

Научная статья

УДК 519.2

doi: 10.17223/19988605/69/9

**Обобщенный асинхронный поток событий
с продлевающимся мертвым временем****Людмила Алексеевна Нежелская¹, Валентина Денисовна Пономаренко²**^{1,2} *Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия*¹ *ludne@mail.ru*² *valya.ponomarenko.00@mail.ru*

Аннотация. Рассматривается дважды стохастический обобщенный асинхронный поток событий с двумя состояниями, функционирующий в стационарном режиме в условиях продлевающегося мертвого времени фиксированной длительности. Решена задача оценивания длительности мертвого времени в рекуррентном обобщенном асинхронном потоке методом моментов. Представлены численные результаты статистических экспериментов, поставленных на имитационной модели потока.

Ключевые слова: дважды стохастический поток событий; обобщенный асинхронный поток событий; инфинитезимальные характеристики; продлевающееся мертвое время; совместная плотность вероятности; условия рекуррентности; преобразование Лапласа; метод моментов; статистические эксперименты.

Для цитирования: Нежелская Л.А., Пономаренко В.Д. Обобщенный асинхронный поток событий с продлевающимся мертвым временем // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2024. № 69. С. 82–94. doi: 10.17223/19988605/69/9

Original article

doi: 10.17223/19988605/69/9

Generalized asynchronous flow of events with extending dead time**Lyudmila A. Nezhel'skaya¹, Valentina D. Ponomarenko²**^{1,2} *National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*¹ *ludne@mail.ru*² *valya.ponomarenko.00@mail.ru*

Abstract. We consider a double stochastic generalized asynchronous flow of events with two states, operating in a stationary mode under conditions of an extended dead time of a fixed duration. The problem of estimating the duration of dead time in a recurrent generalized asynchronous flow of events using the method of moments has been solved. Numerical results of statistical experiments performed on a simulation model are presented.

Keywords: double stochastic flow of events; generalized asynchronous flow of events; infinitesimal characteristics; extending dead time; joint probability density; low recurrence conditions; Laplace transform; method of moments; statistical experiments.

For citation: Nezhel'skaya, L.A., Ponomarenko, V.D. (2024) Generalized asynchronous flow of events with extending dead time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 69. pp. 82–94. doi: 10.17223/19988605/69/9

Введение

Математическая модель дважды стохастического потока является наиболее приближенной к реальности моделью потоков заявок, запросов, сообщений, протекающих в компьютерных сетях, телекоммуникационных сетях и сетях связи [1]. Для дважды стохастического потока характерно сле-

дующее: сопровождающий случайный процесс является принципиально ненаблюдаемым и моменты наступления событий случайны. Дважды стохастические потоки делятся на два класса: к первому классу относятся потоки, интенсивность которых есть непрерывный случайный процесс [2, 3], ко второму – потоки с интенсивностью в виде кусочно-постоянного случайного процесса с конечным числом состояний [4–8].

В большом количестве работ по теории массового обслуживания решаются задачи, когда все события входящего в систему массового обслуживания потока доступны для наблюдения. Однако такая ситуация далеко не всегда соответствует реальности, так как в реальных системах входящее событие способно породить период мертвого времени для регистрирующего прибора. В течение этого периода другие события входящего потока становятся ненаблюдаемыми – теряются [9]. Мертвое время, порождаемое наступившим событием, является в некотором роде искажающим фактором при решении различного рода задач оценивания состояний потока или его параметров по моментам наступления событий в наблюдаемом потоке.

В работах [10–14] решены задачи оценивания длительности мертвого времени, когда наступившие в течение периода мертвого времени события не вызывают его продления (непродлевающееся мертвое время).

Поток событий, рассматриваемый в данной работе, относится ко второму классу дважды стохастических потоков. Предполагается, что событие, наступившее в течение периода мертвого времени, хотя и не наблюдается, все же способно продлить общий период ненаблюдаемости исходного потока (продлевающееся мертвое время). При этом принимается, что мертвое время имеет фиксированную длительность.

Отличие настоящего исследования от проведенного в [10] в том, что в данной работе обобщенный асинхронный поток рассматривается в условиях продлевающегося мертвого времени фиксированной длительности.

В настоящей работе, являющейся продолжением исследования, начатого в [15], выводится и решается уравнение моментов в задаче оценивания длительности продлевающегося мертвого времени, проводятся статистические эксперименты с целью установления качества получаемых оценок.

1. Математическая модель потока

Рассматривается обобщенный асинхронный поток событий, обладающий следующими свойствами: стационарность, ординарность, наличие последствия.

Сопровождающий процесс данного потока $\lambda(t)$ является принципиально ненаблюдаемым кусочно-постоянным случайным процессом с двумя состояниями S_1 и S_2 ; будем говорить, что имеет место состояние S_i процесса $\lambda(t)$, если $\lambda(t) = \lambda_i$, $i = 1, 2$, $\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0$. Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_i является случайной величиной с функцией распределения $F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$, $t \geq 0$, $i = 1, 2$. В течение времени пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_1 имеет место пуассоновский поток событий с параметром λ_1 ; в течение времени пребывания процесса $\lambda(t)$ в состоянии S_2 – пуассоновский поток событий с параметром λ_2 .

В момент перехода сопровождающего случайного процесса $\lambda(t)$ из состояния S_1 в состояние S_2 с вероятностью p ($0 \leq p \leq 1$) инициируется дополнительное событие потока в состоянии S_2 (сначала переход из S_1 в S_2 , затем наступление дополнительного события в S_2). Аналогично при переходе сопровождающего случайного процесса $\lambda(t)$ из состояния S_2 в состояние S_1 с вероятностью q ($0 \leq q \leq 1$) инициируется дополнительное событие потока в состоянии S_1 (сначала переход из S_2 в S_1 , затем наступление дополнительного события в S_1).

В момент наступления каждого события потока наступает период ненаблюдаемости фиксированной длительности T (мертвое время), так что другие события, наступившие в течение времени T ,

недоступны наблюдению. Каждое событие, ненаблюдаемое в течение мертвого времени, вызывает продление периода ненаблюдаемости на величину T ; наблюдаться будет лишь то событие, которое наступило после окончания последнего периода ненаблюдаемости.

На рис. 1 приведены схема формирования наблюдаемого потока событий и одна из реализаций сопровождающего процесса $\lambda(t)$, где $S_i, i=1,2, \dots$ – состояния процесса $\lambda(t)$; $t_1, t_2, \dots$ – моменты времени наступления событий в наблюдаемом потоке. Наблюдаемые события обозначены незакрашенными кружками, а ненаблюдаемые события, т.е. недоступные наблюдению из-за наличия мертвого времени, – закрашенными кружками. Штриховкой обозначен период ненаблюдаемости. Длительность общего периода ненаблюдаемости ξ – случайная величина.

Матрицы инфинитезимальных характеристик сопровождающего процесса $\lambda(t)$ имеют вид [16]:

$$\mathbf{D}_0 = \begin{bmatrix} -(\lambda_1 + \alpha_1) & (1-p)\alpha_1 \\ (1-q)\alpha_2 & -(\lambda_2 + \alpha_2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & p\alpha_1 \\ q\alpha_2 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Элементами матрицы $\mathbf{D}_1$ являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события потока. Недиagonальные элементы матрицы $\mathbf{D}_0$ – интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы $\mathbf{D}_0$ – интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком.

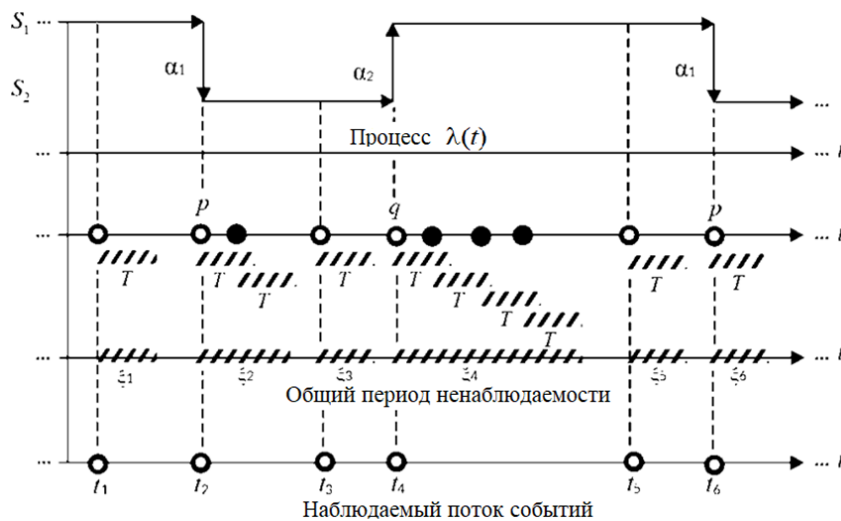


Рис. 1. Реализация наблюдаемого потока событий

Fig. 1. Realization of the observed event flow

Цель данного исследования заключается в получении и решении уравнения моментов в задаче оценивания длительности продлевающегося мертвого времени в рекуррентном обобщенном асинхронном потоке событий, а также в проведении на имитационной модели потока ряда статистических экспериментов с целью установления качества полученных оценок.

2. Двумерная плотность вероятности длительностей двух соседних интервалов.

Условия рекуррентности

Лемма 1. Для обобщенного асинхронного потока событий, функционирующего в условиях полной наблюдаемости, сопровождающий кусочно-постоянный случайный процесс $\lambda(t)$ является марковским процессом [16].

Пусть $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ – моменты времени наступления событий в потоке.

Лемма 2. Последовательность $\{\lambda(t_k)\}$, порождаемая совокупностью моментов наступления событий $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$, является вложенной цепью Маркова [16].

Предполагается, что обобщенный асинхронный поток событий функционирует в условиях полной наблюдаемости ($T = 0$) в стационарном режиме.

Обозначим $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $\tau_k \geq 0$, – значение длительности k -го интервала между соседними событиями t_k и t_{k+1} , $k = 1, 2, \dots$, наблюдаемого потока. В силу стационарного режима функционирования потока для плотности вероятности значений τ_k справедливо $p(\tau_k) = p(\tau)$, $\tau_k \geq 0$, $\forall k$.

Это позволяет без ограничения общности считать момент наступления события t_k равным нулю, или, что то же самое, момент наступления события есть $\tau = 0$.

В общем случае исследуемый поток в условиях полной наблюдаемости является коррелированным потоком. Для достижения поставленной цели необходимо выписать условия рекуррентности потока и для каждого из выписанных условий определить явный вид плотности вероятности значений длительности интервала между соседними событиями потока.

Воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 1. Плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в обобщенном асинхронном потоке в случае $z_2 - z_1 \neq 0$ имеет вид [17]:

$$\begin{aligned} p(\tau) &= \gamma z_1 e^{-z_1 \tau} + (1 - \gamma) z_2 e^{-z_2 \tau}, \tau \geq 0, \\ \gamma &= \frac{1}{z_2 - z_1} \left[z_2 - \lambda_1 - \lambda_2 + \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)(\lambda_1 \lambda_2 - p q \alpha_1 \alpha_2)}{\alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2 \lambda_1 + (p + q) \alpha_1 \alpha_2} \right], \\ z_1 &= \frac{1}{2} \left[\lambda_1 + \alpha_1 + \lambda_2 + \alpha_2 - \sqrt{(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2 - \alpha_2)^2 + 4 \alpha_1 \alpha_2 (1 - p)(1 - q)} \right], \\ z_2 &= \frac{1}{2} \left[\lambda_1 + \alpha_1 + \lambda_2 + \alpha_2 + \sqrt{(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2 - \alpha_2)^2 + 4 \alpha_1 \alpha_2 (1 - p)(1 - q)} \right], \\ z_2 &> z_1 > 0, z_2 - z_1 \neq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Обозначим $p(\tau_1, \tau_2)$ – совместная плотность вероятности длительностей двух соседних интервалов (t_1, t_2) , (t_2, t_3) ; $\tau_1 = t_2 - t_1$, $\tau_2 = t_3 - t_2$ – значения длительностей, $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$. В силу стационарного режима расположение одного интервала (t_k, t_{k+1}) либо двух соседних интервалов (t_k, t_{k+1}) , (t_{k+1}, t_{k+2}) между моментами наступления событий $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$, $k = 1, 2, \dots$, на временной оси произвольно.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Совместная плотность вероятности $p(\tau_1, \tau_2)$ длительностей двух соседних интервалов для обобщенного асинхронного потока событий в случае $z_2 - z_1 \neq 0$ имеет вид [17]:

$$\begin{aligned} p(\tau_1, \tau_2) &= p(\tau_1) p(\tau_2) + \gamma (1 - \gamma) \frac{\lambda_1 \lambda_2 - p q \alpha_1 \alpha_2}{z_1 z_2} (z_1 e^{-z_1 \tau_1} - z_2 e^{-z_2 \tau_1}) (z_1 e^{-z_1 \tau_2} - z_2 e^{-z_2 \tau_2}), \\ \tau_1 &\geq 0, \tau_2 \geq 0, \\ \gamma (1 - \gamma) &= \frac{\alpha_1 \alpha_2 z_1 z_2 (\lambda_1 - \lambda_2 + p \alpha_1 - q \alpha_2) (\lambda_1 - \lambda_2 + q \alpha_1 - p \alpha_2)}{(z_2 - z_1)^2 (\lambda_1 \alpha_2 + \lambda_2 \alpha_1 + (p + q) \alpha_1 \alpha_2)^2}, \\ z_2 &> z_1 > 0, z_2 - z_1 \neq 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где z_1, z_2 определены в (1); $p(\tau_k)$ определены в (1) для $\tau = \tau_k$, $k = 1, 2$.

Из анализа (2) вытекают условия рекуррентности и соответствующие плотности $p(\tau)$.

1. Если $\lambda_1 - \lambda_2 + p \alpha_1 - q \alpha_2 = 0$, то $\gamma (1 - \gamma) = 0$ и $p(\tau_1, \tau_2)$ факторизуется.

Подставляя условие $\lambda_1 - \lambda_2 + p \alpha_1 - q \alpha_2 = 0$ в (1), находим плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями $p(\tau)$ в виде:

$$p(\tau) = (p \alpha_1 + \lambda_1) e^{-(p \alpha_1 + \lambda_1) \tau}, \tau \geq 0.$$

В этом случае обобщенный асинхронный поток вырождается в простейший с параметром $p \alpha_1 + \lambda_1$.

2. Если $\lambda_1 - \lambda_2 + q\alpha_1 - p\alpha_2 = 0$, то $\gamma(1-\gamma) = 0$ и $p(\tau_1, \tau_2)$ факторизуется.

Подставляя условие $\lambda_1 - \lambda_2 + q\alpha_1 - p\alpha_2 = 0$ в (1), находим плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями $p(\tau)$ в виде:

$$p(\tau) = (q\alpha_1 + \lambda_1)e^{-(q\alpha_1 + \lambda_1)\tau}, \tau \geq 0.$$

Как и в предыдущем случае обобщенный асинхронный поток вырождается в простейший с параметром $q\alpha_1 + \lambda_1$.

3. Если $\lambda_1\lambda_2 - pq\alpha_1\alpha_2 = 0$, то совместная плотность вероятности $p(\tau_1, \tau_2)$ факторизуется. Подставляя условие $\lambda_1\lambda_2 - pq\alpha_1\alpha_2 = 0$ в (1), находим плотность вероятности значений длительности интервала между соседними событиями $p(\tau)$ в виде:

$$p(\tau) = \gamma z_1 e^{-z_1\tau} + (1-\gamma)z_2 e^{-z_2\tau}, \tau \geq 0, \quad (3)$$

$$\gamma = \frac{z_2 - \lambda_1 - \lambda_2}{z_2 - z_1}, \quad z_2 - z_1 \neq 0.$$

Далее везде рассматривается рекуррентный поток в случае 3.

3. Преобразование Лапласа плотности вероятности общего периода ненаблюдаемости

Пусть ξ – длительность общего периода ненаблюдаемости в рекуррентном обобщенном асинхронном потоке, функционирующем в условиях продлевающегося мертвого времени фиксированной длительности $T \neq 0$. Последовательность $t_1, t_2, \dots$ моментов наступления событий в наблюдаемом потоке образует вложенную цепь Маркова, и рекуррентность наблюдаемого потока сохраняется.

Рассмотрим функцию Пальма $\phi_0(T) = \int_T^\infty \tilde{p}(x)dx$ – вероятность того, что на интервале $(0, T)$ событий рекуррентного потока не наступит при условии, что в начальный момент времени интервала $(0, T)$ событие наступило [18]; здесь $\tilde{p}(x)$ – плотность вероятности длительности интервала между соседними событиями в дважды стохастическом рекуррентном потоке.

Теорема 3. Преобразование Лапласа плотности вероятности значений длительности общего периода ненаблюдаемости в рекуррентном обобщенном асинхронном потоке с продлевающимся мертвым временем в случае $z_2 - z_1 \neq 0$ имеет вид:

$$g_\xi(s) = \frac{\phi_0(T)}{e^{sT}} \left[1 - \left[(1 - e^{-(s+z_1)T}) z_1 \frac{z_2 - \lambda_1 - \lambda_2}{(s+z_1)(z_2-z_1)} + (1 - e^{-(s+z_2)T}) z_2 \frac{-z_1 + \lambda_1 + \lambda_2}{(s+z_2)(z_2-z_1)} \right] \right]^{-1}, \quad (4)$$

где $\phi_0(T) = \gamma e^{-z_1 T} + (1-\gamma)e^{-z_2 T}$; величина γ определена в (3); z_1, z_2 – в (1).

Доказательство. Воспользуемся результатом, полученным в [17]. Преобразование Лапласа плотности вероятности значений длительности общего периода ненаблюдаемости в рекуррентном дважды стохастическом потоке событий, функционирующем в условиях продлевающегося мертвого времени, имеет вид:

$$g_\xi(s) = \frac{\phi_0(T)}{e^{sT}} \left[1 - \int_0^T e^{-sx} \tilde{p}(x) dx \right]^{-1}. \quad (5)$$

Переобозначая плотность $p(\tau)$, определенную в (3), на $\tilde{p}(x)$, подставляя в (5) и выполняя необходимые преобразования, приходим к (4). Теорема доказана.

Лемма 3. Математическое ожидание длительности общего периода ненаблюдаемости ξ в рекуррентном обобщенном асинхронном потоке событий с продлевающимся мертвым временем в случае $z_2 - z_1 \neq 0$ имеет вид:

$$M\xi = \frac{1}{z_1 z_2 \varphi_0(T)} \left[\alpha_1 + \alpha_2 - \gamma z_2 e^{-z_1 T} - (1 - \gamma) z_1 e^{-z_2 T} \right], \quad (6)$$

где z_1, z_2 определены в (1); γ – в (3); $\varphi_0(T)$ – в (4).

Доказательство. Можно показать, что с использованием вида $g_\xi(s)$, определенного в (5), математическое ожидание ξ запишется в виде:

$$M\xi = -g'_\xi(s) \Big|_{s=0} = T + \frac{1}{\varphi_0(T)} \int_0^T x \tilde{p}(x) dx. \quad (7)$$

Подставляя $\tilde{p}(x)$, определенную в (3), в (7) и выполняя необходимые преобразования, находим (6).

4. Преобразование Лапласа плотности вероятности длительности интервала между соседними событиями в наблюдаемом потоке

Рассмотрим интервал времени (t_k, t_{k+1}) , значение длительности которого есть $\tau_k = t_{k+1} - t_k$. С другой стороны, длительность этого интервала равна $\tau = \xi + \eta$, где η – длительность интервала между моментом окончания общего периода ненаблюдаемости и моментом t_{k+1} . Индекс k опущен в силу произвольного расположения интервала на временной оси. Случайные величины η и ξ являются независимыми. Тогда плотность вероятности $p(\tau)$ длительности интервала между событиями в наблюдаемом потоке запишется в виде:

$$p(\tau) = \int_0^\tau p(\xi) p(\eta|\xi) d\xi = \int_0^\tau p(\xi) p(\tau - \xi|\xi) d\xi. \quad (8)$$

Теорема 4. Преобразование Лапласа плотности вероятности значений длительности интервала между соседними событиями в рекуррентном обобщенном асинхронном потоке с продлевающимся мертвым временем в случае $z_2 - z_1 \neq 0$ имеет вид:

$$g_\tau(s) = \left[(z_1 + s)(z_2 + s)(\alpha_1 + \alpha_2) \right]^{-1} \left[z_1 z_2 (s + \alpha_1 + \alpha_2) g_\xi(s) + \right. \\ \left. + \alpha_1 \alpha_2 (\lambda_1 - \lambda_2 + q \alpha_1 - p \alpha_2) (\lambda_1 - \lambda_2 + p \alpha_1 - q \alpha_2) [z_1 z_2]^{-1} s g_\xi(\alpha_1 + \alpha_2 + s) \right], \quad (9)$$

где функция $g_\xi(s)$ определена формулой (4); $g_\xi(\alpha_1 + \alpha_2 + s)$ определена формулой (4), в которой нужно заменить аргумент s на $\alpha_1 + \alpha_2 + s$.

Доказательство. Найдём выражение для $p(\tau - \xi|\xi)$. Пусть момент наступления события в наблюдаемом потоке есть $\tau = 0$. Рассмотрим временной интервал $(0, \tau) = (0, \xi + \eta)$ и зафиксируем ξ . Пусть $p_{ij}(\tau - \xi)$ – условные вероятности того, что в интервале длительности $\eta = \tau - \xi$ не наступит событий наблюдаемого потока и $\lambda(\xi + \eta) = \lambda_j$ при условии, что $\lambda(\xi) = \lambda_i$, $i, j = 1, 2$. По смыслу введенные условные вероятности не отличаются от вероятностей $p_{ij}(\tau)$ для обобщенного асинхронного потока, полученных в [17]:

$$p_{11}(\tau) = -\frac{\lambda_1 + \alpha_1 - z_2}{z_2 - z_1} e^{-z_1 \tau} + \frac{\lambda_1 + \alpha_1 - z_1}{z_2 - z_1} e^{-z_2 \tau}, \\ p_{12}(\tau) = \frac{\alpha_1(1-p)}{z_2 - z_1} (e^{-z_1 \tau} - e^{-z_2 \tau}), \quad p_{21}(\tau) = \frac{\alpha_2(1-q)}{z_2 - z_1} (e^{-z_1 \tau} - e^{-z_2 \tau}), \\ p_{22}(\tau) = \frac{\lambda_1 + \alpha_1 - z_1}{z_2 - z_1} e^{-z_1 \tau} - \frac{\lambda_1 + \alpha_1 - z_2}{z_2 - z_1} e^{-z_2 \tau}, \quad \tau \geq 0, \quad z_2 - z_1 \neq 0; \quad (10)$$

z_1, z_2 определены в (1).

Тогда условные вероятности $p(\tau - \xi | \xi)$, $i, j = 1, 2$, определяются формулами (10), в которых аргумент τ заменён на $\tau - \xi$.

Введем $P_i(\tau - \xi) = p_{i1}(\tau - \xi) + p_{i2}(\tau - \xi)$ – условную вероятность того, что в интервале (ξ, τ) событий наблюдаемого потока не произойдет при условии, что $\lambda(\xi) = \lambda_i$, $i = 1, 2$. Тогда условная плотность вероятности длительности интервала (ξ, τ) по определению есть $p_i(\tau - \xi) = -P'_i(\tau - \xi)$, $i = 1, 2$. Учитывая (10), находим

$$\begin{aligned} p_1(\tau - \xi) &= \frac{1}{z_2 - z_1} \left\{ z_1(-\lambda_1 - \alpha_1 p + z_2) e^{-z_1(\tau - \xi)} + z_2(\lambda_1 + \alpha_1 p - z_1) e^{-z_2(\tau - \xi)} \right\}, \\ p_2(\tau - \xi) &= \frac{1}{z_2 - z_1} \left\{ z_1[\lambda_1 + \alpha_1 + \alpha_2(1 - q) - z_1] e^{-z_1(\tau - \xi)} + z_2[-(\lambda_1 + \alpha_1 + \alpha_2(1 - q)) + z_2] e^{-z_2(\tau - \xi)} \right\}, \tau \geq \xi. \end{aligned} \quad (11)$$

Введем вероятность $\pi_i(\tau | \xi)$ – условную вероятность того, что $\lambda(\tau) = \lambda_i$, $i = 1, 2$, при условии, что в момент $\tau = 0$ событие наступило и наступило мертвое время длительности ξ . Тогда

$$p(\tau - \xi | \xi) = \pi_1(\tau = \xi | \xi) p_1(\tau - \xi) + \pi_2(\tau = \xi | \xi) p_2(\tau - \xi). \quad (12)$$

Вероятности $\pi_i(\tau = \xi | \xi)$ по смыслу совпадают с вероятностями $\pi_i(T)$, $i = 1, 2$, определенными в [17], в которых вместо периода ненаблюдаемости T следует рассматривать ξ :

$$\begin{aligned} \pi_2(\xi) &= \pi_2(\tau = \xi | \xi) = \pi_2 - [\pi_2 - \pi_2(0 | \xi)] e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)\xi}, \\ \pi_2(0 | \xi) &= \frac{p_{12} + \delta \pi_2 [1 - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)\xi}]}{1 - \delta e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)\xi}}, \delta = (\lambda_1 \lambda_2 - p q \alpha_1 \alpha_2) / z_1 z_2, \\ p_{12} &= \alpha_1(\lambda_2 + p \alpha_2) / z_1 z_2, \pi_2 = \alpha_1 / (\alpha_1 + \alpha_2); \pi_1(\tau = \xi | \xi) = 1 - \pi_2(\tau = \xi | \xi). \end{aligned} \quad (13)$$

Принимая во внимание условие рекуррентности $\lambda_1 \lambda_2 - p q \alpha_1 \alpha_2 = 0$ и подставляя (11), (13) в (12), находим

$$\begin{aligned} p(\tau - \xi | \xi) &= \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < \xi, \\ \Gamma(\xi) z_1 e^{-z_1(\tau - \xi)} + (1 - \Gamma(\xi)) z_2 e^{-z_2(\tau - \xi)}, & \tau \geq \xi, \end{cases} \\ \Gamma(\xi) &= \frac{1}{z_2 - z_1} \left[z_2 - (\lambda_1 + p \alpha_1) \pi_1(\xi) - (\lambda_2 + q \alpha_2) \pi_2(\xi) \right], \\ \pi_2(\xi) &= \pi_2 \left[1 - \alpha_2 \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + q \alpha_1 - p \alpha_2}{z_1 z_2} e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)\xi} \right], \pi_1(\xi) = 1 - \pi_2(\xi). \end{aligned} \quad (14)$$

Найдем преобразование Лапласа плотности $p(\tau)$, используя (8) и (14). Имеем

$$\begin{aligned} g_\tau(s) &= \int_0^\infty e^{-s\tau} p(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^\infty e^{-s\tau} \left[\int_0^\tau p(\xi) p(\tau - \xi | \xi) d\xi \right] d\tau = \int_0^\infty p(\xi) \left[\int_\xi^\infty e^{-s\tau} p(\tau - \xi | \xi) d\tau \right] d\xi = \\ &= \int_0^\infty p(\xi) \left[\int_\xi^\infty e^{-s\tau} \Gamma(\xi) z_1 e^{-z_1(\tau - \xi)} d\tau + \int_\xi^\infty e^{-s\tau} (1 - \Gamma(\xi)) z_2 e^{-z_2(\tau - \xi)} d\tau \right] d\xi. \end{aligned}$$

В выражении для $g_\tau(s)$ выполним замену переменных: $\tau - \xi = \eta$, $\tau = \xi + \eta$. Тогда

$$g_\tau(s) = \int_0^\infty p(\xi) \left[\int_0^\infty e^{-s(\eta + \xi)} z_1 \Gamma(\xi) e^{-z_1 \eta} d\eta + \int_0^\infty e^{-s(\eta + \xi)} z_2 (1 - \Gamma(\xi)) e^{-z_2 \eta} d\eta \right] d\xi.$$

Подставляя явный вид $\Gamma(\xi)$, определенный в (14), и выполняя достаточно трудоемкие преобразования, приходим к (9).

5. Оценка длительности мёртвого времени

Преобразование Лапласа (9) позволяет получить начальные моменты

$$M(\tau^l) = (-1)^l g_{\tau}^{(l)}(s) \Big|_{s=0}, \quad l=1, 2, \dots$$

Поэтому будем решать задачу оценивания длительности мертвого времени T методом моментов. Введем статистики $C_l = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tau_k^l$, $l=1, 2, \dots$, где $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ – значение длительности интервала между моментами t_k и t_{k+1} наступления событий в рекуррентном обобщенном асинхронном потоке с продлевающимся мертвым временем.

Предположим, что параметры потока $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, p, q$ являются известными. При количестве наблюдений $n \rightarrow \infty$ выборочный момент C_1 стремится к теоретическому моменту $M(\tau)$ [19]. Тогда для оценки длительности мертвого времени T имеем уравнение моментов $M(\tau) = C_1$.

Вычислив производную от (9) по s в точке $s=0$ и взяв её со знаком минус, получим уравнение для нахождения значения $\hat{T}$ оценки $\hat{T}$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{z_1 z_2} \left(z_1 + z_2 - \frac{z_1 z_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right) - \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\lambda_1 - \lambda_2 + q \alpha_1 - p \alpha_2) (\lambda_1 - \lambda_2 + p \alpha_1 - q \alpha_2)}{(\alpha_1 + \alpha_2) (z_1 z_2)^2} \times \\ & \times \frac{\gamma e^{-(z_1 + \alpha_1 + \alpha_2)T} + (1 - \gamma) e^{-(z_2 + \alpha_1 + \alpha_2)T}}{\left[1 - \frac{\gamma z_1}{z_1 + \alpha_1 + \alpha_2} (1 - e^{-(z_1 + \alpha_1 + \alpha_2)T}) - \frac{(1 - \gamma) z_2}{z_2 + \alpha_1 + \alpha_2} (1 - e^{-(z_2 + \alpha_1 + \alpha_2)T}) \right]} + M \xi = C_1, \end{aligned} \quad (15)$$

где z_1, z_2 определены в (1); $M \xi$ – в (6).

Обозначим левую часть уравнения (15) через $f(T)$. Можно показать, что функция $f(T)$, $T \geq 0$, является возрастающей. Уравнение $f(T) = C_1$ решается численно на интервале $0 \leq T \leq \tau_{\min}$, $\tau_{\min} = \min\{\tau_k\}$, $k = \overline{1, n}$. Возможные ситуации:

1) $f(T=0) \geq C_1$; в качестве значения оценки $\hat{T}$ выбирается $\hat{T}^* = 0$;

2) $f(T=0) < C_1$, тогда возможны случаи:

а) корень уравнения моментов (15) попадает в полуинтервал $(0, \tau_{\min}]$, тогда он и выбирается в качестве значения оценки $\hat{T} = \hat{T}^*$;

б) корень уравнения (15) больше, чем $\tau_{\min}$, тогда в качестве значения оценки $\hat{T}$ выбирается $\hat{T}^* = \tau_{\min}$.

6. Результаты статистических экспериментов

Для получения статистики C_1 построена имитационная модель, выходом которой является последовательность $t_1, t_2, \dots$ моментов наступления событий.

Имитационная модель реализована на языке программирования C# с использованием технологии WPF (Windows Presentation Foundation) и библиотеки Math.NET Numerics. Результат работы имитационной модели приведен на рис. 2.

Для установления стационарного режима проведен следующий эксперимент.

ЭКСПЕРИМЕНТ 1. В данном эксперименте фиксируется число опытов N , которые производятся над имитационной моделью, а время моделирования T_m изменяется. Значения исходных данных для имитационной модели представлены в табл. 1.

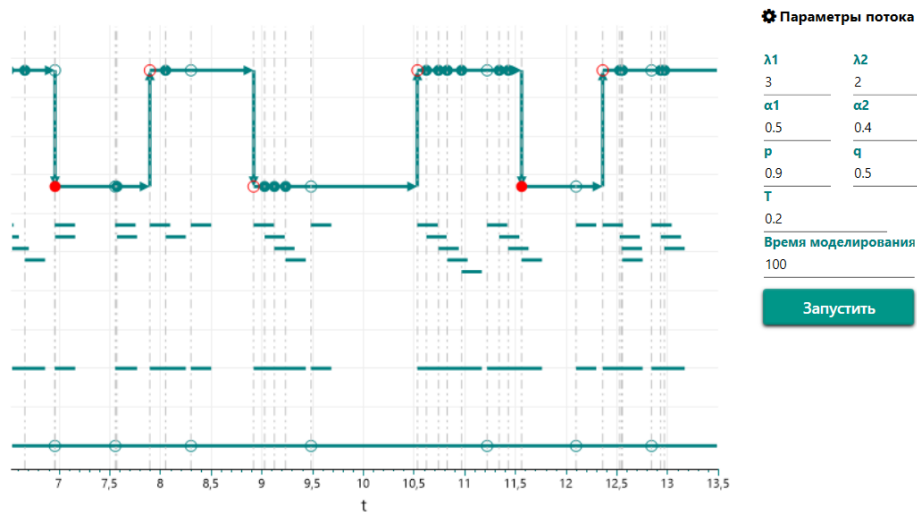


Рис. 2. Скриншот работы программы
Fig. 2 Screenshot of the program

Таблица 1

Исходные данные для эксперимента 1

$\lambda_1 = 0,8$	$\lambda_2 = 0,7$
$\alpha_1 = 0,1$	$\alpha_2 = 0,3$
$p = 0,5$	$q = 0,5$
$N = 1\,000$	$T = 0,1$

Численные результаты эксперимента 1, полученные в результате работы имитационной модели, приведены в табл. 2. В первой строке задается значение длительности времени моделирования T_m ; во второй строке – выборочное среднее значение длительности интервала между событиями в исходном потоке $\hat{M}(\hat{\tau}^\circ)$; в третьей строке – выборочное среднее значение длительности интервала между событиями в наблюдаемом потоке $\hat{M}(\hat{\tau})$; в четвертой строке – выборочное среднее значение длительности общего периода ненаблюдаемости $\hat{M}(\hat{\xi})$.

Таблица 2

Зависимость $\hat{M}(\hat{\tau})$, $\hat{M}(\hat{\tau}^\circ)$, $\hat{M}(\hat{\xi})$ от времени моделирования T_m

T_m	100	150	200	...	700	750	800	850	900	950	1 000
$\hat{M}(\hat{\tau}^\circ)$	1,1611	1,1802	1,1747	...	1,1792	1,1807	1,1767	1,1796	1,1742	1,1723	1,1758
$\hat{M}(\hat{\tau})$	1,2607	1,2851	1,2810	...	1,2858	1,2853	1,2806	1,2850	1,2888	1,2819	1,2825
$\hat{M}(\hat{\xi})$	0,1042	0,1043	0,1045	...	0,1045	0,1044	0,1043	0,1044	0,1044	0,1045	0,1043

Данные из табл. 2 демонстрируют сходимость оценок $\hat{M}(\hat{\tau})$, $\hat{M}(\hat{\tau}^\circ)$, $\hat{M}(\hat{\xi})$ к некоторым постоянным величинам. При времени моделирования $T_m \geq 800$ ед. времени устанавливается стационарный режим.

Для получения значения $\hat{T}$ оценки $\hat{T}$ длительности мёртвого времени T разработан следующий алгоритм оценивания:

- 1) задаются параметры потока с учетом условий $\lambda_1 > \lambda_2$, $\lambda_1 \lambda_2 = p q \alpha_1 \alpha_2$, $0 < p \leq 1$, $0 < q \leq 1$;
- 2) в течение T_m ед. времени работает имитационная модель потока для получения выборки $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, находится $\tau_{\min} = \min\{\tau_k\}$, вычисляется статистика C_1 ;
- 3) табулируется функция $f(T)$ и численно устанавливается, что $f(T)$ является возрастающей функцией;

4) численно решается уравнение (15) методом Ньютона; корень уравнения моментов (15) является единственным;

5) в результате шагов 1–4 получим $\hat{T}_1^*$ – значение оценки $\hat{T}$ в первом опыте;

6) шаги 2–4 повторяются для N опытов и находятся значения оценок $\hat{T}_1^*, \hat{T}_2^*, \dots, \hat{T}_N^*$.

Выборочное среднее оценки и выборочная вариация оценки вычисляются по следующим формулам: $\hat{M}(\hat{T}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \hat{T}_j^*$, $\hat{V}(\hat{T}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\hat{T}_j^* - T)^2$, где T – значение длительности мертвого времени, известное из имитационной модели потока.

Выборочное среднее количество событий исходного потока и выборочное среднее количество событий наблюдаемого потока вычисляются по формулам $\bar{n}_{\text{исх}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N n_{\text{исх}}^{(j)}$, $\bar{n}_{\text{набл}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N n_{\text{набл}}^{(j)}$, где $n_{\text{исх}}^{(j)}$ – количество событий исходного потока в j -м опыте, $n_{\text{набл}}^{(j)}$ – количество событий наблюдаемого потока в j -м опыте.

Для установления качества полученной оценки проведен следующий эксперимент.

ЭКСПЕРИМЕНТ 2. В данном эксперименте при одних и тех же параметрах потока меняется значение длительности мертвого времени T от $T = 0,1$ до $T = 1$ ед. времени.

Значения исходных данных представлены в табл. 3. Из эксперимента 1 время моделирования полагается равным $T_m = 800$ ед. времени.

Таблица 3

Исходные данные для эксперимента 2

$\lambda_1 = 5$	$\lambda_2 = 0,02$
$\alpha_1 = 1$	$\alpha_2 = 5$
$p = 0,1$	$q = 0,2$
$N = 1\,000$	$T_m = 800$

Табулируется функция $f(T)$. На рис. 3 представлен график функции $f(T)$ при значениях параметров, приведенных в табл. 3.

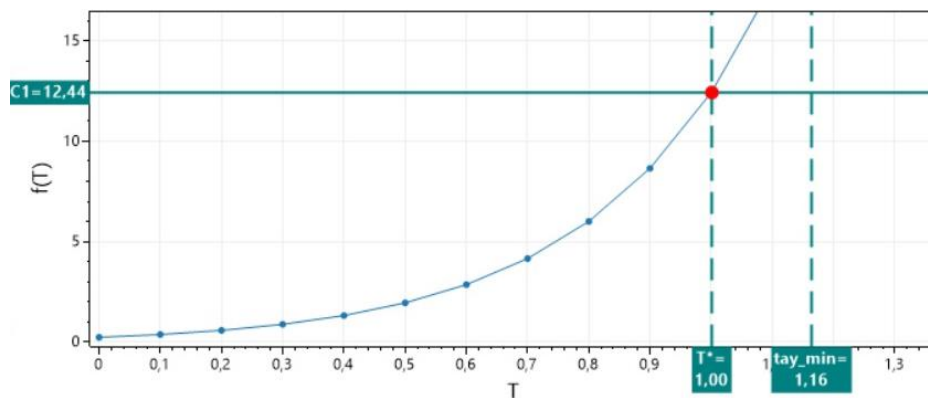


Рис. 3. График функции $f(T)$
Fig. 3. Graph of the function $f(T)$

Численные результаты работы алгоритма оценивания приведены в табл. 4. В первой строке табл. 4 задается значение длительности мертвого времени T ; во второй и третьей строках – выборочное среднее оценки $\hat{M}(\hat{T})$ и выборочная вариация $\hat{V}(\hat{T})$ соответственно; в четвертой и пятой строках – выборочное среднее количество событий исходного потока $\bar{n}_{\text{исх}}$ и выборочное среднее количество событий наблюдаемого потока $\bar{n}_{\text{набл}}$; в шестой строке – процент наблюдаемых событий $p = (\bar{n}_{\text{набл}} / \bar{n}_{\text{исх}}) 100\%$.

Зависимость $\hat{M}(\hat{T}), \hat{V}(\hat{T}), \bar{n}_{\text{исх}}, \bar{n}_{\text{набл}}, p$ от значения длительности мёртвого времени T

T	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\hat{M}(\hat{T})$	0,0977	0,1995	0,2999	0,4001	0,4995	0,5996	0,6993	0,7987	0,8971	0,9735
$\hat{V}(\hat{T})$	$6 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$1,4 \cdot 10^{-5}$	$4,5 \cdot 10^{-5}$	$9,7 \cdot 10^{-5}$	$1,89 \cdot 10^{-4}$	$3,54 \cdot 10^{-4}$	$5,93 \cdot 10^{-4}$	$10,83 \cdot 10^{-4}$
$\bar{n}_{\text{исх}}$	3 470	3 470	3 469	3 466	3 479	3 470	3 469	3 464	3 471	3 469
$\bar{n}_{\text{набл}}$	2 144	1 372	904	608	415	290	201	141	100	71
p	61,79	39,53	26,05	17,55	11,97	8,36	5,8	4,08	2,87	2,04

Анализируя результаты, представленные в табл. 4, видим, что с ростом значения длительности мертвого времени число событий в наблюдаемом потоке уменьшается, выборочная вариация $\hat{V}(\hat{T})$ растёт, что является естественным.

Замечание. Оценки $\hat{T}$ являются состоятельными, так как: а) случайные величины $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ являются независимыми и одинаково распределёнными; б) теоретический момент $M(\tau)$ существует; в) численно показано, что уравнение моментов (15) имеет единственное решение [19].

Заключение

В данной работе рассмотрен дважды стохастический обобщенный асинхронный поток случайных событий с двумя состояниями, функционирующий в стационарном режиме в условиях продлевающегося мертвого времени фиксированной длительности. Построена математическая модель данного потока. Получено преобразование Лапласа плотности вероятности значений длительности интервалов между соседними событиями в рекуррентном обобщенном асинхронном потоке (9), с использованием которого выведено уравнение моментов (15) для решения задачи оценивания длительности мертвого времени T . Поставлены статистические эксперименты на разработанной имитационной модели потока. Анализ полученных численных результатов позволяет утверждать, что полученные значения $\hat{T}$ оценок $\hat{T}$ длительности мертвого времени T имеют приемлемое качество в смысле выборочной вариации $\hat{V}(\hat{T})$; оценки $\hat{T}$ являются состоятельными.

Список источников

1. Вишневский В.М., Дудин А.Н., Клименок В.И. Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях. М. : Техносфера, 2018. 564 с.
2. Cox D.R. The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables // Proc. of the Cambridge Philosophical Society. 1955. V. 51 (3). P. 433–441.
3. Kingman Y.F.C. On doubly stochastic Poisson process // Proc. of the Cambridge Philosophical Society. 1964. V. 60 (4). P. 923–930.
4. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчёта фрагментов сетей связи. Ч. 1 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.
5. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчёта фрагментов сетей связи. Ч. 2 // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 1. С. 55–61.
6. Neuts M.F. A versatile Markov point process // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764–779.
7. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a bath markovian arrival process // Communication in Statistics Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1–46.
8. Нежелская Л.А. Совместная плотность вероятностей длительности интервалов модулированного МАР-потока событий и условия рекуррентности потока // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 1 (30). С. 57–67.
9. Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Минск : Университетское, 1988. 256 с.
10. Горцев А.М., Леонова М.А., Нежелская Л.А. Сравнение МП- и ММ-оценок длительности мертвого времени в обобщенном асинхронном потоке событий // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 4 (25). С. 32–42.

11. Горцев А.М., Калягин А.А., Нежелская Л.А. Оценка максимального правдоподобия длительности мертвого времени в обобщенном полусинхронном потоке // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2015. № 1 (30). С. 27–37.
12. Василевская Т.П., Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оценивание длительности мертвого времени и параметров синхронного альтернирующего потока с проявлением либо не проявлением событий // Вестник Томского государственного университета. 2004. № S9-2. С. 129–138.
13. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий с иницированием лишнего события // Вестник Томского государственного университета. 2004. № 284. С. 137–145.
14. Горцев А.М., Веткина А.В. Оценивание методом моментов параметра равномерного распределения длительности непродлевающегося случайного мертвого времени в рекуррентном полусинхронном потоке событий в общем и особом случаях // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 61. С. 47–60. doi: 10.17223/19988605/61/5
15. Нежелская Л.А., Пономаренко В.Д. Имитационное моделирование обобщенного асинхронного потока событий с продлевающимся мертвым временем // Труды Томского государственного университета. Сер. физико-математическая. 2023. Т. 308. С. 27–35.
16. Нежелская Л.А. Оценка состояний дважды стохастических потоков событий : учеб. пособие. Томск : Изд-во Том. гос. ун-та, 2020. 210 с.
17. Нежелская Л.А. Оценка состояний и параметров дважды стохастических потоков событий : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Томск, 2016. 341 с.
18. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М. : Физматгиз, 1963. 236 с.
19. Малинковский Ю.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. Ч. 2: Математическая статистика. 146 с.

References

1. Vishnevskiy, V.M., Dudin, A.N. & Klimenok, V.I. (2018) *Stokhasticheskie sistemy s korrelirovannymi potokami. Teoriya i primeneniye v telekommunikatsionnykh setyakh* [Stochastic Systems with Correlated Flows. Theory and Application in Telecommunication Networks]. Moscow: Tekhnosfera.
2. Cox, D.P. (1955) The analysis of non-Markovian stochastic process by the inclusion of supplementary variables. *Proceeding of the Cambridge Philosophical Society*. 51(3). pp. 433–441.
3. Kingman, Y.F.C. (1964) On double stochastic Poisson process. *Proceeding of the Cambridge Philosophical Society*. 60(4). pp. 923–930.
4. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1979) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch. 1 [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks. Part 1]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 6. pp. 92–99.
5. Basharin, G.P., Kokotushkin, V.A. & Naumov, V.A. (1980) O metode ekvivalentnykh zamen rascheta fragmentov setey svyazi. Ch. 2 [On the equivalent substitutions method for computing fragments of communication networks. Part 2]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika*. 1. pp. 55–61.
6. Neuts, M.F. (1979) A versatile Markov point process. *Journal of Applied Probability*. 16. pp. 764–779.
7. Lucantoni, D.M. (1991) New results on the single server queue with a bath Markovian arrival process. *Communication in Statistics Stochastic Models*. 7. pp. 1–46.
8. Nezhe'skaya, L.A. (2015) Joint probability density of the intervals' duration in modulated MAP event flows and its recurrence conditions. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(30). pp. 57–67.
9. Apanasovich, V.V., Kolyada, A.A. & Chernyavskiy, A.F. (1988) *Statisticheskiy analiz sluchaynykh potokov v fizicheskom eksperimente* [Statistical Analysis of Random Flows in Physical Experiment]. Minsk: Universitetskoe.
10. Gortsev, A.M., Leonova, M.A. & Nezhe'skaya, L.A. (2013) The comparison of maximum likelihood estimation and method of moments estimation of dead time value in a generalized asynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 4(25). pp. 32–42.
11. Gortsev, A.M., Kalyagin, A.A. & Nezhe'skaya, L.A. (2015) Maximum likelihood estimation of dead time at a generalized semysynchronous flow of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 1(30). pp. 27–37.
12. Vasilevskaya, T.P., Gortsev, A.M. & Nezhe'skaya, L.A. (2004) Estimation of dead time duration and parameters of synchronous alternating flow with manifestation or non-manifestation of events. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. S9–2. pp. 129–138.
13. Gortsev, A.M. & Nissenbaum, O.V. (2004) Estimation of the dead time duration and parameters of the asynchronous alternating stream of events with initialization of an extra event. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 284. pp. 137–145.

14. Gortsev, A.M. & Vetkina, A.V. (2022) Estimation by the method of moments of the parameter of the uniform distribution of the duration of non-transient random dead time in the recurrent semi-synchronous flow of events in general and special cases. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 61. pp. 47–60. DOI: 10.17223/19988605/61/5
15. Nezhel'skaya, L.A. & Ponomarenko, V.D. (2023) Simulation model of the generalized asynchronous flow of events with prolonging dead time. *Trudy Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. fiziko-matematicheskaya*. 308. pp. 27–35.
16. Nezhel'skaya, L.A. (2020) *Otsenka sostoyaniy dvazhdy stokhasticheskikh potokov sobytiy* [Estimation of States of Doubly Stochastic Flows of Events]. Tomsk: Tomsk State University.
17. Nezhel'skaya, L.A. (2016) *Otsenka sostoyaniy i parametrov dvazhdy stokhasticheskikh potokov sobytiy* [Evaluation of states and parameters of doubly stochastic flows of events]. Physics and Mathematics Dr. Diss. Tomsk.
18. Khinchin, A.Ya. (1963) *Raboty po matematicheskoy teorii massovogo obsluzhivaniya* [Works on the Mathematical Theory of Queuing]. Moscow: Fizmatgiz
19. Malinkovsky, Yu.V. (2004) *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika* [Theory of Probabilities and Mathematical Statics]. Vol. 2. Gomel: GSU.

Информация об авторах:

Нежелская Людмила Алексеевна – профессор, доктор физико-математических наук, заведующая кафедрой прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ludne@mail.ru

Пonomarenko Валентина Денисовна – магистрант кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: valya.ponomarenko.00@mail.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Nezhel'skaya Lyudmila A. (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russia Federation). E-mail: ludne@mail.ru

Ponomarenko Valentina D. (Master's Student, Department of Applied Mathematics, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russia Federation). E-mail: valya.ponomarenko.00@mail.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 08.09.2024; принята к публикации 02.12.2024

Received 08.09.2024; accepted for publication 02.12.2024