ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2024 Математика и механика № 90
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Научная статья
УДК 532.5, 517.95
doi: 10.17223/19988621/90/12

Разрешимость одномерной задачи движения жидкости в пороупругой среде с проницаемыми границами

Александр Алексеевич Папин[1], Маргарита Андреевна Токарева[2]

[1, 2] Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия
[1] papin@math.asu.ru
[2] tma25@mail.ru

Аннотация. А.А. Папиным и М.А. Токаревой ранее была установлена разрешимость начально-краевой задачи фильтрации жидкости в вязкой пористой среде для случая непроницаемых границ. В настоящей статье исследуется задача об изотермическом движении несжимаемой жидкости в деформируемой пористой среде с проницаемыми границами. Доказано существование единственного локального классического решения задачи. Также установлен физический принцип максимума для функции пористости.
Ключевые слова: закон Дарси, фильтрация, пороупругость, локальная разрешимость, пористость

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке проекта «Современные модели гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики» (2024–2026), гос. задание FZMW-2024-0003.

Для цитирования: Папин А.А., Токарева М.А. Разрешимость одномерной задачи движения жидкости в пороупругой среде с проницаемыми границами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 90. С. 140–151. doi: 10.17223/19988621/90/12

Original article

Solvability of a one-dimensional problem of fluid flow in poroelastic medium with permeable boundaries

Aleksandr A. Papin[1], Margarita A. Tokareva[2]

[1, 2] Altai State University, Barnaul, Russian Federation
[1] papin@math.asu.ru
[2] tma25@mail.ru

Abstract. The initial-boundary value problem of a one-dimensional viscous fluid flow in a deformable viscous porous medium with permeable boundaries is considered. The governing equations are the equations of mass conservation for each phase, the equation

of momentum conservation for a liquid phase in terms of Darcy’s law, the equation of momentum conservation for the whole system, and the rheological equation for porosity. The original system of equations in the Lagrange variables is reduced to a third-order equation for the porosity function. The first part of this paper presents the formulation of the problem, the definition of the classical solution to the considered problem, and the existence and uniqueness theorem for the problem of Hölder classes. In the second part of this paper, the local theorem of existence and uniqueness for the problem of Hölder classes is proved for an incompressible fluid using the Tikhonov-Schauder fixed-point theorem. The physical principle of the maximum porosity function is determined.
Keywords: Darcy's law, filtration, poroelasticity, local solvability, porosity

Acknowledgments: This work was supported with the financial support of the project "Modern models of hydrodynamics for environmental management, industrial systems and polar mechanics"(2024-26) (FZMW-2024-0003).

For citation: Papin, A.A., Tokareva, M.A. (2024) Solvability of a one-dimensional problem of fluid flow in poroelastic medium with permeable boundaries. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 90. pp. 140–151. doi: 10.17223/19988621/90/12

Введение

В последнее время задачи фильтрации жидкостей в деформируемых пористых средах стали очень актуальными. Проверенные опытом и практикой модели фильтрации – классические модели типа Маскета–Леверетта (Баклея–Леверетта в случае отсутствия капиллярного скачка), которые опираются на законы сохранения, эту тематику не охватывают, поскольку не учитывают сжимаемость пористых сред [1]. Если предположить, что скорость твердой среды (пористого скелета) непостоянна, то пороупругость необходимо учитывать. Возникает серия работ, в которых эта тематика начала исследоваться. Проблема в том, что очень малое количество работ посвящено обоснованию данных моделей. Модели, которые будут применяться в промышленности, требуют обоснования и проверки разностных схем. Цель данной работы – обоснование модели с условием протекания, которое имеет более прикладной характер.

Задачи фильтрации жидкостей в пороупругих средах возникают во множестве прикладных отраслей, таких как нефтегазодобыча, динамика снежно-ледового покрова, захоронение углекислого газа, а также находят применение в биологии и медицине (движение физиологических жидкостей в тканях, проблемы роста клеточной ткани и т.д.).

Течение одной фазы (жидкости), вызванное уплотнением, через другую фазу (твердую фазу) получило большое внимание в геологических науках [2]. В области динамики магмы большая часть предыдущих работ была посвящена течению через вязкую пористую матрицу, однако некоторые работы указывают на важность вязкоупругой матрицы в распространении магматических трещин.

Осадочные бассейны являются основными местами добычи жидких углеводородов и поэтому играют важную роль в нефтяной промышленности. Одна из проблем, влияющих на буровые операции, – случайное возникновение аномально высокого давления поровой жидкости, которое, если оно возникнет внезапно, может вызвать обрушение буровой скважины и, как следствие, выход ее из строя.

Таким образом, понимание того, как возникает такое высокое поровое давление, имеет как промышленный, так и научный интерес. Более того, изменение пористости с глубиной является источником информации для геологов, которые заинтересованы в понимании истории захоронения и опускания осадочных бассейнов. Поэтому модели уплотнения, описывающие эти процессы, представляют практический интерес [3]. Базовая модель уплотнения во многом аналогична процессу уплотнения почвы.

В данных процессах реологическое поведение пористой среды существенно усложняет рассматриваемые задачи. За последнее десятилетие было выполнено множество численных и экспериментальных исследований пороупругих сред [4, 5], однако обоснованию моделей уделялось недостаточное внимание. Частным примером является задача однофазной фильтрации в деформируемой вязкой пористой среде. Ранее авторами изучалась одномерная постановка с непроницаемыми границами, для которой была установлена глобальная разрешимость начально-краевой задачи в гельдеровских классах [6]. В данной статье доказана локальная теорема для случая проницаемых границ.

Математическая постановка задачи

В настоящей исследовательской работе анализируется задача о движении жидкости в деформируемой пористой среде. Для создания математической модели этой проблемы используются концепции и методы механики многофазных сред. Основные компоненты такой модели – уравнения сохранения массы для как жидкой, так и для твердой фазы, а также уравнение сохранения импульса, которое формулируется согласно закону Дарси, предполагая несжимаемость жидкости. Для учета реологических свойств пористой структуры используется реологическое соотношение типа Максвелла. Кроме того, в рамках исследования рассматривается уравнение баланса сил. Работы [7–10] выступают ключевыми источниками исследования, в них можно найти подробные сведения по этим аспектам. Данная работа направлена на более глубокое понимание механизмов движения жидкости в пористой среде и их математическое моделирование с использованием современных методов математики и механики.

Таким образом, рассматривается следующая система уравнений:

$$\frac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\big((1-\phi)\rho_s v_s\big)=0, \qquad \frac{\partial(\rho_f\phi)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho_f\phi v_f)=0, \tag{1}$$

$$q_D=-k(\phi)\left(\frac{\partial p_f}{\partial x}+\rho_f g\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial x}=-\frac{1}{\xi(\phi)}p_e, \quad p_e=p_{tot}-p_f, \tag{3}$$

$$\frac{\partial p_{tot}}{\partial x}=-\rho_{tot}g, \quad p_{tot}=\phi p_f+(1-\phi)p_s, \qquad \rho_{tot}=\phi\rho_f+(1-\phi)\rho_s, \tag{4}$$

которая решается в области $(x,t)\in Q_T=\Omega\times(0,T)$, $\Omega=(0,1)$, а также дополняется следующими краевыми и начальными условиями:

$$v_s|_{x=0,x=1}=0 \quad q_D|_{x=0}=q_D^0(t), \quad q_D|_{x=1}=q_D^1(t),$$
$$p_{tot}|_{x=0}=p^0(t), \quad \phi|_{t=0}=\phi^0(x). \tag{5}$$

Здесь ϕ – пористость, ρ_f, ρ_s, v_f, v_s – истинные плотности и скорости жидкой и твердой фаз соответственно, ρ_{tot} – плотность двухфазной среды, $q_D=\phi(v_f-v_s)$ – скорость Дарси, p_f, p_s – соответственно давления жидкой и твердой фаз, p_{tot} – общее давление, p_e – эффективное давление, g – плотность массовых сил, $\xi(\phi)$ – коэффициент объемной вязкости, $k(\phi)$ – коэффициент фильтрации (заданные функции), x, t – координаты Эйлера. Истинная плотность твердых частиц ρ_s принимается постоянной. Таким образом, решение поставленной задачи сводится к отысканию пористости, скоростей и давлениий фаз, удовлетворяющих системе уравнений (1)–(4) и начально-краевым условиям (5).

В настоящей статье установлена разрешимость задачи (1)–(5) в малом по времени, а также доказана единственность.

Основные обозначения, которые будут использованы далее, будем понимать в общепринятом смысле [11]. Для функции $f(x, t)$, определенной в цилиндре $Q_T=\Omega\times(0,T]$, введем некоторые функциональные пространства. Пусть $\|\cdot\|_{q,\Omega}$ – норма в пространстве Лебега $L_q(\Omega)$, $q\in[1,\infty]$, которую будем также обозначать для краткости $\|\cdot\|_q=\|\cdot\|_{q,\Omega}$, $\|\cdot\|=\|\cdot\|_{2,\Omega}$. Нами также будет использоваться пространство Гельдера $C^\alpha(\Omega)$, $C^{k+\alpha}(\Omega)$, k – натуральное, $\alpha\in(0,1]$, в котором определены нормы

$$\|f\|_{C^\alpha(\Omega)}\equiv|f|_{\alpha,\Omega}=|f|_{0,\Omega}+H_x^\alpha(f), \quad |f|_{0,\Omega}=\max_{x\in\overline{\Omega}}|f(x)|,$$
$$H_x^\alpha(f)=\sup_{x_1,x_2\in\Omega}|f(x_1)-f(x_2)||x_1-x_2|^{-\alpha},$$
$$\|f\|_{C^{k+\alpha}(\Omega)}\equiv|f|_{k+\alpha,\Omega}=\sum_{m=0}^{k}\|D_x^m f\|_{0,\Omega}+H^\alpha(D_x^k f).$$

Для функций, определенных на Q_T, нам потребуется пространство $C^{k+\alpha,m+\beta}(Q_T)$, где k, m – натуральные, $(\alpha,\beta)\in(0,1]$, с нормой

$$\|f\|_{C^{k+\alpha,m+\beta}(Q_T)}\equiv|f|_{k+\alpha,m+\beta,Q_T}=\sum_{l=0}^{k}\|D_x^l f\|_{0,Q_T}+$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\|D_t^j f\|_{0,Q_T}+H_x^\alpha(D_x^k f)+H_t^\beta(D_x^k f)+H_x^\alpha(D_t^m f)+H_t^\beta(D_t^m f),$$

где
$$H_x^\alpha(f(x,t))=\sup_{x_1,x_2\in\Omega,t\in(0,T)}|f(x_1,t)-f(x_2,t)||x_1-x_2|^{-\alpha},$$
$$H_t^\beta(f(x,t))=\sup_{t_1,t_2\in(0,T),x\in\Omega}|f(x,t_1)-f(x,t_2)||t_1-t_2|^{-\beta}.$$

В случае $k = m$ и $\alpha = \beta$ используется обозначение $C^{k+\alpha}(Q_T)$.

Определение. *Решением задачи (1)–(5) называется совокупность функций* $\phi, v_s, v_f \in C^{2+\alpha,1+\beta}(Q_T)$, $p_f, p_s \in C^{1+\alpha,1+\beta}(Q_T)$, *удовлетворяющих уравнениям (1)–(4) и принимающих начальные и граничные условия (5) как непрерывные в* Q_T *функции, а также таких, что* $0 < \phi < 1$.

Теорема. *Пусть данные задачи (1)–(5) обладают следующим свойствами:*

1. Функции $k(\phi)$, $\xi(\phi)$ *и их производные до второго порядка непрерывны для* $\phi \in (0,1)$ *и удовлетворяют условиям*

$$k_0^{-1}\phi^{q_1}(1-\phi)^{q_2} \le k(\phi) \le k_0\phi^{q_3}(1-\phi)^{q_4},$$

$$\frac{1}{\xi(\phi)} = a_0(\phi)\phi^{\alpha_1}(1-\phi)^{\alpha_2-1}, \quad 0 < R_1 \le a_0(\phi) \le R_2 < \infty,$$

где $k_0, \alpha_i, R_i, i = 1,2$ *– положительные постоянные,* $q_1,\dots,q_4$ *– фиксированные вещественные числа.*

2. Функция g, начальная функция ϕ^0 *и граничные функции* $p^0(t)$, $q_D^0(t)$, $q_D^1(t)$ *удовлетворяют условиям гладкости*

$$g(x,t) \in C^{1+\alpha,1+\beta}(\bar{Q}_T), \quad \phi^0(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_T),$$

$$(q_D^0(t), q_D^1(t), p^0(t)) \in C^{1+\beta}(0,T)$$

и неравенствам

$$0 < m_0 \le \phi^0(x) \le M_0 < 1, \quad |g(x,t)| \le g_0 < \infty, \quad x \in \bar{\Omega},$$

где m_0, M_0, g_0 *– известные положительные константы.*

Тогда существует единственное локальное классическое решение задачи (1)–(5), т.е. существует значение t_0 *такое, что*

$$(\phi(x,t), v_s(x,t), v_f(x,t)) \in C^{2+\alpha,1+\beta}(Q_{t_0}),$$

$$(p_f(x,t), p_s(x,t)) \in C^{1+\alpha,1+\beta}(Q_{t_0}),$$

а также $0 < \phi(x,t) < 1$ *в* $\bar{Q}_{t_0}$.

Локальная разрешимость задачи

Легко видеть, что переход к переменным Лагранжа при доказательстве теоремы позволяет исключить из системы скорости фаз, а также при постоянстве плотностей фаз свести исходную систему к одному уравнению для функции пористости [6]. Таким образом, после перехода к безразмерным переменным Лагранжа (по скорости твердой фазы) система (1)–(4) примет следующий вид:

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + (1-\phi)^2\frac{\partial v_s}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(\phi(v_f - v_s)) = 0, \tag{6}$$

$$q_D = -k(\phi)\left((1-\phi)\frac{\partial p_f}{\partial x} + \rho_f g\right), \tag{7}$$

$$(1-\phi)\frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = -\rho_{tot} g, \tag{8}$$

$$(1-\phi)\frac{\partial v_s}{\partial x} = -a_1(\phi) p_e, \quad a_1(\phi) = \frac{1}{\xi(\phi)}. \tag{9}$$

Опишем схему преобразования системы (6)–(9). Подставляя во второе уравнение (6) скорость Дарси (7), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(\phi)((1-\phi)\frac{\partial p_f}{\partial x} + \rho_f g)\right) = 0. \tag{10}$$

Уравнение (9) с учетом первого уравнения (6) примет вид:

$$\frac{1}{1-\phi}\frac{\partial \phi}{\partial t} = -a_1(\phi)(p_{tot} - p_f).$$

Однако его удобнее переписать в следующей форме:

$$p_{tot} - p_f = -\frac{\partial G(\phi)}{\partial t}, \tag{11}$$

где функция $G(\phi)$ определяется следующим равенством

$$\frac{dG}{d\phi} = \frac{1}{a_1(\phi)(1-\phi)}.$$

Продифференцировав уравнение (11) по переменной x, а также используя уравнение (8), при подстановке в уравнение (10) получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(k(\phi)(1-\phi)(\frac{\partial^2 G(\phi)}{\partial x \partial t} - g(\rho_s - \rho_f))). \tag{12}$$

Согласно постановке с учетом условий протекания начальные и граничные условия записываются в виде:

$$\phi|_{t=0} = \phi^0,$$
$$\left(k(\phi)(1-\phi)\left(\frac{\partial^2 G(\phi)}{\partial x \partial t} - g(\rho_s - \rho_f)\right) + q_D\right)|_{x=0,1} = 0. \tag{13}$$

Лемма. *Пусть данные задачи (12), (13) удовлетворяют условиям теоремы. Тогда существует единственное локальное решение задачи (12), (13), т.е. существует значение* t_0 *такое, что*

$$\phi \in C^{2+\alpha,1+\beta}(Q_{t_0}),\ \phi \in (0,1).$$

Для доказательства леммы рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$z \equiv \frac{\partial G}{\partial t}, \quad G|_{t=0} = G(\phi^0) \equiv G^0(x), \tag{14}$$

$$\frac{z}{d(G)} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(G)\frac{\partial z}{\partial x} - b(G)\right) = 0, \tag{15}$$

$$\left(a(G)\frac{\partial z}{\partial x}-b(G)+q_D\right)|_{x=0,x=1}=0, \quad (16)$$

где

$$d(G)=\frac{1-\phi(G)}{a_1(\phi(G))},\quad a(G)=k(\phi(G))(1-\phi(G)),$$
$$b(G)=k(\phi(G))g(1-\phi(G))(\rho_s-\rho_f).$$

Заметим, что поскольку $0<m_0\le\phi^0(x)\le M_0<1$ и функция $G(\phi)$ монотонна по ϕ, то $G(m_0)\le G^0(x)\le G(M_0)$.

Докажем разрешимость задачи в малом по времени с помощью теоремы Тихонова–Шаудера о неподвижной точке [12].

Пусть $\omega(x,t)=G(\phi)-G(\phi^0)$. Тогда уравнения (14), (15) можно переписать в виде:

$$z=\frac{\partial\omega}{\partial t},\quad \omega|_{t=0}=0, \quad (18)$$

$$\frac{z}{d(\omega)}-\frac{\partial}{\partial x}\left(a(\omega)\frac{\partial z}{\partial x}-b(\omega)\right)=0, \quad (19)$$

$$\left(a(\omega)\frac{\partial z}{\partial x}-b(\omega)\right)|_{x=0,x=1}=-q_D|_{x=0,1}. \quad (20)$$

Выберем в качестве банахова пространства $C^{2+\zeta,1+\gamma}(\overline{Q}_{t_0})$, где ζ – любое число из отрезка (0, α), $\alpha\in[0,1)$, γ – любое число из отрезка (0, β), $\beta\in[0,1)$. Также положим

$$V=\{\overline{\omega}\in C^{2+\alpha,1+\beta}(\overline{Q}_{t_0})\,|\,\overline{\omega}|_{t=0}=0,$$
$$0<\frac{m^0}{2}\le\phi(\overline{\omega})\le\frac{M^0+1}{2}<\infty,\quad |\overline{\omega}|_{1+\alpha,(1+2\beta)/2,Q_{t_0}}\le K_1,$$
$$|\overline{\omega}|_{2+\alpha,1+\beta,Q_{T_0}}\le K_1+K_2\},$$

где K_1 – положительная произвольная постоянная, K_2 – положительная постоянная, которая будет рассмотрена ниже. Теперь построим оператор Λ, который отображает V в себя. Пусть $\overline{\omega}\in V$. Тогда функцию $z=z(x,t)$ можно определить, используя (19) и (20) как решение задачи

$$\frac{z}{d(\overline{\omega})}-(a(\overline{\omega})z_x-b(\overline{\omega}))_x=0,$$
$$(a(\overline{\omega})z_x-b(\overline{\omega}))|_{x=0,1}=-q_D|_{x=0,1}, \quad (21)$$

где

$$0<d_1=\frac{1-M_0}{a_0M_0^{\alpha_1}(1-m_0)^{\alpha_2-1}}\le d(\overline{\omega})\le\frac{1-m_0}{a_0m_0^{\alpha_1}(1-M_0)^{\alpha_2-1}}=d_2,$$

$$0 < h_1 = k_0^{-1} m_0^{q_1} (1-M_0)^{q_2+1} \le a(\bar{\omega}) \le k_0 M_0^{q_3} (1-m_0)^{q_4+1} = h_2,$$

$$|b(\bar{\omega})| \le k_0 M_0^{q_3} (1-m_0)^{q_4} g_0((1-m_0)\rho_s + (1+M_0)\rho_f) \equiv b_2.$$

Задача (21) имеет единственное классическое решение, поскольку уравнение для z (21) является равномерно эллиптическим и $d(\bar{\omega}) > 0$. Чтобы доказать существование решения поставленной задачи, необходимо использовать технику, изложенную в [13]. Таким образом, имеет место оценка Шаудера для решения задачи (21):

$$|z|_{2+\alpha,\Omega} \le N_1(K_1, m_0, M_0).$$

Далее для функции z покажем непрерывность по переменной t.

Введем $u = (z(x,t_2) - z(x,t_1))(t_2 - t_1)^{\beta}$, тогда эта функция удовлетворяет следующему равенству:

$$a(\bar{\omega}(x,t_2))u_{xx} + a_x(\bar{\omega}(x,t_2))u_x - \frac{1}{d(\bar{\omega}(x,t_2))} =$$

$$= (z_{xx}(\bar{\omega}(x,t_1))(a(\bar{\omega}(x,t_1)) - a(\bar{\omega}(x,t_2))) + z_x(\bar{\omega}(x,t_1))(a(\bar{\omega}(x,t_1)) - a(\bar{\omega}(x,t_2))) +$$

$$+ z(\bar{\omega}(x,t_1))\left(\frac{1}{d(\bar{\omega}(x,t_1))} - \frac{1}{d(\bar{\omega}(x,t_2))}\right) + b_x(\bar{\omega}(x,t_2)) - b_x(\bar{\omega}(x,t_1)))(t_2 - t_1)^{-\beta},$$

так как функции $z(x,t_i), (i = 1,2)$ являются решением уравнения (21).

Из этого равенства вытекает органиченность функции u, а также оценка $|z|_{2+\alpha,\beta,Q_{t_0}} \le N_2(K_1, m_0, M_1)$.

После нахождения функции z найдем ω из уравнения (18):

$$\omega = \int_0^t z\,d\tau,$$

откуда следует, что

$$|\omega|_{2+\alpha,1+\beta,Q_{t_0}} \le N_3(1 + t\,|z_{xx}|_{\alpha,\beta,Q_{t_0}}),$$

а постоянная $N_3 = N_3(K_1, m_0, M_0)$.

Далее выберем K_2 таким образом, чтобы $N_4 \le (K_1 + K_2)/2$, где $N_4 = \max\{N_1, N_3\}$. Тогда при $t_0 = 2(K_1 + K_2)^{-1}$ получаем оценку

$$|\omega|_{2+\alpha,1+\beta,Q_{t_0}} \le K_1 + K_2.$$

Также имеем оценку вида $|\omega|_{0,Q_{t_0}} \le N_5 t_0$, которая следует из представления для функции ω. Чтобы показать, что существует достаточно малое значение t_0, зависящее от K_1 и K_2, такое что справедлива оценка вида $|\omega|_{1+\alpha,(1+2\beta)/2,Q_{t_0}} \le K_1$, необходимо воспользоваться неравенством вида [12]:

$$|u|_{1+\alpha,(1+2\beta)/2,Q_{t_0}} \le C\,|u|^{c}_{2+\alpha,1+\beta,Q_{t_0}}\,|u|^{1-c}_{0,Q_{t_0}},$$

$$c = (1+\alpha)(2+\alpha)^{-1}.$$

Тем самым мы показали, что оператор Λ отображает множество V в себя при достаточно малых t_0. Непрерывность оператора Λ в норме пространства $C^{2+\zeta,1+\gamma}(\overline{Q}_{t_0})$ доказывается с использованием оценок, полученных выше. Тем самым по теореме Тихонова–Шаудера существует неподвижная точка $\omega \in V$ оператора Λ.

Далее покажем единственность решения задачи (14)–(16). Предположим, что (z_1, G_1) и (z_2, G_2) – два различных решения задачи. Тогда их разность $z = z_1 - z_2$, $G = G_1 - G_2$ – решение следующей линейной однородной системы:

$$A_0 z + A_1 G - \frac{\partial}{\partial x}\left(A_2 \frac{\partial z}{\partial x} + A_3 G \right) = 0, \quad z = \frac{\partial G}{\partial t},$$

в которой начальные и граничные условия тождественно равны нулю:

$$\left(A_2 \frac{\partial z}{\partial x} + A_3 G \right)\Big|_{x=0,1} = 0, \quad G\,|_{t=0} = 0,$$

а коэффициенты A_i, $i = 0,...,3$ принимают вид:

$$A_0 = d(G_1) > 0, \quad A_1 = \frac{z_2(d(G_2) - d(G_1))}{Gd(G_1)d(G_2)},$$

$$A_2 = a(G_1) > 0, A_3 = \frac{\partial z_2}{\partial x}\frac{a(G_1) - a(G_2)}{G} - \frac{b(G_1) - b(G_2)}{G},$$

а также являются ограниченными для любых $x \in [0,1], t \in [0,T]$.

Далее умножим уравнение для z на $z(x, t)$, а результат проинтегрируем по x от 0 до 1. После некоторых преобразований получим неравенство

$$\int_0^1 z^2 dx + \int_0^1 z_x^2 dx \le C\int_0^1 G^2 dx, \tag{22}$$

в котором C – постоянная, которая зависит от T и других исходных данных задачи.

Так как из уравнения для G вытекает неравенство

$$G^2 \le C\int_0^t z^2 d\tau,$$

то неравенство (22) перепишется в виде:

$$\int_0^1 z^2 dx + \int_0^1 z_x^2 dx \le C\int_0^1\int_0^t z^2 d\tau dx.$$

Полагая $y(t) = \int_0^1\int_0^t z^2 d\tau dx$, выводим

$$\frac{dy}{dt} \le Cy.$$

Откуда следует $y(t) = 0$, $z = 0$, $G = 0$. Таким образом, лемма доказана.

После отыскания функции ϕ остальные функции системы могут быть определены следующим образом.

Из уравнений неразрывности (1) находим скорости фаз

$$v_f(x,t) = \frac{q_D^0(t)}{\phi} - \frac{1}{\phi}\int_0^x \frac{\partial \phi}{\partial t} d\xi \in C^{2+\alpha,\beta}(Q_{t_0}),$$

$$v_s(x,t) = -\frac{1}{1-\phi}\int_0^x \frac{\partial(1-\phi)}{\partial t}d\xi \in C^{2+\alpha,\beta}(Q_{t_0}).$$

Из уравнения (4) вытекает следующее представление:

$$p_{tot} = p^0(t) - \int_0^x \rho_{tot} g d\xi \in C^{1+\alpha,1+\beta}(Q_{t_0}) .$$

Из уравнения (3) имеем $p_e(x,t) = -\xi(\phi)\frac{\partial v_s}{\partial x} \in C^{1+\alpha,\beta}(Q_{t_0})$, тогда

$$p_f(x,t) = p_{tot} - p_e \in C^{1+\alpha,\beta}(Q_{t_0}),$$

$$p_s(x,t) = \frac{p_{tot}}{1-\phi} - \frac{\phi}{1-\phi}p_f \in C^{1+\alpha,\beta}(Q_{t_0}).$$

Теорема доказана.

Заключение

Рассмотрена начально-краевая задача для системы одномерного движения вязкой жидкости в деформируемой вязкой пористой среде с проницаемыми границами. Исходная система уравнений в переменных Лагранжа сводится к одному уравнению третьего порядка для функции пористости. С помощью теоремы Тихонова–Шаудера о неподвижной точке доказывается локальная теорема существования и единственности задачи в классах Гёльдера в случае несжимаемой жидкости. Установлен также физический принцип максимума функции пористости.

Для данной постановки остается ряд открытых задач. Одна из них – проблема существования и единственности глобального решения поставленной задачи, а также вопросы существования решений в многомерном случае и в случае сжимаемой жидкости. Открытым остается и вопрос о стабилизации решений. Большое прикладное значение имеют задача двухфазной фильтрации в пороупругой среде и задачи с фазовыми переходами, которые позволят описать процессы выхода магмы на поверхность земли, фильтрации газированной жидкости в пороупругой среде. Модели двухфазной фильтрации с фазовыми переходами позволят описать процессы, происходящие в биологических тканях, например рост опухоли, а также фильтрацию физиологических жидкостей в тканях. Для такого ряда задач необходимо не только доказать теоремы существования и единственности и выполнение необходимых физических требований типа неотрицательности давления (плотности) и ограниченности функции пористости нулем и единицей, но и исследовать асимптотическое поведение решений при неограниченном возрастании времени, а также устойчивость решений.

Список источников

1. *Ivanov M.I., Kremer I.A., Laevsky Y.M.* On non-uniqueness of pressures in problems of fluid filtration in fractured-porous media // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2023. V. 425. Art. 115052. doi: 10.1016/j.cam.2022.115052
2. *Head M., Hickey J., Thompson J., Gottsmann J., Fournier N.* Rheological Controls on Magma Reservoir Failure in a Thermo-Viscoelastic Crust // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. 2022. V. 127 (7). doi: 10.1029/2021JB023439

3. *Lee J.J.E.* Modelling and Simulation of Compacting Sedimentary Basins. University of Oxford, 2019.
4. *Исламов Д.Ф., Рамазанов А.Ш.* Исследование неизотермической двумерной фильтрации в слоистом пласте // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 75. С. 100–112. doi: 10.17223/19988621/75/9
5. *Вирц Р.А.* Численное решение двумерной задачи фильтрации жидкости в деформируемой пористой среде // Известия Алтайского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 1. P. 88–92. (117). doi: 10.14258/izvasu(2021)1-14
6. *Morency C., Huismans R.S., Beaumont C., Fullsack P.* A numerical model for coupled fluid flow and matrix deformation with applications to disequilibrium compaction and delta stability // Journal of Geophysical Research. 2007. V. 112 (B10). doi: 10.1029/2006JB004701
7. *Fowler A.* Mathematical Geoscience. London : Springer-Verlag London Limited, 2011. doi: 10.1007/978-0-85729-721-1
8. *Tokareva M.A., Papin A.A., Virts R.A.* Filtration of liquid in a non-isothermal viscous porous medium // Journal of Siberian Federal University – Mathematics and Physics. 2020. V. 13 (6). P. 763–773. doi: 10.17516/1997-1397-2020-13-6-763-773
9. *Koleva M.N., Vulkov L.G.* Numerical analysis of one dimensional motion of magma without mass forces // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2020. V. 366. doi: 10.1016/j.cam.2019.07.003
10. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.М.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М. : Наука, 1967. 736 с.
11. *Papin A.A., Tokareva M.A.* On the existence of global solution of the system of equations of one-dimensional motion of a viscous liquid in a deformable viscous porous medium // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2021. V. 18 (2). P. 1397–1422. doi: 10.33048/semi.2021.18.106
12. *Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск : Наука, 1983.
13. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.М.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М. : Наука, 1973.

References

1. Ivanov M.I., Kremer I.A., Laevsky Y.M. (2023) On non-uniqueness of pressures in problems of fluid filtration in fractured-porous media. *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 425. doi: 10.1016/j.cam.2022. 115052
2. Head M., Hickey J., Thompson J., Gottsmann J., Fournier N. (2022) Rheological controls on magma reservoir failure in thermo-viscoelastic crust. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth.* 127(7). doi: 10.1029/2021JB023439
3. Lee J.J.E. (2019) *Modelling and Simulation of Compacting Sedimentary Basins*. University of Oxford.
4. Islamov D.F., Ramazanov A.Sh. (2022) Issledovanie neizotermicheskoy dvumernoy fil'tratsii v sloistom plaste [Investigation of nonisothermal two-dimensional filtration in multylayer reservoir]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 75. pp. 100–112. doi: 10.17223/19988621/75/9
5. Virts R.A. (2021) Chislennoe reshenie dvumernoy zadachi fil'tratsii zhidkosti v deformiruemoy poristoy srede [Numerical solution of a two-dimensional problem of fluid filtration in a deformable porous medium]. *Izvestiya AGU. Matematika i mekhanika – Izvestiya of Altai State University. Mathematics and Mechanics*. 1(117). pp. 88–92. doi: 10.14258/izvasu(2021)1-14
6. Morency C., Huismans R.S., Beaumont C., Fullsack P. (2007) A numerical model for coupled fluid flow and matrix deformation with applications to disequilibrium compaction and delta stability. *Journal of Geophysical Research.* 112. doi: 10.1029/2006JB004701

7. Fowler A. (2011) *Mathematical Geoscience.* London: Springer-Verlag. doi: 10.1007/978-0-85729-721-1
8. Tokareva M.A., Papin A.A., Virts R.A. (2020) Filtration of liquid in a non-isothermal viscous porous medium. *Journal of Siberian Federal University – Mathematics and Physics*. 13(6). pp. 763–773. doi: 10.17516/1997-1397-2020-13-6-763-773
9. Koleva M.N., Vulkov L.G. (2020) Numerical analysis of one dimensional motion of magma without mass forces. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 366. doi: 10.1016/j.cam.2019.07.003
10. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.M. (1967) *Lineynye i kvazilineynye uravneniya parabolicheskogo tipa* [Linear and quasi-linear equations of parabolic type]. Moscow: Nauka.
11. Papin A.A., Tokareva M.A. (2021) On the existence of global solution of the system of equations of one-dimensional motion of a viscous liquid in a deformable viscous porous medium. *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 18(2). pp. 1397–1422. doi: 10.33048/semi.2021.18.106
12. Antontsev S.N., Kazhikhov A.V., Monakhov V.N. (1983) *Kraevye zadachi mekhaniki neodnorodnykh zhidkostey* [Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids]. Novosibirsk: Nauka.
13. Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.M. (1973) *Lineynye i kvazilineynye uravneniya ellipticheskogo tipa* [Linear and quasi-linear equations of elliptic type]. Moscow: Nauka.

***Сведения об авторах*:**
Папин Александр Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений Института математики и информационных технологий Алтайского государственного университета (Барнаул, Россия). E-mail: papin@math.asu.ru
Токарева Маргарита Андреевна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры дифференциальных уравнений Института математики и информационных технологий Алтайского государственного университета (Барнаул, Россия). E-mail: tma25@mail.ru

***Information about the authors*:**
Papin Aleksandr A. (Doctor of Physics and Mathematics, Altai State University, Barnaul, Russian Federation). E-mail: papin@math.asu.ru
Tokareva Margarita A. (Candidate of Physics and Mathematics, Altai State University, Barnaul, Russian Federation). E-mail: tma25@mail.ru

Статья поступила в редакцию 19.07.2023; принята к публикации 05.08.2024

The article was submitted 19.07.2023; accepted for publication 05.08.2024