Рис. 1. Расчетная схема
Fig. 1. Design scheme

Любой механизм, являющийся физическим телом и обладающий упругостью конструкции, при действии на него периодических воздействий от неуравновешенных сил инерции находится в колебательном режиме. Соударения рабочих поверхностей деталей подшипников, изготовленных с технологическими погрешностями, электромагнитные явления и тому подобное будут являться причинами наличия вибрационного режима.

В реальных механизмах ЭМУ, содержащих вращающиеся детали в шарикоподшипниковых опорах, как показывают прикладные исследования, в рабочих

режимах существует плотный спектр вибрации с частотой от десятков до десятков тысяч герц.

Для снижения виброактивности ЭМУ на этапе разработки применяются как аналитические методы и способы, так и технические решения, снижающие амплитуду колебаний.

Полностью устранить виброактивность в рабочем режиме не представляется возможным [8, 9], ее можно только минимизировать до приемлемого уровня.

Существующие три способа минимизации виброактивности – уменьшение возбуждающих воздействий, повышение степени демпфирования и «разведение» собственных частот элементов конструкции и частот возбуждающих воздействий – как правило, позволяют получить необходимый минимальный уровень виброактивности в рабочем режиме устройства.

При всех действующих возмущающих воздействиях в механизмах технологические погрешности шарикоподшипников играют доминирующую роль в генерировании вышеуказанного спектра. Отсюда следует, что в проектируемых устройствах должны быть демпфирующие элементы конструкции с широким спектром частотного демпфирования.

Теоретические исследования

Примем следующие обозначения: T – кинетическая энергия системы, Дж; t – время, с; X, Y, Z – оси декартовой системы координат; τ – угол контакта подшипника; ω – угловая скорость вращающегося кольца подшипника, рад/с; ω_c – угловая скорость сепаратора, рад/с; $\omega_{ш}$ – угловая скорость шарика, рад/с; $\omega^1, \omega^3, \omega^5$ – угловая скорость центра шарика относительно не вращающегося кольца подшипника, рад/с; $\omega^2, \omega^4, \omega^6$ – угловая скорость центра шарика относительно вращающегося кольца подшипника, рад/с; ω^7 – угловая скорость шарика вокруг собственной оси, рад/с; U – силовая функция системы; p^1-p^8 – геометрические характеристики неидеального шарикоподшипника, мм; $\mu_k^{\lambda-1}$ – символ Кронекера; ω_p – частота резонансная; ω^S – угловая скорость шарика относительно колец; a_0, a_n, b_n – коэффициенты разложения в ряд Фурье; ξ_λ – коэффициент; $K_{эм}, K$ – коэффициенты жесткости; ψ_λ^S – фаза гармоники; a_λ^S – амплитуда гармоники; S – коэффициент, определяющий деталь шарикоподшипника.

Вышеизложенные причины возникновения вибрации математически корректно описываются применением научных положений теории колебаний. Например, для составления уравнений малых колебаний ЭМУ использован II метод Лагранжа:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{X}} \right) - \frac{\partial T}{\partial X} &= \frac{\partial U}{\partial X}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{Y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial Y} &= \frac{\partial U}{\partial Y}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{Z}} \right) - \frac{\partial T}{\partial Z} &= \frac{\partial U}{\partial Z}. \end{aligned} \quad (1)$$

Кинетическая энергия механической системы (кинетическая энергия вращающихся частей ЭМУ):

$$2T_B = J\Omega^2 + J_\alpha\alpha + J_\beta\beta. \quad (2)$$

Кинетическая энергия поступательного движения:

$$2T_\Pi = M(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2). \quad (3)$$

Анализ показывает, что из-за отсутствия маховика на валу ротора кинетическая энергия пренебрежительно мала, поэтому, учитывая силовую функцию от линейного движения всего объекта (3), в результате получаем уравнение малых колебаний объекта в виде:

$$M \frac{d}{dt}(\dot{X}_X + \dot{Y}_Y + \dot{Z}_Z) = XM(X', D_X) + YM(Y', D_Y) + ZM(Z', D_Z). \quad (4)$$

Ввиду независимости движения по каждой оси X, Y, Z уравнение (4) запишется в виде системы уравнений

$$\begin{aligned} M \frac{d}{dt} \dot{X} &= XM(X', D_X), \\ M \frac{d}{dt} \dot{Y} &= YM(Y', D_Y), \\ M \frac{d}{dt} \dot{Z} &= ZM(Z', D_Z), \end{aligned} \quad (5)$$

где M – масса объекта, X', Y', Z' – скалярные величины координат при воздействии силовых функций [7]; D_X, D_Y, D_Z – скалярные величины воздействия силовых функций [7]; X, Y, Z – координаты по осям воздействия.

Проведя дифференцирования левой части уравнения (5) и подставив возмущающие воздействия в виде силовых функций, действующих на объект по осям X, Y, Z , получим системы уравнений (6)

$$\begin{aligned} M\ddot{X} + C_X \dot{X} + K_X X &= \\ &= me\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) + F_{ЭМ} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + (X'_{1-6} D'_{X_{1-6}}) + (X'_7 D'_{X_7}) + f_X(t), \\ M\ddot{Y} + C_Y \dot{Y} + K_Y Y &= \\ &= me\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) + F_{ЭМ} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + (Y'_{1-6} D'_{Y_{1-6}}) + (Y'_7 D'_{Y_7}) + f_Y(t), \\ M\ddot{Z} + C_Z \dot{Z} + K_Z Z &= \Sigma(F_{двб} + F_{ЭМ}) \sin \varphi + (Z'_{1-6} D'_{Z_{1-6}}) + (Z'_7 D'_{Z_7}) + f_Z(t), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} f_X(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_X t + b_n \sin n\omega_X t), \\ f_Y(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_Y t + b_n \sin n\omega_Y t), \\ f_Z(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_Z t + b_n \sin n\omega_Z t). \end{aligned}$$

Правые части (6) после знака равенства представляют возмущающие воздействия, пояснение по которым будет приведено далее по мере рассмотрения математической сущности возбуждающих воздействий в рабочем режиме ЭМУ.

В работе [7] профессоров В.Ф. Журавлева и В.Б. Бальмонта для расчета динамики устройств с шарикоподшипниковыми опорами предложено ввести специальный вид криволинейных координат.

Для понимания физической сути проводимых в дальнейших математических операций тезисно представим описанную в [7] техническую суть этих координат (рис. 2):

– наружное кольцо:

$$\begin{aligned} p^1 &= p^1(\tau, \theta), p^3 = p^3(\tau, \theta), \\ p^5 &= p^5(\tau, \theta); \end{aligned} \quad (7.1)$$

– внутреннее кольцо:

$$\begin{aligned} p^2 &= p^2(\tau, \theta), p^4 = p^4(\tau, \theta), \\ p^6 &= p^6(\tau, \theta); \end{aligned} \quad (7.2)$$

где p^1, p^2 – радиусы кривизны сечения в текущей точке; p^3, p^4 – соответственно максимальное и минимальное расстояние от окружности, проведенной радиусом кривизны из центра кривизны до оси Z ; p^5, p^6 – координаты вдоль оси Z центра кривизны (рис. 2).

Рабочие поверхности колец шарикоподшипников описываются во введенных криволинейных координатах, а шариков – в сферических координатах, отнесенных к центру шариков. Отрезок на поверхности шарика, отсекающий от прямой, проходящей через центр шариков, назван текущим диаметром шарика и обозначается p^7 .

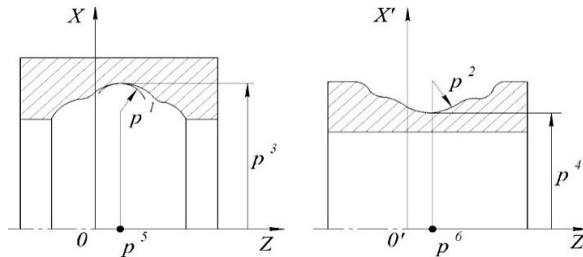


Рис. 2. Описание геометрии дорожек качения неидеального подшипника
Fig. 2. Description of the geometry of non-ideal bearing raceways

Если подшипник идеален, то функции p^i являются константами и принимают следующие значения (8):

$$p^1 = r_1; p^3 = R_1; p^5 = 0; p^2 = r_2; p^4 = R_2; p^6 = 0. \quad (8)$$

Принято, что дефекты поверхности колец и шариков малы, и поэтому шарик имеет две точки контакта с шариками.

Поверхность качения представляется в форме рядов Фурье, полагая, что след проката шарика в первом приближении считается плоской кривой (рис. 3).

С учетом графических интерпретаций (рис. 2–4) угол контакта τ считается постоянным, а по углу θ раскладывается в ряды Фурье через введенные геометрические характеристики.

$$p^s(\theta) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda}^s \sin(\lambda\theta_s + \varphi_{\lambda}^s), s = 1, \dots, 6. \quad (9)$$

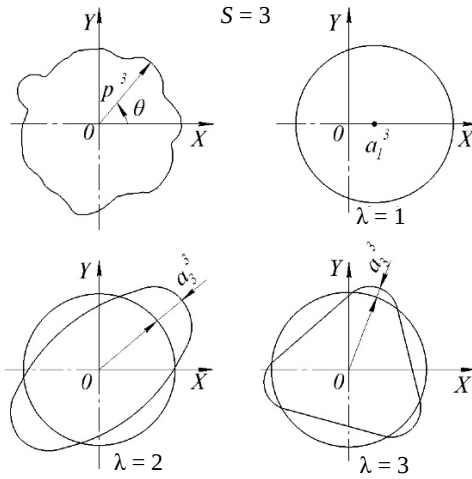


Рис. 3. Графическая интерпретация разложения в ряд Фурье продольного профиля дорожки качения наружного кольца подшипника

Fig. 3. Graphical interpretation of the Fourier expansion for a longitudinal profile of the outer ring raceway of the bearing

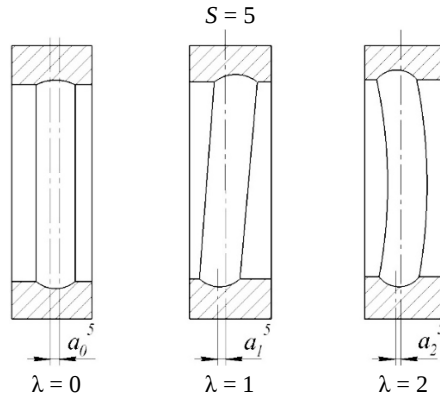


Рис. 4. Графическая интерпретация разложения в ряд Фурье бокового биения дорожки качения наружного кольца подшипника

Fig. 4. Graphical interpretation of the Fourier expansion for a lateral runout of the outer ring raceway of the bearing

Так как угол θ определяется выражением

$$\theta_{si} = k_s \gamma - (-1)^s \frac{2\pi}{n} (i-1), \quad (10)$$

то получается следующее представление погрешности (11)–(14).

$$\Delta p_i^s = p^s(\theta_{si}) - a_{\lambda=0}^s = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\lambda}^s \sin \left[\lambda k_s \gamma - (-1)^s \frac{2\pi \lambda}{n} (i-1) + \phi_{\lambda}^s \right]. \quad (11)$$

Для дефектов шариков принято $s = 7$. Так же, как и в случае колец, траектория точки контакта на шарике в первом приближении считается плоской кривой.

Диаметр шарика p^7 в плоскости этой кривой является периодической функцией угла θ_7 с периодом, равным π . Поэтому можно записать

$$p_i^7(\theta_7) = D_{\text{ш}} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda i}^7 \sin(2\lambda\theta_7 + \varphi_{\lambda i}^7), \quad (12)$$

где: $D_{\text{ш}}$ – среднее для всех шариков значение диаметра.

Угол поворота шарика относительно линии контакта кинематически связан с углом поворота внутреннего кольца относительно наружного:

$$\theta_7 = k_7\gamma, \quad (13)$$

что позволяет (12) представлять в следующем виде:

$$\Delta p_i^7 = p_i^7 - D_{\text{ш}} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda i}^7 \sin(2\lambda k_7\gamma + \varphi_{\lambda i}^7). \quad (14)$$

Возмущающие силы в уравнении вибрации представляются скалярными произведениями векторов $(X', D_X'), (Y', D_Y'), (Z', D_Z')$. Векторы D_X, D_Y, D_Z определены выражениями

$$D_X^s = \sum_{i=1}^n \Delta p_i^s \cos \varphi_i, \quad D_Y^s = \sum_{i=1}^n \Delta p_i^s \sin \varphi_i, \quad D_Z^s = \sum_{i=1}^n \Delta p_i^s. \quad (15)$$

Входящие сюда переменные Δp_i , характеризующие отклонения размеров неидеального подшипника от размеров среднего идеального подшипника, определяются выражениями (11) и (12), где:

$$\Delta p_i^s = \begin{cases} \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\lambda}^s \sin \left[\lambda k^s \gamma_3 - (-T)^s \frac{2\pi\lambda}{n} (i-1) + \varphi_{\lambda}^s \right], & s = 1, 2, \dots, 6; \\ \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda i}^7 \sin(2\lambda k^7 \gamma_3 + \varphi_{\lambda i}^7), & s = 7; \\ \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda 1}^8 \sin \left[\lambda k^1 \gamma_3 + 2 \frac{\pi\lambda}{n} (i-1) + \varphi_{\lambda 1}^8 \right] + \\ + \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda 2}^8 \sin \left[\lambda k^2 \gamma_3 - \frac{2\pi\lambda}{n} (i-1) + \varphi_{\lambda 2}^8 \right] + \\ + \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda i}^8 (2\lambda k^7 \gamma_3 + \varphi_{\lambda i}^8), & s = 8. \end{cases} \quad (16)$$

В результате векторы D_X, D_Y, D_Z определяются выражениями

$$\begin{aligned} D_X^s &= \frac{n}{2} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \alpha_{\lambda}^s \left\{ \mu_{kn}^{\lambda-1} \sin \left[(\lambda \omega^s + (-1)^s \omega^1) t + \psi_{\lambda}^s \right] + \mu_{kn}^{\lambda+1} \sin \left[(\lambda \omega^s - (-1)^s \omega^1) t + \psi_{\lambda}^s \right] \right\}; \\ D_Y^s &= -\frac{n}{2} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \alpha_{\lambda}^s \left\{ \mu_{kn}^{\lambda-1} \cos \left[(\lambda \omega^s + (-1)^s \omega^1) t + \psi_{\lambda}^s \right] + \right. \\ &\quad \left. + \mu_{kn}^{\lambda+1} \cos \left[(\lambda \omega^s - (-1)^s \omega^1) t + \psi_{\lambda}^s \right] \right\}; \\ D_Z^s &= n \sum_{\lambda/n=1}^{\infty} \alpha_{\lambda}^s \sin(\lambda \omega^s t + \psi_{\lambda}^s). \end{aligned} \quad (17)$$

Векторы X', Y', Z' определяются в соответствии с [7]:

$$X' = \frac{2K_X}{nM} \left\{ \sec \tau_0' - 1, \sec \tau_0' - 1, 1, -1, \operatorname{tg} \tau_0', -\operatorname{tg} \tau_0', -\sec \tau_0', -\frac{3}{2} \operatorname{tg} \tau_0' \right\};$$

$$Y' = \left[(p_0^2 + p_0^4) \operatorname{tg} \tau_0' + l' \right] \frac{M}{A} X';$$

$$Z' = X' \operatorname{tg} \tau_0'.$$

Осевая жесткость системы:

$$K_X' = \frac{3}{4} n (K_I^{cp'} \sqrt{\delta' \sin \tau_0' \cos^2 \tau_0'} + K_I^{cp''} \sqrt{\delta'' \sin \tau_0'' \cos^2 \tau_0''}).$$

Уравнения вибрации ЭМУ от всех источников возбуждающих воздействий с учетом введенных пояснений имеют вид:

$$\ddot{X} + 2\xi\dot{X} + X = (X' D_X) + m\omega_X^2 + F_{эм}\omega_X^2 + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_X t + b_n \sin n\omega_X t,$$

$$\ddot{Y} + 2\xi\dot{Y} + Y = (Y' D_Y) + m\omega_Y^2 + F_{эм}\omega_Y^2 + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_Y t + b_n \sin n\omega_Y t, \quad (19)$$

$$\ddot{Z} + 2\xi\dot{Z} + Z = (Z' D_Z) + \sum (F_{о\epsilon\delta} + F_{эм}) \sin \varphi + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_Z t + b_n \sin n\omega_Z t,$$

где: $(X' D_X)$, $(Y' D_Y)$, $(Z' D_Z)$ – силовые функции, построенные скалярными произведениями векторов X' , Y' , Z' , зависящие от радиальной жесткости подшипника, угла контакта числа шариков и векторов D_X' , D_Y' , D_Z' ; $m\omega^2$ – возбуждающее воздействие от частотной несбалансированности; $F_{эм}\omega^2$ – возбуждающее воздействие электромагнитного типа. Последний член правой части уравнений (19) определяет периодическое воздействие.

Решение уравнений (19) с учетом всех возмущающих воздействий (8)–(17) имеет вид [4–8]:

$$X_{\Sigma} = \sum_{s=1}^6 \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\lambda}^s X^s \frac{n}{2} \left\{ \frac{\mu_{kn}^{\lambda-1} \sin[(\lambda\omega^s + (-1)^s \omega^1] t + \psi_{\lambda}^s}{\omega_p^2 - [\lambda\omega^s + (-1)^s \omega^1]^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu_{kn}^{\lambda+1} \sin[(\lambda\omega^s - (-1)^s \omega^1] t + \psi_{\lambda}^s}{\omega_p^2 - [\lambda\omega^s - (-1)^s \omega^1]^2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\xi_{\lambda}^y \sin[(2\lambda\omega^7 - \omega^1)t + \chi_{\lambda}^x]}{\omega_p^2 - [\lambda\omega^s + (-1)^s \omega^1]^2} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{n_{\lambda}^x \sin[(2\lambda\omega^7 + \omega^1)t + \rho_{\lambda}^{\lambda}]}{\omega_p^2 - [\lambda\omega^s - (-1)^s \omega^1]^2} \right\} +$$

$$+ \frac{m\omega_X^2}{K} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} +$$

$$+ \frac{F_{эм}\omega_X^2}{K_{эм}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos n\omega_X t + b_n \sin n\omega_X t}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}};$$

$$\begin{aligned}
 Y_{\Sigma} = & - \sum_{S=1}^6 \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\lambda}^S X^S \frac{n}{2} \left\{ \frac{\mu_{kn}^{\lambda-1} \cos[(\lambda \omega^S + (-1)^S \omega^1] t + \psi_{\lambda}^S}{\omega_p^2 - [\lambda \omega^S + (-1)^S \omega^1]^2} + \right. \\
 & + \frac{\mu_{kn}^{\lambda+1} \cos[(\lambda \omega^S - (-1)^S \omega^1] t + \psi_{\lambda}^S}{\omega_p^2 - [\lambda \omega^S - (-1)^S \omega^1]^2} + \\
 & + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\xi_{\lambda}^Y \sin[(2\lambda \omega^7 - \omega^1)t + \chi_{\lambda}^Y]}{\omega_p^2 - [\lambda \omega^S + (-1)^S \omega^1]^2} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{n_{\lambda}^Y \sin[(2\lambda \omega^7 + \omega^1)t + \rho_{\lambda}^Y]}{\omega_p^2 - [\lambda \omega^S - (-1)^S \omega^1]^2} \left. \right\} + \\
 & + \frac{m e \omega_Y^2}{K} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right] + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} + \\
 & + \frac{F_{ЭМ} \omega_Y^2}{K_{ЭМ}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right] + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos n \omega_Y t + b_n \sin n \omega_Y t}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right] + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}; \quad (20) \\
 Z_{\Sigma} = & \sum_{S=1}^6 \sum_{\lambda/n=1}^{\infty} Z^S n \left\{ \frac{a_{\lambda}^S \sin(\lambda \omega^S t + \psi_{\lambda}^S)}{\omega_0^2 - (\lambda \omega^S)^2} \right\} + \\
 & + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\xi \lambda^Z \sin(2\lambda \omega^7 + \chi_{\lambda}^Z)}{\omega_0^2 - (\lambda \omega^S)^2} + \sum \left(F_{д\epsilon\epsilon\delta} + F_{эм} \right) \sin \varphi + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos n \omega_Z t + b_n \sin n \omega_Z t}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right] + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}.
 \end{aligned}$$

Система уравнений (20) описывает виброактивность в рабочем режиме ЭМУ во всем спектре возмущающих воздействий, т.е. описывает динамику вибрации по всему плотному спектру. Уравнения (20) являются несвязанными, а система X, Y, Z декартовая.

При установке демпферов в ЭМУ [8] в уравнениях по осям X и Y в первом, пятом и шестом членах будет введено эффективное демпфирование, и динамика виброактивности ЭМУ качественно изменится в части уменьшения амплитуды вибраций [9–12].

Наиболее радикальный способ качественно сократить спектр частот – это замена подшипников качения на подшипники скольжения, тогда исчезают первые четыре члена в уравнении, которые показывают наличие генерации вышеуказанного плотного спектра частот.

Используя принцип суперпозиции, на рис. 5 показан пример решения в графическом виде для каждого члена системы уравнений (20) с учетом оптимизации.

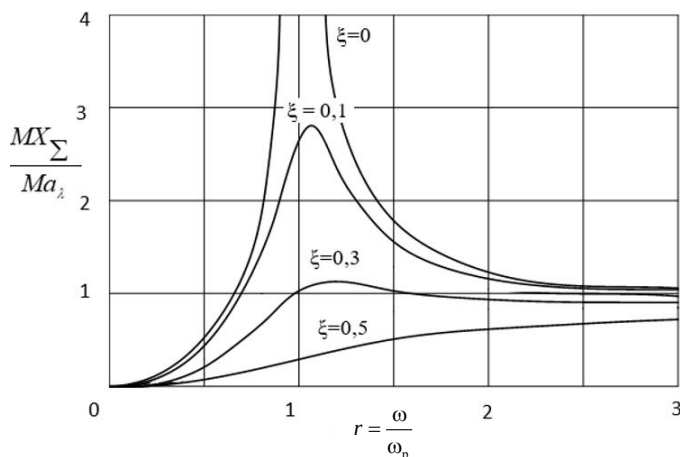


Рис. 5. Графическое решение системы уравнений (20)
Fig. 5. Graphical solution to the system of equations (20)

Первый член правой части уравнений X_{Σ}, Y_{Σ} (20) определяет воздействие на систему, создаваемое волнистостью наружного кольца шарикоподшипника, второй член – волнистостью рабочей поверхности внутреннего кольца.

Первый член уравнения Z_{Σ} определяет механическое воздействие от волнистости внутреннего и наружного колец. Третий и четвертый члены уравнений X_{Σ} определяют механическое воздействие на систему волнистости шариков, а в уравнении Z_{Σ} такое воздействие определяет второй член. Пятый член в уравнениях X_{Σ}, Y_{Σ} определяет воздействие на систему дисбаланса, а шестой – электромагнитное воздействие. Периодическое воздействие определяет последний член правых частей уравнений $X_{\Sigma}, Y_{\Sigma}, Z_{\Sigma}$ представляющий это воздействие в виде разложений на гармонические составляющие при помощи ряда Фурье.

Заключение

Наличие технологических погрешностей в функциональных узлах является определяющим для уровня виброактивности.

Система уравнений динамики ЭМУ с электродвигателем показывает, что в них из-за технологических погрешностей режим вибрационных возмущений является неотъемлемой частью рабочего режима.

Общая система дифференциальных уравнений динамики представляет довольно большую математическую модель рабочего режима вибрации ЭМУ, в правой части которой содержатся практически все возмущающие воздействия, значительную долю которых генерируют шарикоподшипниковые опоры.

Замена шарикоподшипников на опоры скольжения позволит в системе уравнений (20) избавиться от первых четырех членов, которые характеризуют широкий и плотный спектр вибрации шарикоподшипников в рабочем режиме ЭМУ.

Из представленного материала следует, что для наиболее эффективной минимизации виброактивности ЭМУ необходимо использовать широкополосное

демпфирование, а также целесообразно применять демпфирование в каскадном варианте.

Важным результатом НИР по шарикоподшипниковым опорам является то обстоятельство, что влияние на уровень вибраций оказывают только номера гармоник, кратные числу шариков. Все другие гармоники волнистости колец хотя и вызывают возмущающие воздействия, но амплитуда этих возмущений на порядок меньше. В отличие от колец любая четная гармоника волнистости шариков приводит к появлению вибрационных возмущений уже в первом приближении.

Для снижения виброактивности ЭМУ наиболее целесообразно в его конструкцию встраивать жидкостные демпферы, имеющие широкий спектр виброгашения.

Список источников

1. Qu Y., Su J., Hua H., Meng G. Structural vibration and acoustic radiation of coupled propeller-shafting and submarine hull system due to propeller forces // *Journal of Sound and Vibration*. 2017. V. 401. P. 76–93. doi: 10.1016/j.jsv.2017.03.034
2. Korovin G., Gavrilin A., Petrushin S., Odnokopylov G., Ermakov D. Improving the Surface of Titanium Alloys with Wave Cutters // *Recent Developments in the Field of Non-Destructive Testing, Safety and Materials Science. ICMTNT 2021. Studies in Systems, Decision and Control* / E. Lysenko, A. Rogachev, O. Starý (eds.). Cham : Springer, 2023. V. 433. doi: 10.1007/978-3-030-99060-2_7
3. Попов И.П. Реактансы и сассептансы механических систем // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2021. № 70. С. 64–75. doi: 10.17223/19988621/70/6.
4. Попов И.П. Символическое представление вынужденных колебаний разветвленных механических систем // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2021. № 72. С. 118–130. doi: 10.17223/19988621/72/10
5. Алифов А.А., Фарзалиев М.Г. О расчете методом линеаризации взаимодействия параметрических и автоколебаний при запаздывании и ограниченном возбуждении // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2020. № 68. С. 41–52. doi: 10.17223/19988621/68/4
6. Антонов Е.А., Меркурьев И.В., Подалков В.В. Влияние нелинейной жесткости упругих элементов на динамику двухмассового микромеханического гироскопа L-L-типа в режиме вынужденных колебаний // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2019. № 57. С. 53–61. doi: 10.17223/19988621/57/4
7. Журавлев В.Ф., Бальмонт В.Б. *Механика шарикоподшипников гироскопов* / под ред. Д.М. Климова. М. : Машиностроение, 1985.
8. Дмитриев В.С., Миньков Л.Л., Костюченко Т.Г., Дердященко В.В., Панфилов Д.С., Ермаков Д.В. Минимизация виброактивности малошумных вентиляторов // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2022. № 76. С. 101–117. doi: 10.17223/19988621/76/8
9. Ermakov D., Dmitriev V. Solid State Damper Based on Foam Aluminum to Reduce Vibration Activity of Electromechanical Devices // *Recent Developments in the Field of Non-Destructive Testing, Safety and Materials Science. ICMTNT 2021. Studies in Systems, Decision and Control* / E. Lysenko, A. Rogachev, O. Starý (eds.). Cham : Springer, 2023. V. 433. doi: 10.1007/978-3-030-99060-2_8.
10. Zaccardo V.M., Buckner G.D. Active magnetic dampers for controlling lateral rotor vibration in high-speed rotating shafts // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2021. V. 152. Art. 107445. doi: 10.1016/j.ymssp.2020.107445

11. Yang D., Zhu Y., Xie X., Zhang Z. Active vibration suppression at bearing pedestals in an elastically supported shafting system via non-contact electromagnetic actuators // *Journal of Vibration and Control*. 2022. V. 29 (19-20). doi: 10.1177/10775463221122119
12. Liu N., Li C., Yin C., Dong X., Hua H. Application of a dynamic antiresonant vibration isolator to minimize the vibration transmission in underwater vehicles // *Journal of Vibration and Control*. 2018. V. 24 (17). P. 3819–3829. doi: 10.1177/1077546317711538

References

1. Qu Y., Su J., Hua H., Meng G. (2017) Structural vibration and acoustic radiation of coupled propeller-shafting and submarine hull system due to propeller forces. *Journal of Sound and Vibration*. 401. pp. 76–93. doi: 10.1016/j.jsv.2017.03.034
2. Korovin G., Gavrilin A., Petrushin S., Odnokopylov G., Ermakov D. (2023) Improving the Surface of Titanium Alloys with Wave Cutters. In: *Recent Developments in the Field of Non-Destructive Testing, Safety and Materials Science. ICMTNT 2021. Studies in Systems, Decision and Control*. Springer. 433. doi: 10.1007/978-3-030-99060-2_7
3. Popov I.P. (2021) Reaktansy i sasseptansy mekhanicheskikh sistem [Reactances and susceptances of mechanical systems]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 70. pp. 64–75. doi: 10.17223/19988621/70/6
4. Popov I.P. (2021) Simvolicheskoe predstavlenie vynuzhdennykh kolebaniy razvetvlyennykh mekhanicheskikh sistem [Symbolic representation of forced oscillations of branched mechanical systems]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 72. pp. 118–130. doi: 10.17223/19988621/72/10
5. Alifov A.A., Farzaliev M.G. (2020) O raschete metodom linearizatsii vzaimodeystviya parametricheskikh i avtokolebaniy pri zapazdyvanii i ogranichenom возбуждении [On the calculation by the method of linearization of the interaction of parametric and self-oscillations at delay and limited excitation]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 68. pp. 41–52. doi: 10.17223/19988621/68/4
6. Antonov E.A., Merkur'ev I.V., Podalkov V.V. (2019) Vliyaniye nelineynoy zhestkosti uprugikh elementov na dinamiku dvukhmassovogo mikromekhanicheskogo giroskopa L-L-tipa v rezhime vynuzhdennykh kolebaniy [Influence of nonlinear rigidity of elastic elements on the L–L type two-mass micromechanical gyroscope dynamics in a forced-oscillation regime]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 57. pp. 54–62. doi: 10.17223/19988621/57/4
7. Zhuravlyov V.F., Bal'mont V.B. (1985) *Mekhanika sharikopodshipnikov giroskopov* [Mechanics of ball bearings in gyroscopes]. Moscow: Mashinostoenie.
8. Dmitriev V.S., Minkov L.L., Kostyuchenko T.G., Derdiyashchenko V.V., Panfilov D.S., Ermakov D.V. (2022) Minimizatsiya vibroaktivnosti maloshumnykh ventilyatorov [Minimizing vibration of low-noise fans]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 76. pp. 101–117. doi: 10.17223/19988621/76/8
9. Ermakov D., Dmitriev V. (2023) Solid State Damper Based on Foam Aluminum to Reduce Vibration Activity of Electromechanical Devices. In: *Recent Developments in the Field of Non-Destructive Testing, Safety and Materials Science. ICMTNT 2021. Studies in Systems, Decision and Control*. Springer. 433. doi: 10.1007/978-3-030-99060-2_8
10. Zaccardo V.M., Buckner G.D. (2021) Active magnetic dampers for controlling lateral rotor vibration in high-speed rotating shafts. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 152. Article 107445. doi: 10.1016/j.ymssp.2020.107445

11. Yang D., Zhu Y., Xie X., Zhang Z. (2022) Active vibration suppression at bearing pedestals in an elastically supported shafting system via non-contact electromagnetic actuators. *Journal of Vibration and Control*. 29(19–20). doi: 10.1177/10775463221122119
12. Liu N., Li C., Yin C., Dong X., Hua H. (2018) Application of a dynamic antiresonant vibration isolator to minimize the vibration transmission in underwater vehicles. *Journal of Vibration and Control*. 24(17). pp. 3819–3829. doi: 10.1177/1077546317711538

Сведения об авторах:

Дмитриев Виктор Степанович – доктор технических наук, профессор, Томск, Россия. E-mail: dmitriev@tpu.ru

Миньков Леонид Леонидович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математической физики Томского государственного университета, Томск, Россия. E-mail: lminkov@ftf.tsu.ru

Ермаков Дмитрий Владимирович – кандидат технических наук, ассистент отделения машиностроения Инженерной школы новых производственных технологий Томского политехнического университета, Томск, Россия. E-mail: dvermakov@tpu.ru

Моховиков Алексей Александрович – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой – руководитель отделения машиностроения на правах кафедры Инженерной школы новых производственных технологий Томского политехнического университета, Томск, Россия. E-mail: mohovikov@tpu.ru

Шпильной Виктор Юрьевич – кандидат технических наук, научный сотрудник Лаборатории лазерной вибродиагностики материалов Центра промышленной томографии Инженерной школы неразрушающего контроля и безопасности Томского политехнического университета (Томск, Россия). E-mail: vshpilnoy@list.ru

Беликов Ростислав Константинович – аспирант, инженер Лаборатории лазерной вибродиагностики материалов Центра промышленной томографии Инженерной школы неразрушающего контроля и безопасности Томского политехнического университета (Томск, Россия). E-mail: rkb3@tpu.ru

Information about the authors:

Dmitriev Viktor S. (Doctor of Technical Sciences, Professor, Tomsk, Russian Federation). E-mail: dmitriev@tpu.ru

Minkov Leonid L. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: lminkov@ftf.tsu.ru

Ermakov Dmitry V. (Candidate of Technical Sciences, Assistant, Engineering School of New Production Technologies of the Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: dvermakov@tpu.ru

Mokhovikov Aleksey A. (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Head of the Department, Engineering School of New Production Technologies of the Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: mohovikov@tpu.ru

Shpil'noi Viktor Yu. (Candidate of Technical Sciences, researcher at the laboratory "Laser Vibrodiagnostics of materials" Center of industrial tomography School of Nondestructive Testing & Security of Tomsk Polytechnic University). E-mail: vshpilnoy@list.ru

Belikov Rostislav K. (PhD student, engineer at the laboratory "Laser Vibrodiagnostics of materials" Center of industrial tomography School of Nondestructive Testing & Security of Tomsk Polytechnic University). E-mail: rkb3@tpu.ru

Статья поступила в редакцию 20.11.2023; принята к публикации 10.04.2024

The article was submitted 20.11.2023; accepted for publication 10.04.2024