

Научная статья

УДК 539.375

doi: 10.17223/19988621/90/7

К нахождению потока удельной упругой энергии в вершину физического разреза при конечно-элементном решении

Вадим Вадимович Глаголев¹, Андрей Игоревич Лутхов²

^{1,2} Тульский государственный университет, Тула, Россия

¹ vadim@tsu.tula.ru

² tip460@mail.ru

Аннотация. Рассмотрено нагружение трещиноподобного дефекта в виде физического разреза в двухконсольной балке по модам I и II. Значение J -интеграла определялось в виде произведения линейного параметра и среднего значения удельной свободной энергии на тупиковой грани конечного элемента. Представлено сравнение значения J -интеграла, потока удельной упругой энергии в вершину математического разреза и удельной работы узловых сил при удалении тупикового конечного элемента.

Ключевые слова: коэффициент интенсивности напряжений, математический разрез, физический разрез, поток упругой энергии, метод конечных элементов, линейный параметр, J -интеграл, подход Нейбера–Новожилова

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00017, <https://rscf.ru/project/23-21-00017/> в Тульском государственном университете.

Для цитирования: Глаголев В.В., Лутхов А.И. К нахождению потока удельной упругой энергии в вершину физического разреза при конечно-элементном решении // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 90. С. 78–89. doi: 10.17223/19988621/90/7

Original article

On the determination of specific elastic energy flow to the vertex of a physical cut via a finite element solution

Vadim V. Glagolev¹, Andrey I. Lutkhov²

^{1,2} Tula State University, Tula, Russian Federation

¹ vadim@tsu.tula.ru

² tip460@mail.ru

Abstract. The finite element approximation of a double cantilever beam (DCB) specimen with a physical cut in a linear elastic medium is considered. The thickness of the physical cut specifies a linear parameter of the problem. The J -integral is determined as the product

of the linear parameter and the average value of the specific elastic energy on the dead-end edge of the finite element. For the considered loading schemes of the DCB specimen in modes I and II with zero linear parameter set in ANSYS, the stress intensity factors are obtained and used to determine the J -integrals. The convergence of the product of the linear parameter and the average value of the specific elastic energy on the dead-end edge of the finite element to the reference values of the J -integrals is shown for equivalent loading of the specimen with a physical cut and with a linear parameter tending to zero. The specific work of nodal forces is studied during the dead-end finite element removing. The convergence of the specific work of nodal forces when removing the dead-end element by simple unloading of adjacent edges to the value of the reference J -integral is observed.

Keywords: stress intensity factor, mathematical cut, physical cut, elastic energy flow, finite element method, linear parameter, J -integral, Neuber–Novozhilov approach

Acknowledgments: This study was supported by the Russian Science Foundation (project No. 23-21-00017), <https://rscf.ru/project/23-21-00017/> at Tula State University.

For citation: Glagolev, V.V., Lutkhov, A.I. (2024) On the determination of specific elastic energy flow to the vertex of a physical cut via a finite element solution. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 90. pp. 78–89. doi: 10.17223/19988621/90/7

Введение

Решение задач с концентраторами напряжений в виде трещиноподобного дефекта связано с моделью трещины. Для трещины Гриффитса [1, 2] в виде математического разреза в линейно упругой среде решение задачи с сингулярным полем напряжений сопряжено с вычислением коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) [2–4]. В этом случае используются как аналитические, так и численные решения, в том числе полученные методом конечных элементов (МКЭ) [5–7] и граничных элементов [8]. В качестве критериальной характеристики при этом рассматривается поток удельной, отнесенной к единице образуемых поверхностей, упругой энергии в вершину трещины, связанный с J -интегралом [9–11].

Трещина в разрезе с различной формой окончания может быть рассмотрена на разных масштабных уровнях. Толщина дефекта в виде физического разреза или радиус кривизны окончания разреза являются в этом случае естественными линейными параметрами. В работе [12] с помощью методов молекулярной динамики исследовалась трещина нормального отрыва. Показано, что определение критических характеристик задачи сводится к энергетическому критерию Гриффитса как для бездефектных тел, так и для тел с трещинами различной формы на различных масштабных уровнях. Аналогичный результат получен и для модели связей Прандтля [13, 14] для которых начальная длина определяет масштабный уровень трещиноподобного дефекта.

Физический разрез в сплошной среде является источником сингулярности в его угловых точках [15]. Однако конечно-элементное решение задачи с гранью конечного элемента, равного соответствующему вырезу, приводит к конечным напряжениям. Таким образом, напряженное состояние конечного элемента, лежащего на продолжении физического разреза, является регулярным при конечном значении толщины разреза, принимаемой в качестве линейного параметра.

Следуя концепции Нейбера–Новожилова [16–20], в данной работе найдена усредненная удельная, отнесенная к единице объема, свободная энергия по грани окончания физического разреза. Рассмотрены произведения линейного параметра и средней по грани удельной, отнесенной к единице объема, свободной энергии. Показано, что уменьшение линейного параметра приводит к сходимости введенных произведений к значению эталонного J -интеграла, найденного по коэффициенту интенсивности напряжений для схемы с нулевым значением линейного параметра в пакете ANSYS [21].

Следуя концепции удаления конечного элемента простой разгрузкой [22], найдена полная работа узловых сил на перемещениях тупикового элемента. Показана эквивалентность значения эталонного J -интеграла и соответствующей удельной работы при уменьшении значения линейного параметра.

Постановка задачи

На рис. 1 представлены схемы нагружения образца в виде двойной консольной балки (ДКБ), на консоли которого действуют единичные внешние распределенные нагрузки P , со следующими геометрическими и механическими характеристиками: длина образца $l = 0.2$ м, длина трещины $a = l/4$, ширина консоли $h = (b - \delta_0)/2$, ширина ДКБ-образца $b = 2h + \delta_0$, где δ_0 – варьируемая толщина физического разреза, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$. Правый торец ДКБ-образца жестко закреплен от перемещений.

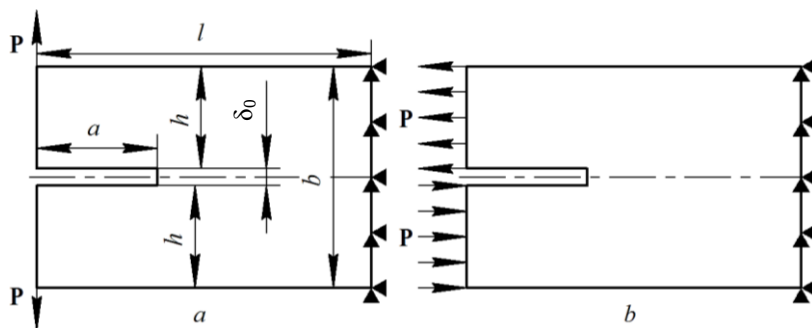


Рис. 1. Модель ДКБ-образца: a – нагрузка, формирующая нормальный разрыв тупикового элемента; b – нагрузка, формирующая поперечный сдвиг тупикового элемента

Fig. 1. Model of a double cantilever beam (DCB): (a) tension and (b) shearing of the dead-end element induced by the load

При $\delta_0 = 0$ модуль внешней нагрузки P (см. рис. 1, a) определяет коэффициент интенсивности напряжений K_I трещины нормального отрыва [2], а в схеме (см. рис. 1, b) – коэффициент интенсивности напряжений K_{II} трещины поперечного сдвига [2]. С помощью комплекса ANSYS вычислены значение КИН соответствующей моды нагружения $K_I(K_{II})$. Результаты расчетов приведены в табл. 1.

Поток удельной упругой энергии в вершину трещины для плоской задачи связан с КИН следующим соотношением [2]:

$$2\gamma_{I(II)} = \alpha K_{I(II)}^2 / E, \quad (1)$$

где $\alpha = 1$ для плоского напряженного состояния; $\alpha = 1 - \nu^2$ для плоского деформированного состояния. Отметим, что в случае обратимого (упругого) деформирования (1) определяет значение J -интеграла [2].

Таблица 1

Расчетные значения КИН

Искомая величина	Значение
Коэффициент интенсивности напряжений K_I , Н/м ^{3/2}	1 294.6
Коэффициент интенсивности напряжений K_{II} , Н/м ^{3/2}	111.75

При дальнейшем изложении без ограничения общности ограничимся случаем плоской деформации. Из (1) находим эталонное численное значение потока энергии в вершину математического разреза. Результаты расчета приведены в табл. 2.

Таблица 2

Расчетные значения потоков упругой энергии

Искомая величина	Значение
Поток упругой энергии $2\gamma_I$, Н/м	$7.63 \cdot 10^{-6}$
Поток упругой энергии $2\gamma_{II}$, Н/м	$5.68 \cdot 10^{-8}$

Пусть в линейно упругом конечно-элементном решении окончание трещины формирует грань прямоугольного конечного элемента $\delta_0 \times \delta_1$ с квадратичными функциями формы. На рис. 2 показан конечный элемент на окончании физического разреза.

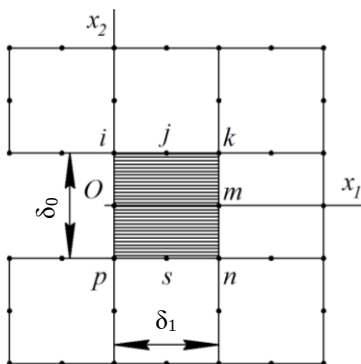


Рис. 2. Конечный элемент на окончании физического разреза

Fig. 2. Finite element at the end of a physical cut

При конечно-элементной аппроксимации геометрии будем требовать выполнения следующего условия: $\delta_1 = \delta_0$.

В случае квазистатического продвижения в упругой среде физического разреза с регулярным полем напряжений в работе [23] показано, что J -интеграл определяется произведением линейного параметра и удельной свободной энергии на торце физического разреза.

Ввиду конечности напряженного состояния конечно-элементного решения при фиксированном разбиении введем в рассмотрение произведение толщины физического разреза и средней удельной свободной энергии концевой грани ip (см. рис. 2) конечного элемента

$$2\bar{\gamma} = \delta_0 \bar{\varphi}, \quad (2)$$

где, исходя из концепции Нейбера–Новожилова, $\bar{\varphi} = 1/\delta_0 \int_{-\delta_0/2}^{\delta_0/2} \varphi dx_2$; $\varphi = 0.5(\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + 2\sigma_{12}\varepsilon_{12})$ – удельная свободная энергия; $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ – компоненты тензора напряжений; $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$ – компоненты тензора деформаций.

Продвижение физического разреза в конечно-элементном решении сопряжено с удалением конечных элементов. Поток удельной упругой энергии, согласно Гриффитсу [1], определяет поверхностную энергию новых материальных поверхностей. Найдем значение соответствующей энергии. Будем считать, что процесс удаления конечного элемента происходит при достижении определенного критерия. Следуя работе [22], рассмотрим исключение элемента в виде простой разгрузки его узловых сил, взаимодействующих с сопряженными элементами. Соответствующие силы для плоского конечного элемента с квадратичными функциями формы показаны на рис. 3.

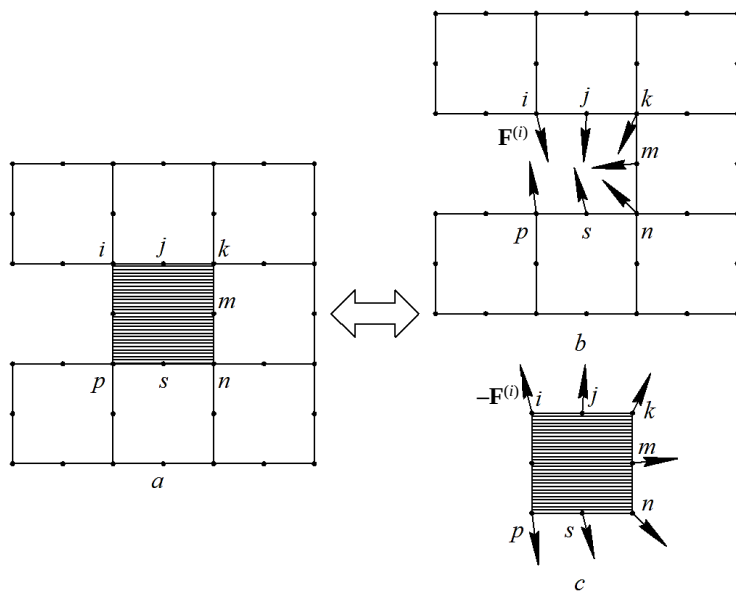


Рис. 3. Взаимодействие конечного элемента со смежными посредством узловых сил
Fig. 3. Interaction of the finite element with adjacent ones through nodal forces

На рис. 3, *b* показано тело без тупикового элемента, но за его присутствие в ансамбле конечных элементов отвечают узловые силы взаимодействия $F^{(e)}, e = i, j, k, m, n, p$. Для моделирования удаления тупикового элемента разгрузим узлы от сил взаимодействия, связывающих тупиковый конечный элемент с телом, при неизменной внешней нагрузке. На рис. 4 продемонстрирована схема разгрузки.

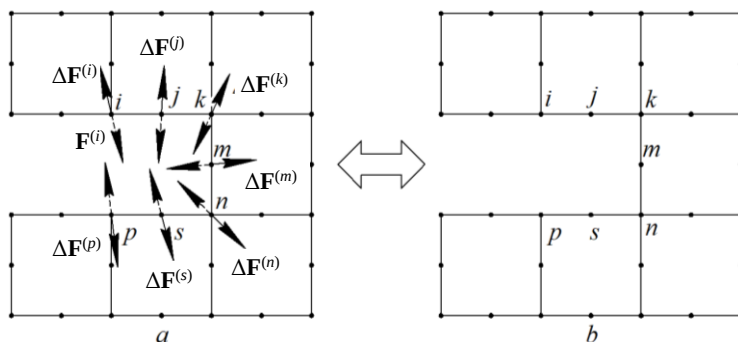


Рис. 4. Разгрузка новых материальных поверхностей

Fig. 4. Unloading of new material surfaces

На рис. 4, а значения $\Delta \mathbf{F}^{(e)}$ устанавливают приращения новой внешней узловой нагрузки. Приращения находятся, исходя из условия $\Delta \mathbf{F}^{(e)} + \mathbf{F}^{(e)} = 0$. Приращение внешней нагрузки при задании $\Delta \mathbf{F}^{(e)}$ предполагается нулевым. Конечная стадия этапа разгрузки показана на рис. 4, б, причем узлы i, j, k, m, n, o, p освобождаются от узловых сил, действовавших на них со стороны исключаемого элемента. Перемещения соответствующих узлов в момент перед удалением тупикового конечного элемента обозначим через $\mathbf{u}^{(e)}$, а в результате разгрузки – через $\mathbf{u}^{1(e)}$. Найдем соответствующую работу узловых сил конечного элемента

$$A = 0.5 \sum_{e=1}^7 \mathbf{F}^{(e)} \cdot \mathbf{u}^{(e)}. \quad (3)$$

Будем считать, что силы $\Delta \mathbf{F}^{(e)}$ завершают процесс исключения элемента, совершая дополнительную работу над его узлами, тогда дополнительную работу определим в следующем виде:

$$A_1 = 0.5 \sum_{e=1}^7 \Delta \mathbf{F}^{(e)} \cdot \mathbf{u}^{1(e)}, \quad (4)$$

где $\cdot$ – скалярное умножение.

Работы (3) и (4) в случае выполнения критерия удаления элемента формируют энергию новых материальных поверхностей. Таким образом, работа на единицу образуемой поверхности будет равна сумме работ (3) и (4), отнесенных к $\delta_1 = \delta_0$ (см. рис. 2):

$$2\hat{\gamma} = (A + A_1) / \delta_0. \quad (5)$$

Рассмотрим связи (2), (5) с (1) для мод нагружения I и II при конечно-элементном решении в комплексе ANSYS.

Нагружение по моде I

На рис. 5 представлена зависимость относительного значения $\gamma_I^* = \bar{\gamma} / \gamma_I$ от относительной величины физического разреза $\bar{\delta}_0 = \delta_0 / h$ при приложении нагрузки $\mathbf{P}$, которая формирует нормальный разрыв тупикового элемента.

На рис. 6 представлена зависимость относительного значения $\tilde{\gamma}_I = \hat{\gamma} / \gamma_I$ от относительной величины физического разреза $\bar{\delta}_0$ при приложении нагрузки $\mathbf{P}$, которая формирует нормальный разрыв тупикового элемента.

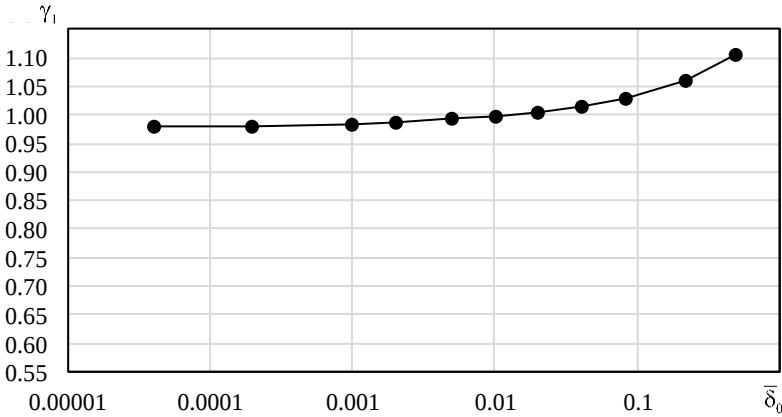


Рис. 5. Зависимость относительного значения потока удельной упругой энергии на грани конечного элемента от относительной толщины физического разреза
Fig. 5. Relative value of specific elastic energy flow on the edge of the finite element as a function of relative thickness of the physical cut

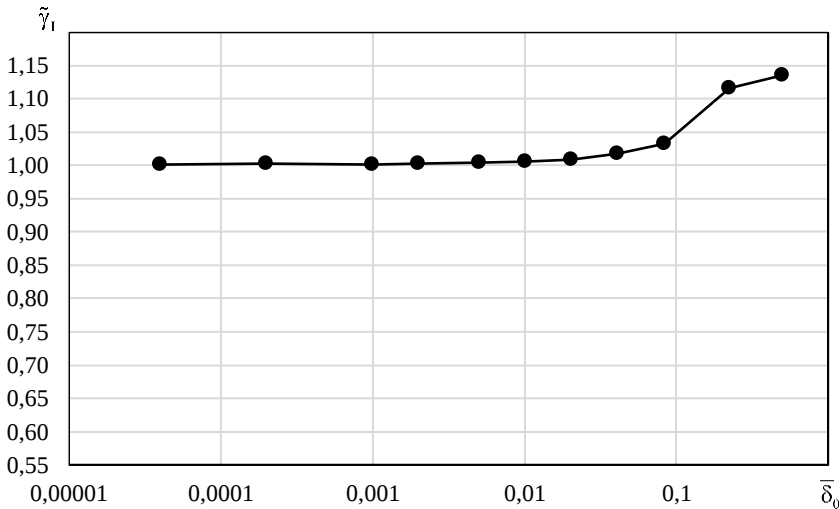


Рис. 6. Зависимость удельной работы узловых сил при удалении тупикового элемента от относительной толщины физического разреза
Fig. 6. Dependence of the specific work of nodal forces on the relative thickness of the physical cut when removing a dead-end element

Для нагружения ДКБ-образца с математическим разрезом по моде I в состоянии плоской деформации известно решение J -интеграла [24]:

$$J = 12(Ph)^2(1 - \nu^2)/(hE)(a/h)^2[1 + 0.673(h/a)]^2. \quad (6)$$

В табл. 3 представлены результаты расчетов потоков удельной упругой энергии по формулам (1), (2), (5), (6), погрешность решений приведена по отношению к значению относительного потока упругой энергии, вычисленному по КИН K_I .

Таблица 3

Результаты расчетов при нагружении по моде I

Решение		Поток удельной упругой энергии $2\gamma_i$, Н/м	Погрешность решений, %
Формула (6)		$7.64 \cdot 10^{-6}$	0.2
Численное	По КИН K_I (1)	$7.63 \cdot 10^{-6}$	–
	По представлению (2)	$7.46 \cdot 10^{-6}$	2.18
	Удельная работа узловых сил при удалении элемента (5)	$7.64 \cdot 10^{-6}$	0.13

Из результатов табл. 3 видно, что выражение (5) при значении относительной толщины физического разреза $\bar{\delta}_0 = 0.00004$ дает более близкое значение к потоку упругой энергии трещины Гриффитса по сравнению с (2).

Нагружение по моде II

На рис. 7 представлена зависимость относительного значения $\gamma_{II}^* = \bar{\gamma} / \gamma_{II}$ от относительной величины физического разреза $\bar{\delta}_0$ при приложении нагрузки P , которая формирует поперечный сдвиг тупикового элемента.

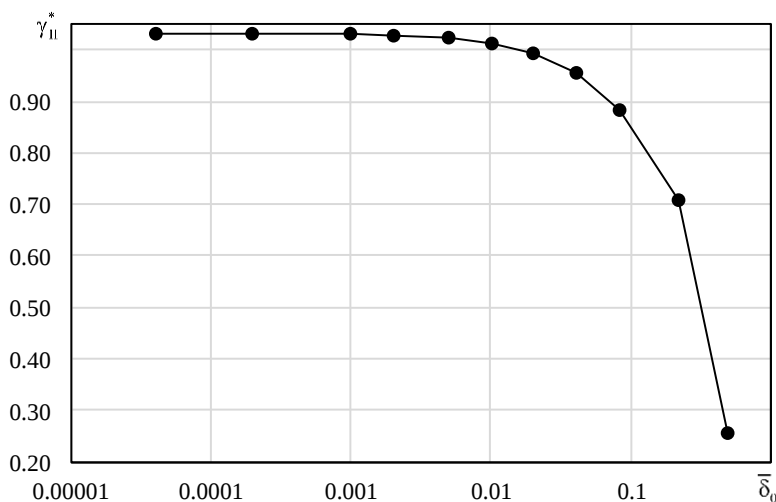


Рис. 7. Зависимость относительного значения потока удельной упругой энергии на грани конечного элемента от относительной толщины физического разреза

Fig. 7. Relative value of specific elastic energy flow on the edge of the finite element as a function of relative thickness of the physical cut

Рисунок 8 демонстрирует зависимость относительного значения $\tilde{\gamma}_{II} = \hat{\gamma} / \gamma_{II}$ от относительной величины физического разреза $\bar{\delta}_0$ при приложении нагрузки P , которая формирует поперечный сдвиг тупикового элемента.

В табл. 4 представлены результаты расчетов потоков удельной упругой энергии по формулам (1), (2), (5), погрешность решений приведена по отношению к значению относительного потока упругой энергии, вычисленному по КИН K_{II} .

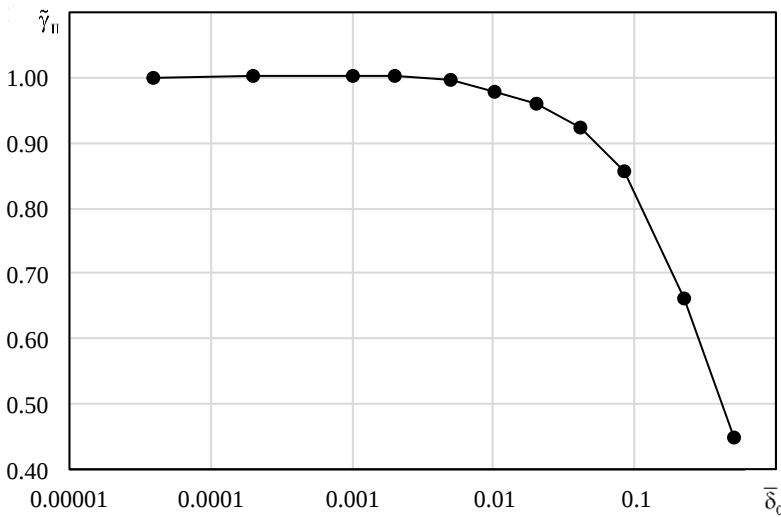


Рис. 8. Зависимость удельной работы узловых сил при удалении тупикового элемента от относительной толщины физического разреза

Fig. 8. Dependence of the specific work of nodal forces on the relative thickness of the physical cut when removing a dead-end element

Таблица 4

Результаты расчетов при нагружении по моде II

Численное решение	Поток удельной упругой энергии $2\gamma_{II}$, Н/м	Погрешность решений, %
По КИН K_{II} (1)	$5.682 \cdot 10^{-8}$	—
По представлению (2)	$5.871 \cdot 10^{-8}$	3.2
Удельная работа узловых сил при удалении элемента (5)	$5.683 \cdot 10^{-8}$	0.02

Из результатов табл. 4 видно, что выражение (5) при значении относительной толщины физического разреза $\bar{\delta}_0 = 0.00004$ при нагружении по моде II, как и в случае моды I, дает более близкое значение к потоку удельной упругой энергии трещины Гриффитса по сравнению с (2) при конечно-элементном решении задачи.

Заключение

На основе концепции J -интеграла и подхода Нейбера–Новожилова для трещиноподобного дефекта в виде физического разреза найден поток удельной упругой энергии в виде произведения длины грани тупикового конечного элемента и ее средней удельной свободной энергии. Для мод нагружения I и II при вырождении физического разреза в математический показана вычислительная сходимость введенного произведения на тупиковой грани конечного элемента к значению, близкому к потоку удельной упругой энергии трещины Гриффитса.

При удалении конечного элемента посредством простой разгрузки узловых сил, взаимодействующих со смежными конечными элементами, показана эквива-

лентность удельной полной работы узловых сил на узловых перемещениях элемента к эталонному значению J -интеграла при стремлении длины его грани к нулевому значению. Показано, что при малых значениях линейного параметра удельная полная работа узловых сил при исключении элемента практически не меняет своего значения. Размер грани тупикового конечного элемента определяет конечно-элементную аппроксимацию, в которой удаление элемента приводит к соизмеримому с математическим разрезом потоком удельной упругой энергии в вершину трещиноподобного дефекта.

Таким образом, по сходимости произведения длины грани тупикового конечного элемента и ее средней удельной свободной энергии или удельной работы узловых сил при удалении тупикового элемента возможно проводить оценку коэффициента интенсивности напряжений для модели трещины в виде математического разреза. При этом результат вычисления посредством удельной работы узловых сил при удалении элемента оказывается более близким к соответствующему коэффициенту.

Список источников

1. Griffith A.A. The phenomena of rupture and flow in solids // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Ser. A.* 1921. V. 221. P. 163–189. doi: 10.1098/rsta.1921.0006
2. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М. : Наука, 1974. 640 с.
3. Мураками Ю. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. М. : Мир, 1990. 1014 с.
4. Малик А.В., Лавит И.М. Метод расчета коэффициента интенсивности напряжений для неподвижной трещины нормального разрыва при динамическом нагружении // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2018. № 54. С. 88–102. doi: 10.17223/19988621/54/8
5. Murakami Y. A simple procedure for the accurate determination of stress intensity factors by finite element method // *Engineering Fracture Mechanics.* 1976. V. 8 (4). P. 643–655. doi: 10.1016/0013-7944(76)90038-2
6. Rybicki E.F., Kanninen M.F. A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral // *Engineering Fracture Mechanics.* 1977. V. 9 (4). P. 931–938. doi: 10.1016/0013-7744(77)90013-3
7. Caicedo J., Portela A. Direct computation of stress intensity factors in finite element method // *European Journal of Computational Mechanics.* 2017. V. 26 (3). P. 309–335. doi: 10.1080/17797179.2017.1354578
8. Tanaka M., Hamada M., Iwata Y. Computation of a two-dimensional stress intensity factor by the boundary element method // *Ingenieur-Archiv.* 1982. V. 52. P. 95–104. doi: 10.1007/BF00536317
9. Cherepanov G.P. Some new applications of the invariant integrals of mechanics // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 2012. V. 76 (5). P. 519–536. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2012.11.014
10. Rice J.R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // *Journal of Applied Mechanics.* 1968. V. 35 (2). P. 379–386. doi: 10.1115/1.3601206
11. Kolednik O., Schöngundner R., Fischer F.D. A new view on J -integrals in elastic-plastic materials // *International Journal of Fracture.* 2014. V. 187 (1). P. 77–107. doi: 10.1007/s10704-013-9920-6
12. Huang K., Shimada T., Ozaki N., Hagiwara Y., Sumigawa T., Guo L., Kitamura T. A unified and universal Griffith-based criterion for brittle fracture // *International Journal of Solids and Structures.* 2017. V. 128. P. 67–72. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2017.08.018

13. Prandtl L., Knauss W.G. A thought model for the fracture of brittle solids // *International Journal of Fracture*. 2011. V. 171 (2). P. 105–109. doi: 10.1007/s10704-011-9637-3
14. Ентов В.М., Салганик Р.Л. К модели хрупкого разрушения Прандтля // *Известия АН СССР. Механика твердого тела*. 1968. № 6. С. 87–99.
15. He X. A review of finite element analysis of adhesively bonded joints // *International Journal of Adhesion and Adhesives*. 2011. V. 31 (4). P. 248–264. doi: 10.1016/j.ijadhadh.2011.01.006
16. Новожилов В.В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // *Прикладная математика и механика*. 1969. Т. 33, № 2. С. 212–222.
17. Морозов Н.Ф., Семенов Б.Н. Применение критерия хрупкого разрушения В.В. Новожилова при определении разрушающих нагрузок для угловых вырезов в условиях сложного напряженного состояния // *Известия АН СССР. Механика твердого тела*. 1986. № 1. С. 122–126.
18. Нейбер Г. Концентрация напряжений. М. ; Л. : ОГИЗ : Гостехиздат, 1947. 204 с.
19. Neuber H. *Theory of Notch Stresses: Principles for Exact Calculation of Strength with Reference to Structural Form and Material*. Berlin : Springer-Verlag, 1958. 180 p.
20. Назаров С.А., Паукито М.В. Дискретные модели и осреднение в задачах теории упругости. Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1984. 93 с.
21. Морозов Е.М. ANSYS в руках инженера: механика разрушения. М. : Ленанд, 2010. 456 с.
22. Буццев А.Ю., Глаголев В.В., Маркин А.А. Исследование процесса локальной разгрузки элемента в конечно-элементном континууме // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2021. № 69. С. 86–96. doi: 10.17223/19988621/69/7
23. Berto F., Glagolev V.V., Markin A.A. Relationship between J_c and the dissipation energy in the adhesive layer of a layered composite // *International Journal of Fracture*. 2020. V. 224. P. 277–284. doi: 10.1007/s10704-020-00464-0
24. Andrews M.G., Massabo R. The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers // *Engineering Fracture Mechanics*. 2007. V. 74. P. 2700–2720. doi: 10.1016/J.ENGFRACMECH.2007.01.013

References

1. Griffith A.A. (1921) The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*. 221. pp. 163–189. doi: 10.1098/rsta.1921.0006
2. Cherepanov G.P. (1979) *Mechanics of Brittle Fracture*. New York: McGraw-Hill.
3. Murakami Y. (1992) *Stress Intensity Factors Handbook*. Pergamon Press.
4. Malik A.V., Lavit I.M. (2018) Metod rascheta koefitsienta intensivnosti napryazheniy dlya nepodvizhnoy treshchiny normal'nogo razryva pri dinamicheskom nagruzhenii [On the computation method for the stress intensity factor of a stationary crack in mode I under dynamic loading]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 54. pp. 88–102. doi: 10.17223/19988621/54/8
5. Murakami Y. (1976) A simple procedure for the accurate determination of stress intensity factors by finite element method. *Engineering Fracture Mechanics*. 8(4). pp. 643–655. doi: 10.1016/0013-7944(76)90038-2
6. Rybicki E.F., Kanninen M.F. (1977) A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral. *Engineering Fracture Mechanics*. 9(4). pp. 931–938. doi: 10.1016/0013-7744(77)90013-3
7. Caicedo J., Portela A. (2017) Direct computation of stress intensity factors in finite element method. *European Journal of Computational Mechanics*. 26(3). pp. 309–335. doi: 10.1080/17797179.2017.1354578
8. Tanaka M., Hamada M., Iwata Y. (1982) Computation of a two-dimensional stress intensity factor by the boundary element method. *Ingenieur-Archiv*. 52. pp. 95–104. doi: 10.1007/BF00536317
9. Cherepanov G.P. (2012) Some new applications of the invariant integrals of mechanics. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 76(5). pp. 519–536. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2012.11.014
10. Rice J.R. (1968) A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*. 35(2). pp. 379–386. doi: 10.1115/1.3601206

11. Kolednik O., Schöngrundner R., Fischer F.D. (2014) A new view on J-integrals in elastic-plastic materials. *International Journal of Fracture*. 187(1). pp. 77–107. doi: 10.1007/s10704-013-9920-6
12. Huang K., Shimada T., Ozaki N., Hagiwara Y., Sumigawa T., Guo L., Kitamura T. (2017) A unified and universal Griffith-based criterion for brittle fracture. *International Journal of Solids and Structures*. 128. pp. 67–72. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2017.08.018
13. Prandtl L., Knauss W.G. (2011) A thought model for the fracture of brittle solids. *International Journal of Fracture*. 171(2). pp. 105–109. doi: 10.1007/s10704-011-9637-3
14. Entov V.M., Salganik R.L. (1968) K modeli khрупкого razrusheniya Prandtlya [To the Prandtl model of brittle fracture]. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Mekhanika Tverdogo Tela – Mechanics of Solids*. 6. pp. 87–99.
15. He X. (2011) A review of finite element analysis of adhesively bonded joints. *International Journal of Adhesion and Adhesives*. 31(4). pp. 248–264. doi: 10.1016/j.ijadhadh.2011.01.006
16. Novozhilov V.V. (1969) On a necessary and sufficient criterion for brittle strength. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 33(2). pp. 212–222. doi: 10.1016/0021-8928(69)90025-2
17. Morozov N.F., Semenov B.N. (1986) Primenenie kriteriya khрупкого razrusheniya V.V. Novozhilova pri opredelenii razrushayushchikh nagruzok dlya uglovykh vyrezov v usloviyakh slozhnogo napryazhennogo sostoyaniya [Application of the V.V. Novozhilov brittle fracture criterion when determining breaking loads for corner cutouts under conditions of complex stress state]. *Izvestiya akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela – Mechanics of Solids*. 1. pp. 122–126.
18. Neuber H. (1937) *Kerbspannunglehre: Grunlagen fur Genaue Spannungsrechnung*. Berlin: Springer-Verlag.
19. Neuber H. (1958) *Theory of Notch Stresses: Principles for Exact Calculation of Strength with Reference to Structural Form and Material*. Berlin: Springer-Verlag.
20. Nazarov S.A., Paukshto M.V. (1984) *Diskretnye modeli i osrednenie v zadachakh teorii uprugosti* [Discrete models and averaging in problems of elasticity theory]. Leningrad: LGU.
21. Morozov E.M. (2010) *ANSYS v rukakh inzhenera: mekhanika razrusheniya* [ANSYS in the hands of an engineer: fracture mechanics]. Moscow: Lenand.
22. Burtsev A.Yu., Glagolev V.V., Markin A.A. (2021) Issledovanie protsessa lokal'noy razgruzki elementa v konechno-elementnom kontinuuume [Investigation of local unloading of an element in a finite element continuum]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 69. pp. 86–96. doi: 10.17223/19988621/69/7
23. Berto F., Glagolev V.V., Markin A.A. (2020) Relationship between J_c and the dissipation energy in the adhesive layer of a layered composite. *International Journal of Fracture*. 224. pp. 277–284. doi: 10.1007/s10704-020-00464-0
24. Andrews M.G., Massabo R. (2007) The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers. *Engineering Fracture Mechanics*. 74. pp. 2700–2720. doi: 10.1016/J.ENGFRACMECH.2007.01.013

Сведения об авторах:

Глаголев Вадим Вадимович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Вычислительная механика и математика» Тульского государственного университета (Тула, Россия). E-mail: vadim@tsu.tula.ru

Лутхов Андрей Игоревич – аспирант кафедры «Вычислительная механика и математика» Тульского государственного университета (Тула, Россия). E-mail: tip460@mail.ru

Information about the authors:

Glagolev Vadim V. (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: vadim@tsu.tula.ru

Lutkhov Andrey I. (Tula State University, Tula, Russian Federation). E-mail: tip460@mail.ru

Статья поступила в редакцию 02.06.2023; принята к публикации 05.08.2024

The article was submitted 02.06.2023; accepted for publication 05.08.2024