

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/88/9

Коэффициенты электромагнитных связанностей композита «пьезоэлектрик / феррит» с учетом реальной структуры и начальных напряжений

Андрей Анатольевич Паньков

*Пермский национальный исследовательский университет,
Пермь, Россия, a_a_pankov@mail.ru*

Аннотация. Получены новые уточненные аналитические решения для тензоров эффективных пиро-электро-магнито-упругих свойств пьезоактивного композита при наличии начального напряженно-деформированного состояния (как результата начального нагружения) с учетом реального вида двухточечных корреляционных функций нерегулярной квазипериодической случайной структуры. Представлены результаты расчета эффективных коэффициентов электромагнитной и магнито-электрической связанностей трансверсально-изотропного однонаправленного волокнуистого композита «PZT-4 / феррит» при осесимметричном тензоре начальной деформации композита. Выявлено увеличение абсолютных значений этих эффективных коэффициентов при отрицательных (сжимающих) значениях компонентов тензора начальной деформации композита.

Ключевые слова: композит, эффективные свойства, начальное напряженное состояние, электромагнитоупругость, пьезоэффект, магнитострикция, численное моделирование

Благодарности: Результаты получены при выполнении государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации на выполнение фундаментальных научных исследований (проект № FSNM-2023-0006).

Для цитирования: Паньков А.А. Коэффициенты электромагнитных связанностей композита «пьезоэлектрик / феррит» с учетом реальной структуры и начальных напряжений // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 88. С. 111–123. doi: 10.17223/19988621/88/9

Original article

Electromagnetic coupling coefficients of “piezoelectric / ferrite” composite accounting for the real structure and initial stresses

Andrey A. Pan'kov

*Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation,
a_a_pankov@mail.ru*

Abstract. New improved analytical solutions are obtained for tensors of effective pyro-electro-magneto-elastic properties of a piezoactive composite at initial stress-strain state

(resulting from initial loading) that account for real two-point correlation functions of an irregular quasi-periodic random structure. The calculations of effective coefficients of electromagnetic and magnetoelectric coupling of the transversal isotropic unidirectional fibrous composite "PZT-4/ferrite" with an axisymmetric tensor of initial strain of the composite are presented. An increase in the absolute values of the effective coefficients is observed at negative (compressive) values of the initial strain tensor components of the composite.

Keywords: composite, effective properties, initial stress state, electromagnetic elasticity, piezoeffect, magnetostriction, numerical modeling

Acknowledgments: The results of this study were obtained within the framework of the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. FSNM-2023-0006).

For citation: Pan'kov, A.A. (2024) Electromagnetic coupling coefficients of "piezoelectric / ferrite" composite accounting for the real structure and initial stresses. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 88. pp. 111–123. doi: 10.17223/19988621/88/9

Введение

Изучение закономерностей и эффектов влияния начального напряженного состояния элементов структуры материала на особенности его последующего нагружения – одна из современных задач механики композитов [1–7]. Для решения этой задачи успешно апробирован «линеаризованный подход» с использованием линеаризованных уравнений теории упругости [1–4] и магнитоэлектрoупругости [5–7]. При этом актуальным остается нахождение уточненных решений связанных краевых задач механики пьезоактивных композитов с комплексным учетом статистического характера взаимного расположения элементов структуры, взаимодействия связанных электрических, магнитных и деформационных полей [8–11] и наличием начального напряженного состояния $\zeta_0 \equiv \{\sigma^0, \mathbf{D}^0, \mathbf{B}^0\}$ в виде начальных напряжений σ^0 , электрической $\mathbf{D}^0$ и магнитной $\mathbf{B}^0$ индукций.

Постановка задачи

Рассмотрим представительную область $\mathbf{V}$ композита с нерегулярной «квази-периодической» структурой (рис. 1) при наличии в ней начального равновесного электромагнитоупругого состояния ζ_0 и выполнении известных [5–8] физических соотношений

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijmn} \varepsilon_{mn} - e_{nij} E_n - h_{nij} H_n - \beta_{ij} \Theta, \\ D_i &= e_{imn} \varepsilon_{mn} + \lambda_{in} E_n + \pi_i \Theta, \quad B_i = h_{imn} \varepsilon_{mn} + \mu_{in} H_n + \vartheta_i \Theta \end{aligned} \quad (1)$$

для элементов структуры, свойства которых характеризуются совокупностью тензорных величин $\mathbf{A}_f \equiv \{\mathbf{C}_f, \mathbf{e}_f, \mathbf{h}_f, \boldsymbol{\lambda}_f, \boldsymbol{\mu}_f, \boldsymbol{\beta}_f, \boldsymbol{\pi}_f, \boldsymbol{\vartheta}_f\}$ для каждой из фаз, $f = 1, 2$.

При этом на «макроуровне» композита имеем

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \rangle &= C_{ijmn}^* \langle \varepsilon_{mn} \rangle - e_{(s)nij}^* \langle E_n \rangle - h_{(s)nij}^* \langle H_n \rangle - \beta_{ij}^* \Theta, \\ \langle D_i \rangle &= e_{(D)imn}^* \langle \varepsilon_{mn} \rangle + \lambda_{in}^* \langle E_n \rangle + \chi_{in}^* \langle H_n \rangle + \pi_i^* \Theta, \\ \langle B_i \rangle &= h_{(B)imn}^* \langle \varepsilon_{mn} \rangle + \mu_{in}^* \langle H_n \rangle + \kappa_{in}^* \langle E_n \rangle + \vartheta_i^* \Theta \end{aligned} \quad (2)$$

для макроскопических величин тензоров напряжений $\langle \sigma \rangle$, деформаций $\langle \varepsilon \rangle$, векторов индукций и напряженностей электрического $\langle \mathbf{D} \rangle$, $\langle \mathbf{E} \rangle$ и магнитного $\langle \mathbf{B} \rangle$, $\langle \mathbf{H} \rangle$ полей с использованием совокупности эффективных характеристик $\mathbf{A}^* \equiv \{\mathbf{C}^*, \dots, \mathbf{\kappa}^*, \mathbf{\chi}^*\}$, где $\mathbf{\kappa}^*$, $\mathbf{\chi}^*$ – искомые тензоры электромагнитной и магнитоэлектрической связанности композита:

$$\|\mathbf{\kappa}_{ij}^*\| = \begin{bmatrix} \kappa_{11}^* & \kappa_{12}^* & 0 \\ -\kappa_{12}^* & \kappa_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33}^* \end{bmatrix}, \quad \|\mathbf{\chi}_{ij}^*\| = \begin{bmatrix} \chi_{11}^* & \chi_{12}^* & 0 \\ -\chi_{12}^* & \chi_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33}^* \end{bmatrix}. \quad (3)$$

При этом в отсутствие начального напряженного состояния выполняется равенство $\chi_{ij}^* = \kappa_{ji}^*$. Здесь Θ – приращение температуры при однородном нагреве, оператор $\langle \dots \rangle = 1/V \int_V \dots d\mathbf{r}$.

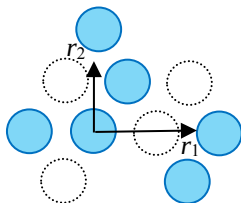


Рис. 1. Квазипериодическая монодисперсная случайная структура
Fig. 1. Quasi-periodic monodisperse random structure

При электромеханическом нагружении композита в области $\mathbf{V}$ возникают дополнительные поля (1) напряжений σ и индукций $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, которые удовлетворяют уравнениям равновесия и непрерывности [1–7]

$$(\sigma_{ij} + \sigma_{kj}^0 u_{i,k}),_{,j} = 0, \quad (D_j + D_k^0 u_{j,k}),_{,j} = 0, \quad (B_j + B_k^0 u_{j,k}),_{,j} = 0 \quad (4)$$

с учетом поправок (дополнительных слагаемых), обусловленных наличием заданных начальных полей σ^0 , $\mathbf{D}^0$, $\mathbf{B}^0$ и искомого поля перемещений $\mathbf{u}$. Первое уравнение в (4) может быть преобразовано к виду $\sigma_{ij,j} + \sigma_{kj}^0 u_{i,k,j} = 0$ с учетом выполнения уравнений равновесия $\sigma_{kj,j}^0 = 0$.

Метод корреляционных составляющих

Корреляционный анализ структур

Рассматриваем статистически однородную случайную двухфазную монодисперсную структуру типа «включения / матрица» с квазипериодическим (КП) взаимным расположением включений в виде однонаправленных волокон (см. рис. 1) в представительной области $\mathbf{V}$ композита, которую описываем индикаторной случайной функцией $i_1(\mathbf{r})$ включений (1-й фазы), равной значениям 1 и 0 соответственно с вероятностями v_1 , $1-v_1$ в любой точке $\mathbf{r} \in \mathbf{V}$. Величина $v_1 = \langle i_1 \rangle$ – одноточечный статистический момент в произвольной точке $\mathbf{r} \in \mathbf{V}$, который равен значению относительного объемного содержания включений v_1 в композите.

Особенности случайного взаимного расположения включений (волокон) в области $\mathbf{V}$ описываем нормированной корреляционной (двухточечной) функцией $k_{11}(\mathbf{p}) = \langle i_1'(\mathbf{r})i_1'(\mathbf{r}_1) \rangle / D_{11}$ с учетом статистической однородности, где дисперсия $D_{11} \equiv \langle i_1'^2 \rangle = v_1(1 - v_1)$, поле пульсаций $i_1'(\mathbf{r}) = i_1(\mathbf{r}) - v_1$, вектор разности $\mathbf{p} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}$, расстояние $\rho = |\mathbf{p}|$ между точками $\mathbf{r}, \mathbf{r}_1 \in \mathbf{V}$, $p_0 = v_1/v_{1\max}$ – вероятность появления волокна в типичной ячейке КП-структуры (см. рис. 1). Предельно допустимое значение $v_{1\max} \approx 0.717$ имеем для рассматриваемого случая значения $\delta/R = 0.25$ минимальной прослойки δ между волокнами, где R – радиус поперечного сечения волокон.

В качестве начального приближения метода корреляционных составляющих [8] используем решение для полидисперсной матричной КП-структуры (рис. 2, а), коррелированной с заданной монодисперсной КП-структурой (см. рис. 1). Полидисперсная КП-структура (см. рис. 2, а) состоит из однотипных составных ячеек (как и традиционная «некоррелированная» полидисперсная структура [9]), и решение задачи эффективного модуля для этой структуры совпадает с известным решением на одиночной составной ячейке. В корреляционном приближении решение задачи эффективного модуля выражается через специальную нормированную корреляционную функцию включений

$$\tilde{k}_{11}(\mathbf{p}) = \langle i_1'(\mathbf{r})i_1''(\mathbf{r}_1) \rangle / D_{11}, \quad (5)$$

где $i_1'(\mathbf{r})$ – пульсации индикаторной КП-функции $i_1(\mathbf{r})$ матричной монодисперсной структуры (см. рис. 1), а $i_1''(\mathbf{r}) \equiv i_1(\mathbf{r}) - i_1^1(\mathbf{r})$ – отклонения ее значений от индикаторной функции $i_1^1(\mathbf{r})$ матричной полидисперсной КП-структуры (см. рис. 2, а), $D_{11} = v_1(1 - v_1)$ – дисперсия при одинаковых значениях объемной доли включений v_1 для различных структур (см. рис. 1, 2).

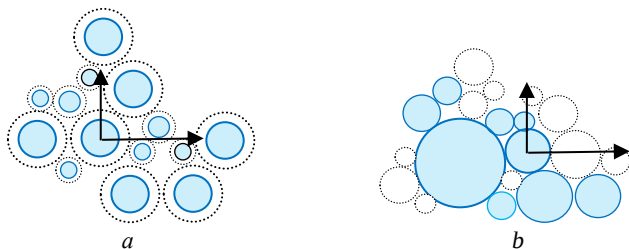


Рис. 2. Вспомогательные полидисперсные «матричная» (а) и «кластерная» (b) случайные структуры

Fig. 2. Subsidiary polydisperse (a) “matrix” and (b) “cluster” random structures

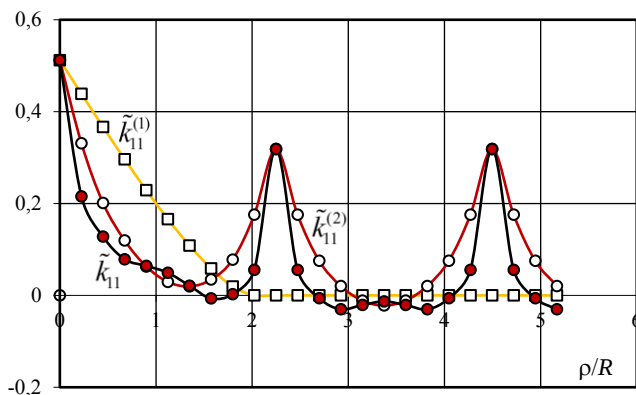
На рис. 3, а даны графики действительной корреляционной функции $\tilde{k}_{11}(\mathbf{p})$ (5) и ее аппроксимаций

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{11}^{(1)}(\mathbf{p}) &= (1 - p_1)k_{11}^{\text{II}}(\mathbf{p}), \\ \tilde{k}_{11}^{(2)}(\mathbf{p}) &= p_{\Delta}k_{11}^{\text{I}}(\mathbf{p}) + (1 - p_1 - p_{\Delta})k_{11}^{\text{II}}(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (6)$$

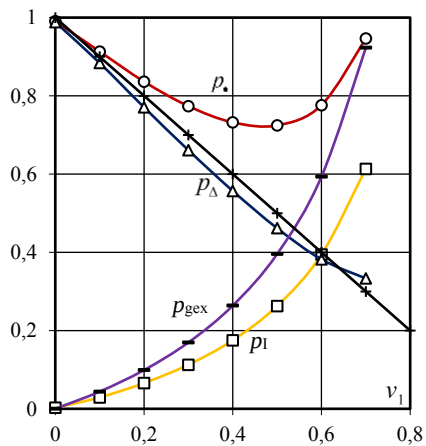
для двух последовательных приближений при значениях $\delta = 0.25R$ минимальной толщины гарантированной прослойки матрицы между соседними волокнами

(с радиусом поперечного сечения R) монодисперсной КП-структуры (см. рис. 1), где индексы «I» и «II» указывают на принадлежность к полидисперсным структурам (см. рис. 2, a , b) соответственно. Здесь $p_1 \equiv \langle i_1^{i_1'} \rangle / D_{11}$ – коэффициент корреляции двух структур (см. рис. 1, 2, a), который рассчитывается через корреляционный $\langle i_1^{i_1'} \rangle = v_{11} - v_1^2$ и смешанный начальный $v_{11} \equiv \langle i_1 i_1^I \rangle = p_1 v_1 v_{1\max}$ одно- точечные моменты по формуле

$$p_1 \equiv \frac{v_{11} - v_1^2}{v_1(1 - v_1)} = \frac{p_1 v_{1\max} - v_1}{1 - v_1}. \quad (7)$$



a



b

Рис. 3. Реальная корреляционная функция $\tilde{k}_{11}$ (●) с аппроксимациями $\tilde{k}_{11}^{(1)}$ (□), $\tilde{k}_{11}^{(2)}$ (○) (a), начальный p_1 (□), поправочный p_Δ (Δ) с линейной аппроксимацией (+) и результирующий p_* (○) коэффициенты корреляции (b)

Fig. 3. (a) Real correlation function $\tilde{k}_{11}$ (●) with approximations $\tilde{k}_{11}^{(1)}$ (□), $\tilde{k}_{11}^{(2)}$ (○) and the (b) initial p_1 (□), correction p_Δ (Δ) with linear approximation (+), and resulting p_* (○) correlation coefficients

Значение поправки p_Δ в разложении (6) определяется из условия наилучшего приближения аппроксимации $\tilde{k}_{11}^{(2)}(\rho)$ к действительному виду корреляционной функции $\tilde{k}_{11}(\rho)$ (5). На рис. 3,б даны графики зависимостей коэффициента корреляции p_I , поправки p_Δ и результирующего коэффициента корреляции

$$p_\bullet = p_I + p_\Delta \quad (8)$$

от относительного объемного содержания включений v_1 в композите. Для рассматриваемых структур (рис. 1, рис. 2) выявлена практически близкая к линейной зависимость величины поправки $p_\Delta \approx 1 - v_1$ от значений v_1 , т.е. имеем приближенное равенство

$$p_\bullet \approx 1 - v_1 + p_I = 1 - v_1 + \frac{p_\circ v_{1\max} - v_1}{1 - v_1}$$

с учетом формулы (7). На рис. 3,б для сравнения приведен график ранее используемого коэффициента корреляции $p_{\text{гex}}$ как функции от v_1 , найденного при мысленном «наложении» КП-структуры (рис. 1) на идеальную периодическую структуру с гексагональной укладкой волокон. Выявлено, что значения результирующего коэффициента корреляции $p_\bullet$ значительно превышают соответствующие значения $p_{\text{гex}}$ при фиксированной величине объемной доли v_1 .

Эффективные свойства композита

Искомые эффективные характеристики $\mathbf{A}^* \equiv \{\mathbf{C}^*, \dots, \mathbf{\kappa}^*, \mathbf{\chi}^*, \}$ (2), (3) композита (см. рис. 1) в корреляционном приближении [10, 11] допускают представление в виде:

$$\mathbf{A}^* = \langle \mathbf{A} \rangle + \mathbf{F}\{k_{11}\}, \quad (9)$$

где поправки к осредненным значениям $\langle \mathbf{A} \rangle$ рассчитываются через интегродифференциальные операторы $\mathbf{F} \equiv \{\mathbf{F}^c, \dots, \mathbf{F}^k\}$ [7, 8]. В частности, для первого и второго приближений имеем

$$\mathbf{F}\{\tilde{k}_{11}^{(1)}\} = (1 - p_I)\mathbf{F}\{k_{11}^{\text{II}}\}, \quad \mathbf{F}\{\tilde{k}_{11}^{(2)}\} = (1 - p_\bullet)\mathbf{F}\{k_{11}^{\text{II}}\} + p_\Delta \mathbf{F}\{k_{11}^{\text{I}}\} \quad (10)$$

с учетом вида функций $\tilde{k}_{11}^{(1)}(\rho)$, $\tilde{k}_{11}^{(2)}(\rho)$ (6) и результирующего коэффициента корреляции $p_\bullet$ (8). Аналогичные решения $\mathbf{A}^{I*}$, $\mathbf{A}^{II*}$ вида (9) имеем для вспомогательных полидисперсных структур (см. рис. 2):

$$\mathbf{A}^{I*} = \langle \mathbf{A} \rangle + \mathbf{F}\{k_{11}^{\text{I}}\}, \quad \mathbf{A}^{II*} = \langle \mathbf{A} \rangle + \mathbf{F}\{k_{11}^{\text{II}}\}, \quad (11)$$

при этом ранее установлено [8], что искомые $\mathbf{A}^*$ и вспомогательные $\mathbf{A}^{I*}$ тензоры связаны соотношением

$$\mathbf{F}\{\tilde{k}_{11}\} = \mathbf{A}^* - \langle \mathbf{A} \rangle - p_I(\mathbf{A}^{I*} - \langle \mathbf{A} \rangle). \quad (12)$$

Из формул (10) с учетом (11) следуют равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\{\tilde{k}_{11}^{(1)}\} &= (1 - p_I)(\mathbf{A}^{II*} - \langle \mathbf{A} \rangle), \\ \mathbf{F}\{\tilde{k}_{11}^{(2)}\} &= (1 - p_\bullet)(\mathbf{A}^{II*} - \langle \mathbf{A} \rangle) + p_\Delta(\mathbf{A}^{I*} - \langle \mathbf{A} \rangle) \end{aligned} \quad (13)$$

для первого и второго приближений соответственно. В результате, приравняв правые части равенств (12) и (13) в первом и втором приближениях, приходим к искомому решению для эффективных характеристик $\mathbf{A}^* \equiv \{\mathbf{C}^*, \dots, \mathbf{\kappa}^*, \mathbf{\chi}^*\}$ композита (см. рис. 1) в виде формул

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(1)*} &= p_1 \mathbf{A}^{I*} + (1 - p_1) \mathbf{A}^{II*}, \\ \mathbf{A}^{(2)*} &= p_2 \mathbf{A}^{I*} + (1 - p_2) \mathbf{A}^{II*}, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\mathbf{A}^{I*}$, $\mathbf{A}^{II*}$ – эффективные характеристики вспомогательных полидисперсных структур (см. рис. 2) – частные случаи обобщенного сингулярного приближения [7] с учетом начального (электрического, магнитного, упругого) напряженного состояния. Точность полученных решений $\mathbf{A}^*$ (14) подтверждена ранее для случая отсутствия начального напряженного состояния в сравнении с известными точными решениями [8].

Численные результаты

Графики зависимостей «начальных», т.е. при $\zeta_0 = 0$, значений компонентов тензора $\mathbf{\kappa}^{(0)*}$ электромагнитной связанности композита «PZT-4 / феррит» с различными структурами (см. рис. 1, 2) от объемной доли ферритовых волокон v_1 при относительной толщине прослойки $\delta/R = 0.25$ с учетом равенства $\kappa_{ij}^{(0)*} = \chi_{ji}^{(0)*}$ представлены на рис. 4.

На рис. 5–9 приведены графики зависимостей относительных значений эффективных коэффициентов электромагнитной $\kappa_{11,12,33}^*$ и магнитоэлектрической $\chi_{11,12,33}^*$ связанностей от значений компонент $\epsilon_{11}^{0*} = \epsilon_{22}^{0*} \neq 0$ или $\epsilon_{33}^{0*} \neq 0$ осесимметричного тензора начальной макродеформации $\mathbf{\epsilon}^{0*}$ при $\mathbf{E}^{0*} = 0$, $\mathbf{H}^{0*} = 0$ при объемной доле $v_1 = 0.2$. Выполняются равенства $\kappa_{11}^* = \kappa_{22}^*$, $\chi_{11}^* = \chi_{22}^*$, $\kappa_{12}^* = -\kappa_{21}^*$, $\chi_{12}^* = -\chi_{21}^*$, $\kappa_{33}^* = \chi_{33}^*$, при этом имеем $\kappa_{12}^* / \kappa_{12}^{0*} = \kappa_{21}^* / \kappa_{21}^{0*}$, $\chi_{12}^* / \chi_{12}^{0*} = \chi_{21}^* / \chi_{21}^{0*}$ с учетом вида (3).

На рис. 4–9 графики решений для КП-структуры (см. рис. 1) приведены в сравнении с решениями для полидисперсных (I, II) структур (см. рис. 2). Выявлены линейные зависимости относительных значений всех ненулевых компонентов тензоров $\mathbf{\kappa}^*$, $\mathbf{\chi}^*$ от значений ϵ_{11}^{0*} , ϵ_{33}^{0*} осесимметричного тензора начальной макродеформации $\mathbf{\epsilon}^{0*}$ композита (см. рис. 5–9). Выявлено, что для рассматриваемого электромагнитоупругого transversально-изотропного композита «пьезоэлектрик / феррит» тензоры электромагнитной связанности $\mathbf{\kappa}^*$, $\mathbf{\chi}^*$ по-прежнему имеют однотипный вид (3), $\chi_{33}^* = \kappa_{33}^*$, но $\chi_{ij}^* \neq \kappa_{ji}^*$ для различных случаев осесимметричного (по оси r_3) начального деформированного состояния: $\epsilon_{11}^{0*} = \epsilon_{22}^{0*} \neq 0$ или $\epsilon_{33}^{0*} \neq 0$ композита.

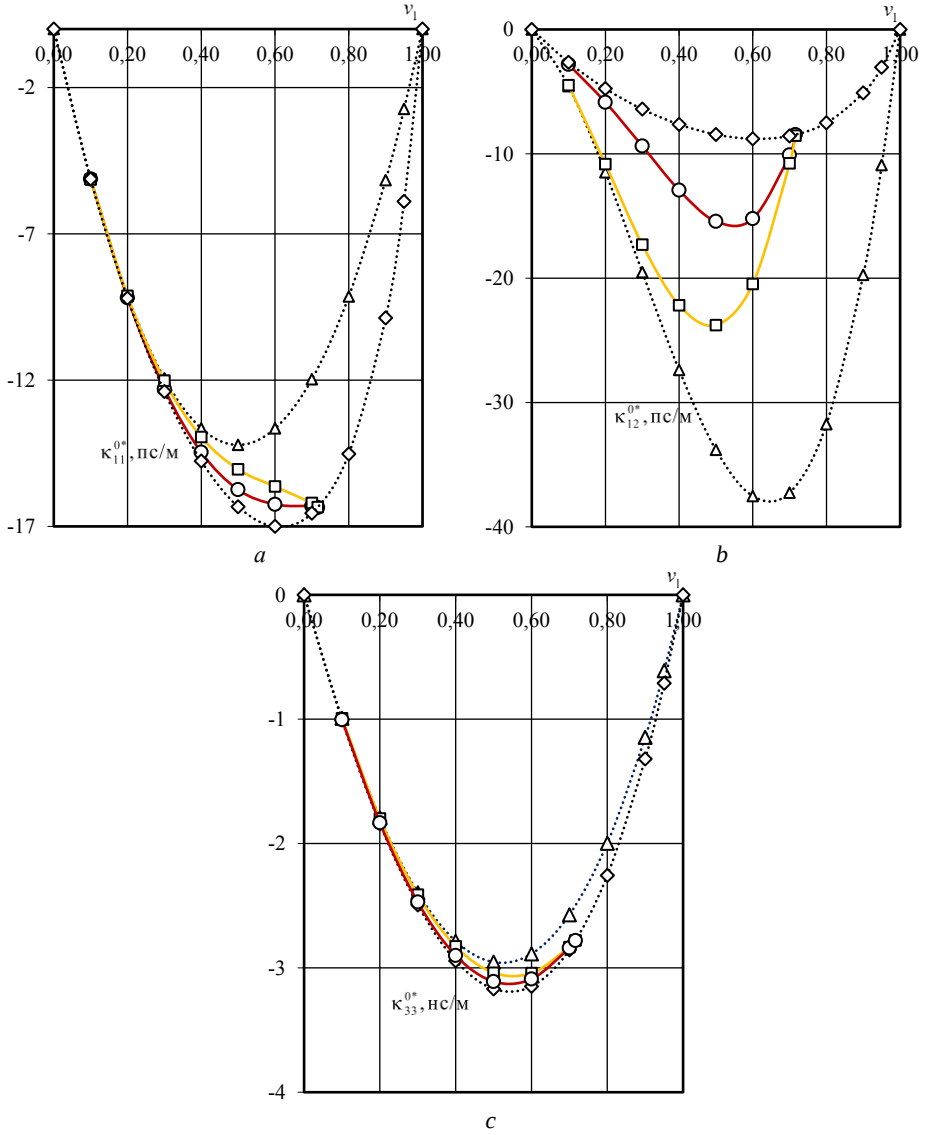


Рис. 4. Начальные ($\zeta_0 = 0$) эффективные коэффициенты $\kappa_{11}^{(0)*} = \chi_{11}^{(0)*}$ (a), $\kappa_{12}^{(0)*} = -\kappa_{21}^{(0)*} = \chi_{21}^{(0)*} = -\chi_{12}^{(0)*}$ (b), $\kappa_{33}^{(0)*} = \chi_{33}^{(0)*}$ (c) композита в зависимости от объемной доли v_1 ферритовых волокон в первом ($\square$) и втором ($\circ$) приближениях, для «матричной» ($\diamond$) и «кластерной» (Δ) полидисперсных структур

Fig. 4. Initial ($\zeta_0 = 0$) effective coefficients of the composite (a) $\kappa_{11}^{(0)*} = \chi_{11}^{(0)*}$, (b) $\kappa_{12}^{(0)*} = -\kappa_{21}^{(0)*} = \chi_{21}^{(0)*} = -\chi_{12}^{(0)*}$, and (c) $\kappa_{33}^{(0)*} = \chi_{33}^{(0)*}$ depending on the volume fraction of ferrite fibers v_1 in the first ($\square$) and second ($\circ$) approximations for the “matrix” ($\diamond$) and “cluster” (Δ) polydisperse structures

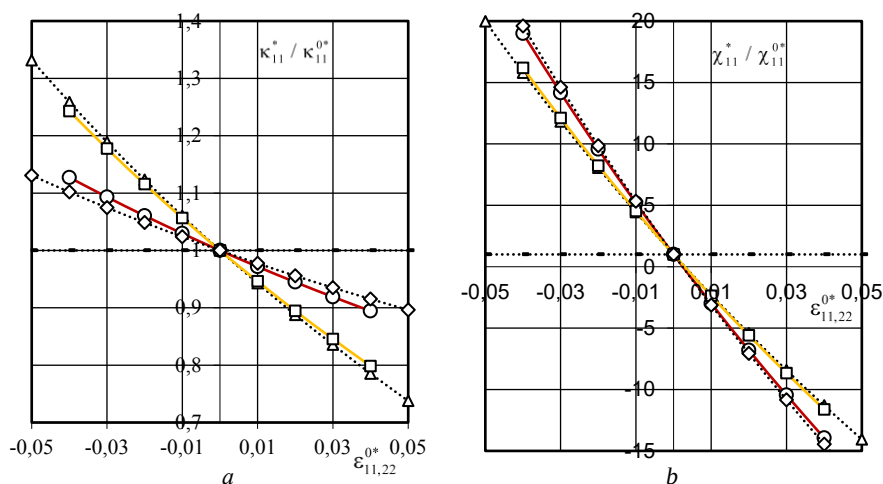


Рис. 5. Эффективные коэффициенты κ_{11}^* (a), χ_{11}^* (b) композита в зависимости от начальной макродеформации $\epsilon_{11,22}^{0*}$ ($\epsilon_{33}^{0*} = 0$) в первом (□) и втором (○) приближениях, для «матричной» (◇) и «кластерной» (Δ) полидисперсных структур, без учета начального напряженного состояния (—)

Fig. 5. Effective coefficients (a) κ_{11}^* and (b) χ_{11}^* of the composite depending on the initial macrostrain $\epsilon_{11,22}^{0*}$ ($\epsilon_{33}^{0*} = 0$) in the first (□) and second (○) approximations for the "matrix" (◇) and "cluster" (Δ) polydisperse structures leaving out of account the initial stress state (—)

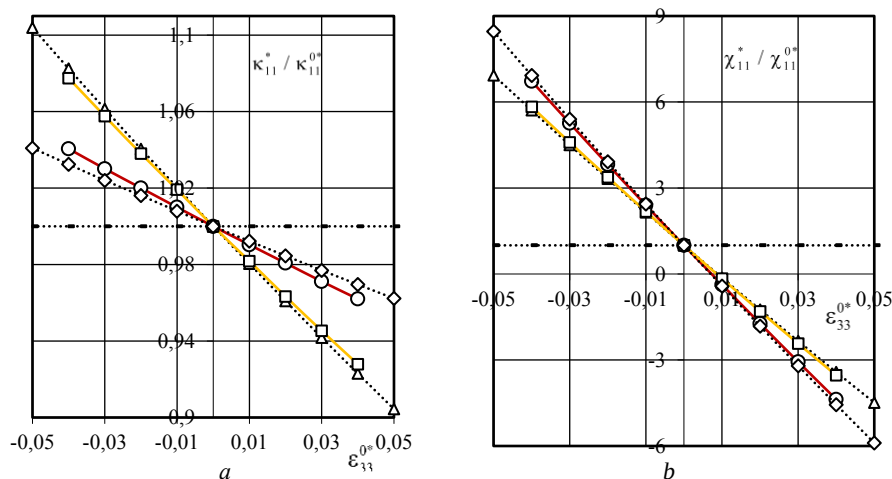


Рис. 6. Эффективные коэффициенты κ_{11}^* (a), χ_{11}^* (b) композита в зависимости от начальной макродеформации ϵ_{33}^{0*} ($\epsilon_{11,22}^{0*} = 0$) в первом (□) и втором (○) приближениях, для «матричной» (◇) и «кластерной» (Δ) полидисперсных структур, без учета начального напряженного состояния (—)

Fig. 6. Effective coefficients (a) κ_{11}^* and (b) χ_{11}^* of the composite depending on the initial macrostrain ϵ_{33}^{0*} ($\epsilon_{11,22}^{0*} = 0$) in the first (□) and second (○) approximations for the "matrix" (◇) and "cluster" (Δ) polydisperse structures leaving out of account the initial stress state (—)

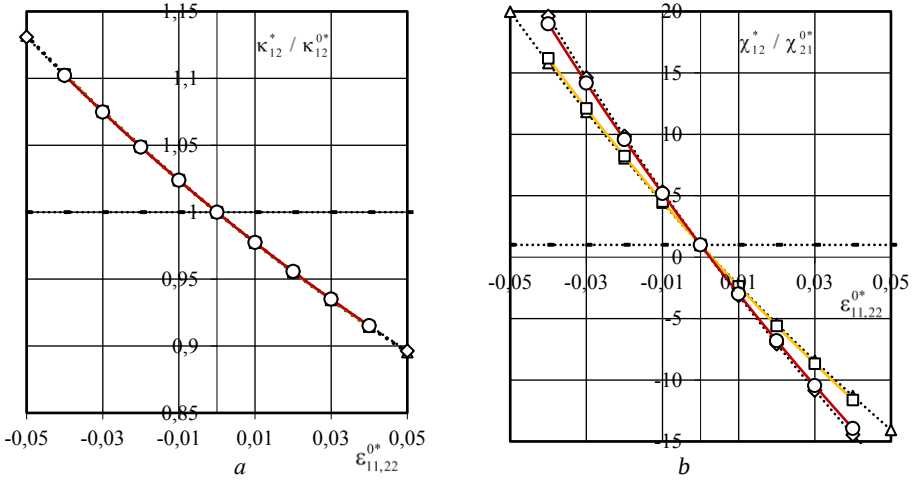


Рис. 7. Эффективные коэффициенты κ_{12}^* (a), χ_{12}^* (b) композита в зависимости от начальной макродеформации $\varepsilon_{11,22}^{0*}$ ($\varepsilon_{33}^{0*} = 0$) в первом ($\square$) и втором ($\circ$) приближениях, для «матричной» ($\diamond$) и «кластерной» (Δ) полидисперсных структур, без учета начального напряженного состояния (—)

Fig. 7. Effective coefficients (a) κ_{12}^* and (b) χ_{12}^* of the composite depending on the initial macrostrain $\varepsilon_{11,22}^{0*}$ ($\varepsilon_{33}^{0*} = 0$) in the first ($\square$) and second ($\circ$) approximations for the “matrix” ($\diamond$) and “cluster” (Δ) polydisperse structures leaving out of account the initial stress state (—)

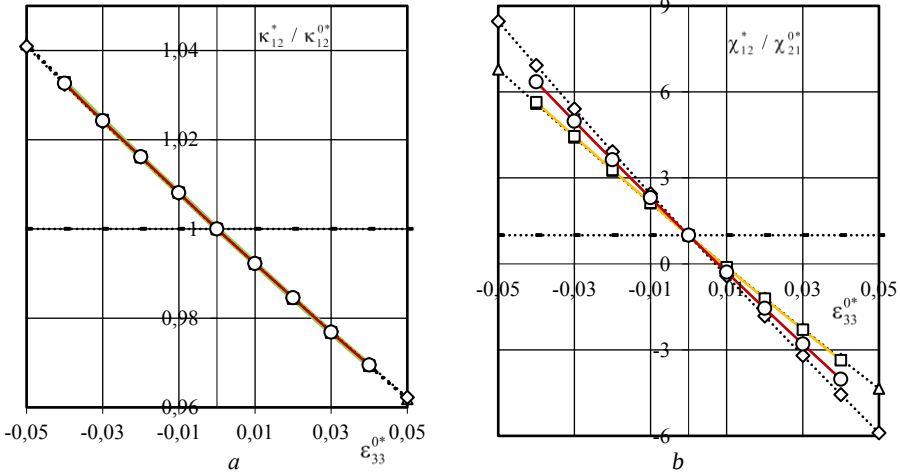


Рис. 8. Эффективные коэффициенты κ_{12}^* (a), χ_{12}^* (b) композита в зависимости от начальной макродеформации ε_{33}^{0*} ($\varepsilon_{11,22}^{0*} = 0$) в первом ($\square$) и втором ($\circ$) приближениях, для «матричной» ($\diamond$) и «кластерной» (Δ) полидисперсных структур, без учета начального напряженного состояния (—)

Fig. 8. Effective coefficients (a) κ_{12}^* and (b) χ_{12}^* of the composite depending on the initial macrostrain ε_{33}^{0*} ($\varepsilon_{11,22}^{0*} = 0$) in the first ($\square$) and second ($\circ$) approximations for the “matrix” ($\diamond$) and “cluster” (Δ) polydisperse structures leaving out of account the initial stress state (—)

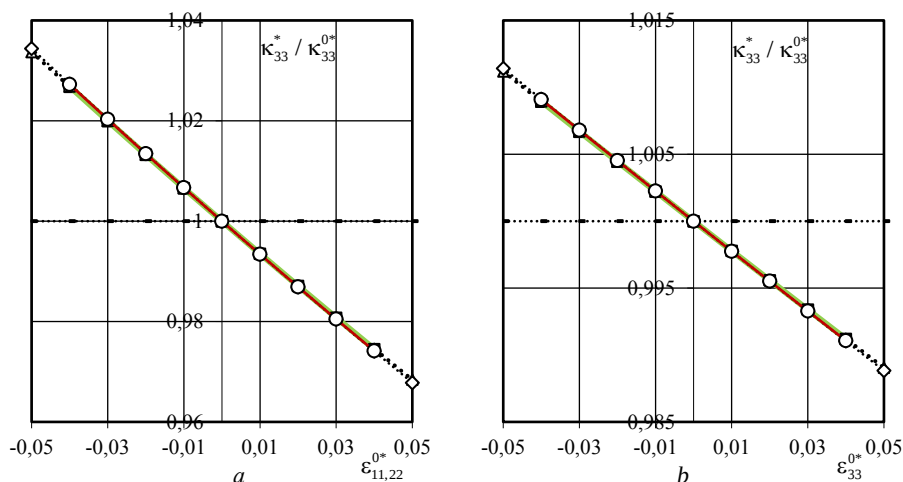


Рис. 9. Эффективный коэффициент $\kappa_{33}^* = \chi_{33}^*$ композита в зависимости от начальной макродеформации $\varepsilon_{11,22}^{0*}$ ($\varepsilon_{33}^{0*} = 0$) (a), ε_{33}^{0*} ($\varepsilon_{11,22}^{0*} = 0$) (b) для случая $\nu_1 = 0.2$ в первом ($\square$) и втором ($\circ$) приближениях, для «матричной» ($\diamond$) и «кластерной» (Δ) полидисперсных структур, без учета начального напряженного состояния (—)

Fig. 9. Effective composite coefficient $\kappa_{33}^* = \chi_{33}^*$ of the composite depending on the initial macrostrain (a) $\varepsilon_{11,22}^{0*}$ ($\varepsilon_{33}^{0*} = 0$) and (b) ε_{33}^{0*} ($\varepsilon_{11,22}^{0*} = 0$) at $\nu_1 = 0.2$ in the first ($\square$) and second ($\circ$) approximations for the “matrix” ($\diamond$) and “cluster” (Δ) polydisperse structures leaving out of account the initial stress state (—)

Заключение

Представлены результаты расчета независимых компонент тензоров эффективных электромагнитной $\mathbf{\kappa}^*$ и магнитоэлектрической $\mathbf{\chi}^*$ связанностей transversально-изотропного однонаправлено-волокнистого композита «PZT-4 / феррит» при осесимметричном тензоре начальной макродеформации $\mathbf{\varepsilon}^{0*}$ композита, когда компоненты $\varepsilon_{11}^{0*} = \varepsilon_{22}^{0*} \neq 0$ и / или $\varepsilon_{33}^{0*} \neq 0$. Выявлено, что при осесимметричном тензоре начальной макродеформации $\mathbf{\varepsilon}^{0*}$ композита тензоры $\mathbf{\kappa}^*$, $\mathbf{\chi}^*$ по-прежнему имеют однотипный вид (3), $\chi_{33}^* = \kappa_{33}^*$, но $\mathbf{\chi}^* \neq \mathbf{\kappa}^{*T}$ для рассмотренных случаев: $\varepsilon_{11}^{0*} = \varepsilon_{22}^{0*} \neq 0$ и / или $\varepsilon_{33}^{0*} \neq 0$ осесимметричного по оси r_3 начального напряженно-деформированного состояния композита. Для всех ненулевых значений компонент тензоров $\mathbf{\kappa}^*$, $\mathbf{\chi}^*$ выявлены (см. рис. 5–9) линейность и монотонно убывающий характер зависимостей относительных величин κ^* / κ^{0*} , χ^* / χ^{0*} от значений начальных осевых макродеформаций $\varepsilon_{11,22}^{0*}$ и / или ε_{33}^{0*} композита с учетом равенств $\kappa^* / \kappa^{0*} = \chi^* / \chi^{0*} = 1$ при $\mathbf{\varepsilon}^{0*} = 0$. Выявлено увеличение абсолютных значений компонент тензоров $\mathbf{\kappa}^*$, $\mathbf{\chi}^*$ рассматриваемых структур (см. рис. 1, 2) композитов при отрицательных значениях компонент ε_{11}^{0*} , ε_{22}^{0*} , ε_{33}^{0*} осесимметричного тензора начальной макродеформации $\mathbf{\varepsilon}^{0*}$ композита, при этом наиболее

существенное влияние имеем, в частности, для компоненты χ_{11}^* (см. рис. 5, b, 6, b). В случае комбинированного начального макродеформирования композита, когда одновременно имеем $\varepsilon_{11,22}^{0*} \neq 0$, $\varepsilon_{33}^{0*} \neq 0$, результирующие значения относительных величин κ^* / κ^{0*} , χ^* / χ^{0*} находим суммированием соответствующих «коэффициентов влияния» κ^* / κ^{0*} , χ^* / χ^{0*} от каждой из компонент $\varepsilon_{11,22}^{0*}$, ε_{33}^{0*} осесимметричного тензора начальной макродеформации ε^{0*} композита.

Список источников

1. Васильду К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М. : Мир, 1987. 542 с.
2. Akbarov S.D. Dynamics of pre-strained bi-material elastic systems: Linearized three-dimensional approach. Springer, 2016. 1004 p.
3. Kolpakov A.G. Effect of inflation of initial stresses on the homogenized characteristics of composite // *Mechanics of materials*. 2005. V. 37 (8). P. 840–854. doi: 10.1016/j.mechmat.2004.08.002
4. Yesil U.B. Forced and natural vibrations of an orthotropic pre-stressed rectangular plate with neighboring two cylindrical cavities // *Computers, Materials & Continua*. 2017. V. 53 (1). P. 1–22. doi: 10.3970/cmc.2017.053.001
5. Guo X., Wei P. Dispersion relations of elastic waves in one-dimensional piezoelectric / piezomagnetic phononic crystal with initial stresses // *Ultrasonics*. 2016. V. 66. P. 72–85. doi: 10.1016/j.ultras.2016.04.025
6. Dasdemir A. Forced vibrations of pre-stressed sandwich plate-strip with elastic layers and piezoelectric core // *International Applied Mechanics*. 2018. V. 54(4). P. 480–493. doi: 10.1007/s10778-018-0901-3
7. Pan'kov A.A. Effect of initial stress state on effective properties of piezocomposite // *Mechanics of Composite Materials*. 2022. V. 58 (5). P. 733–746. doi: 10.1007/s11029-022-10063-w
8. Pan'kov A.A. Pyroelectromagnetic effects of a piezocomposite in the binary refinement of the method of quasi-periodic polydisperse correlation components // *Mechanics of Composite Materials*. 2016. V. 52 (4). P. 535–544. doi: 10.1007/s11029-016-9604-1
9. Кристенсен П. Введение в механику композитов. М. : Мир, 1982. 334 с.
10. Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика деформирования и разрушения структурно неоднородных тел. М. : Наука, 1984. 115 с.
11. Шермергор Т.Д. Теория упругости микрон неоднородных сред. М. : Наука, 1976. 399 с.

References

1. Washizu K. (1982) *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. Oxford: Pergamon Press.
2. Akbarov S.D. (2016) *Dynamics of Pre-trained Bi-Material Elastic Systems: Linearized Three-Dimensional Approach*. Springer.
3. Kolpakov A.G. (2005) Effect of inflation of initial stresses on the homogenized characteristics of composite. *Mechanics of Materials*. 37(8). pp. 840–854. doi: 10.1016/j.mechmat.2004.08.002
4. Yesil U.B. (2017) Forced and natural vibrations of an orthotropic pre-stressed rectangular plate with neighboring two cylindrical cavities. *Computers, Materials & Continua*. 53(1). pp. 1–22. doi: 10.3970/cmc.2017.053.001
5. Guo X., Wei P. (2016) Dispersion relations of elastic waves in one-dimensional piezoelectric / piezomagnetic phononic crystal with initial stresses. *Ultrasonics*. 66. pp. 72–85. doi: 10.1016/j.ultras.2016.04.025

6. Dasdemir A. (2018) Forced vibrations of pre-stressed sandwich plate-strip with elastic layers and piezoelectric core. *International Applied Mechanics*. 54(4). pp. 480–493. doi: 10.1007/s10778-018-0901-3
7. Pan'kov A.A. (2022) Effect of initial stress state on effective properties of piezocomposite. *Mechanics of Composite Materials*. 58(5). pp. 733–746. doi: 10.1007/s11029-022-10063-w
8. Pan'kov A.A. (2016) Pyroelectromagnetic effects of a piezocomposite in the binary refinement of the method of quasi-periodic polydisperse correlation components. *Mechanics of Composite Materials*. 52(4). pp. 535–544. doi: 10.1007/s11029-016-9604-1
9. Kristensen R. (1982) *Vvedenie v mekhaniku kompozitov* [Introduction to mechanics of composite materials]. Moscow: Mir.
10. Sokolkin Yu.V., Tashkinov A.A. (1984) *Mekhanika deformirovaniya i razrusheniya strukturno neodnorodnykh tel* [Mechanics of deformation and destruction of structurally heterogeneous bodies]. Moscow: Nauka.
11. Shermergor T.D. (1976) *Teoriya uprugosti mikroneodnorodnykh sred* [Theory of elasticity of microheterogeneous media]. Moscow: Nauka.

Сведения об авторе:

Паньков Андрей Анатольевич – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры механики композиционных материалов и конструкций Пермского национального исследовательского политехнического университета, Пермь, Россия. E-mail: a_a_pankov@mail.ru

Information about the author:

Pan'kov Andrey A. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation). E-mail: a_a_pankov@mail.ru

Статья поступила в редакцию 22.02.2023; принята к публикации 10.04.2024

The article was submitted 22.02.2023; accepted for publication 10.04.2024