

Научная статья

УДК 515.1

MSC: 54F65

doi: 10.17223/19988621/92/4

О линейных гомеоморфизмах пространств непрерывных функций с топологией поточечной сходимости на всюду плотных подмножествах

Татьяна Евгеньевна Хмылёва¹, Кира Максимовна Петрова²

^{1,2} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ tex2150@yandex.ru

² lililitiy534@yandex.ru

Аннотация. По аналогии с пространствами $C_p(X)$ введены в рассмотрение пространства $C_{p,A}(X)$ непрерывных вещественнозначных функций с топологией поточечной сходимости на всюду плотном подмножестве $A \subset X$. Для пространств $C_{p,A}[a,b]$ и $C_{p,B}[c,d]$, где $A = [a,b] \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и $B = [c,d] \setminus \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, доказано, что пространства $C_{p,A}[a,b]$ и $C_{p,B}[c,d]$ линейно гомеоморфны тогда и только тогда, когда $n = m$.

Ключевые слова: непрерывные функции, гомеоморфизм, топология поточечной сходимости, линейные ограниченные функционалы, функции ограниченной вариации, интеграл Стильеса

Для цитирования: Хмылева Т.Е., Петрова К.М. О линейных гомеоморфизмах пространств непрерывных функций с топологией поточечной сходимости на всюду плотных подмножествах // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 92. С. 48–55. doi: 10.17223/19988621/92/4

Original article

On linear homeomorphisms of spaces of continuous functions with the pointwise convergence topology

Tatiana E. Khmyleva¹, Kira M. Petrova²

^{1,2} Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

¹ tex2150@yandex.ru

² lililitiy534@yandex.ru

Abstract. In this work, by analogy with spaces $C_p(X)$, spaces $C_{p,A}(X)$ are defined, where A is an everywhere dense subset of X . The base of neighborhoods of the function $f \in C_{p,A}(X)$ is defined by sets of the form

$$U(f, x_1, \dots, x_n, \varepsilon) = \{g \in C(X) : |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\},$$

where $x_i \in A$ and $\varepsilon > 0$.

We consider the question of linear homeomorphism of the spaces $C_{p,A}[a,b]$ and $C_{p,B}[c,d]$, where $A = [a,b] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ and $B = [c,d] \setminus \{b_1, \dots, b_m\}$. If $n = m$ and the number of endpoints of the intervals $[a,b]$ and $[c,d]$ contained in the sets $\{a_1, \dots, a_n\}$ and $\{b_1, \dots, b_m\}$ is the same, then obviously the spaces $C_{p,A}[a,b]$ and $C_{p,B}[c,d]$ are linearly homeomorphic. If the number of endpoints in these sets is different, then the linear homeomorphism is proved by decomposing the spaces $C_{p,A}[a,b]$ and $C_{p,B}[c,d]$ into a product.

At $n \neq m$, it is proved that the spaces $C_{p,A}[a,b]$ and $C_{p,B}[c,d]$ are not linearly homeomorphic. The proof is carried out by contradiction. Suppose that there is a linear homeomorphism $T : C_{p,A}[a,b] \rightarrow C_{p,B}[c,d]$. Then, by the closed graph theorem, T is an isomorphism of Banach spaces $C[a,b]$ and $C[c,d]$. Therefore, we can consider the mapping $T^* : C^*[c,d] \rightarrow C^*[a,b]$. Using the general form of functionals in spaces $C^*[c,d]$ and $C^*[a,b]$, we prove that T^* is not an isomorphism, which contradicts our assumption.

As a consequence, we obtain that the spaces of uniformly continuous functions with the topology of pointwise convergence $UC_p[a,b]$ and $UC_p(a,b)$ are not linearly homeomorphic.

Keywords: continuous functions, homeomorphism, pointwise convergence topology, linearly bounded functionals, function of bounded variation, Stieltjes integral

For citation: Khmyleva, T.E., Petrova, K.M. (2024) On linear homeomorphisms of spaces of continuous functions with the pointwise convergence topology. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 92. pp. 48–55. doi: 10.17223/19988621/92/4

Введение

Все рассматриваемые в данной статье пространства являются тихоновскими.

Определение 1. Пусть $A \subset X$ – всюду плотное подмножество. Пространство $C_{p,A}(X)$ – пространство непрерывных вещественнозначных функций, где база окрестностей функции $f \in C_{p,A}(X)$ задается множествами вида:

$$U(f, x_1, \dots, x_n, \varepsilon) = \{g \in C(X) : |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}, \text{ где } x_i \in A \text{ и } \varepsilon > 0.$$

Через $\pi_A : C_p(X) \rightarrow C_p(A)$ обозначим отображение сужения функций из $C_p(X)$ на A , т.е. $\pi_A(f) = f|_A$ для всех $f \in C_p(X)$. Подпространство $\pi_A(C_p(X)) \rightarrow C_p(A)$ обозначают $C_p(A|X)$.

Известно, что если $A \subset X$ – всюду плотное подмножество, то $\pi : C_p(X) \rightarrow C_p(A|X)$ – взаимно однозначное непрерывное отображение [1. С. 17]), т.е. уплотнение. Но если мы рассмотрим отображение $\pi : C_{p,A}(X) \rightarrow C_p(A|X)$, то нетрудно увидеть, что получаем линейный гомеоморфизм.

Для компакта X через $C(X)$ обозначаем пространство всех непрерывных вещественнозначных функций с нормой $\|f\| = \max\{|f(x)| : x \in X\}$.

$C^*(X)$ – пространство линейных непрерывных функционалов Φ на пространстве $C(X)$ с нормой $\|\Phi\| = \sup\{|\Phi(f)| : \|f\| \leq 1\}$.

$C_p^*(X)$ – пространство линейных непрерывных функционалов ϕ на пространстве $C_p(X)$. Известно, что если $\phi \in C_p^*[a, b]$, то

$$\phi = \alpha_1 \delta_{x_1} + \dots + \alpha_l \delta_{x_l},$$

где $x_i \in [a, b]$ и $\delta_{x_i} f = f(x_i)$ [2. С. 400].

Через $V[a, b]$ обозначаем множество функций ограниченной вариации, заданных на промежутке $[a, b]$, $\bigvee_a^b g$ – вариация функции $g \in V[a, b]$. По теореме

Жордана любая функция $g \in V[a, b]$ представима в виде: $g = v - u$, где v, u – убывающие функции на $[a, b]$, и $v(x) = \bigvee_a^x g$. Следовательно, $\bigvee_{x_1}^{x_2} g = v(x_2) - v(x_1)$ для любых $x_1, x_2 \in [a, b]$.

Для подмножества $Y \subset X$ обозначим $C^0(X|Y) = \{f \in C(X) : f|_Y \equiv 0\}$. Если это пространство наделено топологией поточечной сходимости, то пишем $C_p^0(X|Y) = \{f \in C_p(X) : f|_Y \equiv 0\}$.

Если $X = \bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n$ – топологическая сумма тихоновских пространств X_n , то ясно, что $C_p(X) = \prod_{n=1}^{\infty} C_p(X_n)$. Для $f = \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} C_p(X_n)$ пусть $\|f_n\| = \sup\{|f_n(x)| : x \in X\}$.

Положим

$$\left(\prod_{n=1}^{\infty} C_p(X_n) \right)_{c_0} = \left\{ f = \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} C_p(X_n) : \{n \in \mathbb{N} : \|f_n\| > \varepsilon\} \text{ — конечно, } \forall \varepsilon > 0 \right\}.$$

Пусть $\mathbb{R}^{\omega}$ – счетное произведение прямых, $c \subset \mathbb{R}^{\omega}$ – подпространство всех сходящихся числовых последовательностей.

$X \sim Y$ означает, что топологические пространства X и Y гомеоморфны. Если X и Y линейные топологические пространства, то $X \cong Y$ означает, что Y и Y линейно гомеоморфны.

Основные результаты

Мы рассматриваем пространства $C_{p,A}[a, b]$ и $C_{p,B}[c, d]$, где $A = [a, b] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, $B = [c, d] \setminus \{b_1, \dots, b_m\}$.

Теорема 1. Если $n = m$, то пространства $C_{p,A}[a, b]$ и $C_{p,B}[c, d]$ являются линейно гомеоморфными.

Доказательство. Рассмотрим два случая.

А) Пусть $|\{a, b\} \cap \{a_1, \dots, a_n\}| = |\{c, d\} \cap \{b_1, \dots, b_n\}|$, т.е. количество концевых точек во множествах A и B одинаково.

В этом случае существует гомеоморфизм $\varphi: [a, b] \rightarrow [c, d]$ такой, что $\varphi(a_i) = b_i$ для всех $i = 1, \dots, n$. Нетрудно видеть, что отображение $T: C_{p,B}[c, d] \rightarrow C_{p,A}[a, b]$, действующее по формуле $Tf = f \circ \varphi$ для любого $f \in C_{p,B}[c, d]$, является искомым линейным гомеоморфизмом.

Б) $|\{a, b\} \cap \{a_1, \dots, a_n\}| \neq |\{c, d\} \cap \{b_1, \dots, b_n\}|$, т.е. количество концевых точек во множествах A и B различно.

Проведем доказательство для случая $a_1 = a$ и $\{b_1, \dots, b_n\} \subset (c, d)$. В остальных случаях доказательство аналогично. Не нарушая общности, будем считать, что

$b_1 < \dots < b_n$. Возьмем две последовательности $y_k = b_1 - \frac{\delta}{k}$ и $y'_k = b_1 + \frac{\delta}{k}$, причем δ выбрано так, что $y_1 = c$ и $y'_1 < b_2$. Рассмотрим множество $F = \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \cup \{y'_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда для любой функции $f \in C_{p,B}[c, d]$ выполнено

$$f|_F = \{f(y_1), f(y'_1), f(y_2), f(y'_2), \dots\} \in c.$$

Для произвольного элемента $h = \{h_i\} \in c$ и $k \in \mathbb{N}$ определим линейную функцию l_k , заданную на промежутке $[y_k, y_{k+1}]$, такую что $l_k(y_k) = h_{2k}$, а $l_k(y_{k+1}) = h_{2k+2}$. Аналогично определим функцию l'_k , заданную на промежутке $[y'_{k+1}, y'_k]$, такую что $l'_k(y'_{k+1}) = h_{2k+1}$, $l'_k(y'_k) = h_{2k-1}$ и $l'_0 \equiv h_1$ на промежутке $[y'_1, d]$.

Рассмотрим оператор $P: c \rightarrow C_{p,B}[c, d]$, определенный формулой

$$P(h)(y) = \begin{cases} l_k(y), & \text{если } y \in [y_k, y_{k+1}], \\ l'_k(y), & \text{если } y \in [y'_{k+1}, y'_k], \\ l'_0(y), & \text{если } y \in [y'_1, d], \\ \lim_{k \rightarrow \infty} h_k, & \text{если } y = b_1. \end{cases}$$

Поскольку значения линейных функций l_k и l'_k непрерывно зависят от значений на концах промежутка, оператор P является непрерывным. Линейность этого оператора очевидна.

Теперь рассмотрим оператор $S: C_{p,B}[c, d] \rightarrow c \times C_{p,B}^0([c, d] | F)$, действующий по формуле

$$Sf = (f|_F, f - P(f|_F)).$$

Нетрудно проверить, что такой оператор является линейной непрерывной биекцией. Обратный оператор $S^{-1}: c \times C_{p,B}^0([c, d] | F) \rightarrow C_{p,B}[c, d]$, действующий по правилу

$$S^{-1}(h, f) = f + P(h),$$

также является линейной непрерывной биекцией. Следовательно,

$$C_{p,B}[c, d] \cong c \times C_{p,B}^0([c, d] | F).$$

Обозначим $I'_k = [y'_{k+1}, y'_k]$, $I_k = [y_k, y_{k+1}]$ и каждому элементу $f \in C_{p,B}^0([c, d] | F)$ поставим в соответствие две последовательности $\{f | I_k\}_{k=1}^\infty$, $\{f | I'_k\}_{k=1}^\infty$ и функцию $f|_{[y'_1, d]}$.

Тогда получим

$$C_{p,B}^0([c, d] | F) \cong \left(\prod_{k=1}^\infty C_p^0(I_k | \{y_k, y_{k+1}\}) \right)_{c_0} \times \left(\prod_{k=1}^\infty C_p^0(I'_k | \{y'_{k+1}, y'_k\}) \right)_{c_0} \times C_{p,B}^0([y'_1, d] | \{y'_1\}).$$

Поскольку $I_k \sim [0, 1] \sim I'_k$, то

$$C_{p,B}^0([c, d] | F) \cong \left(\prod_{k=1}^\infty C_p^0([0, 1] | \{0, 1\}) \right)_{c_0} \times C_{p,B}^0([y'_1, d] | \{y'_1\}).$$

Следовательно,

$$C_{p,B}[c, d] \cong c \times \left(\prod_{k=1}^\infty C_p^0([0, 1] | \{0, 1\}) \right)_{c_0} \times C_{p,B}^0([y'_1, d] | \{y'_1\}).$$

Для пространства $C_{p,A}[a, b]$ возьмем последовательность $x_k = a_1 + \frac{\delta}{k} = a + \frac{\delta}{k}$, причем δ выбрана так, что $x_1 < a_2$. Рассмотрим множество $F' = \{x_k\}_{k=1}^\infty$. Тогда аналогично предыдущему получим

$$C_{p,A}[a, b] \cong c \times C_{p,A}^0([a, b] | F') \cong c \times \left(\prod_{k=1}^\infty C_p^0([0, 1] | \{0, 1\}) \right)_{c_0} \times C_{p,A}^0([x_1, b] | \{x_1\}).$$

Так как выброшенных точек в отрезках $[x_1, b]$ и $[y'_1, d]$ одинаковое число, то, применяя рассуждения из п. А), получаем, что

$$C_{p,A}^0([x_1, b] | \{x_1\}) \cong C_{p,B}^0([y'_1, d] | \{y'_1\}).$$

Следовательно, $C_{p,A}[a, b] \cong C_{p,B}[c, d]$.

Теорема 2. Если $n \neq m$, то пространства $C_{p,A}[a, b]$ и $C_{p,B}[c, d]$ не являются линейно гомеоморфными.

Доказательство. По теореме 1 мы можем ограничиться случаем $\{b_1, \dots, b_m\} \subset (c, d)$. Пусть $A = [a, b] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, $B = [c, d] \setminus \{b_1, \dots, b_m\}$ и $n > m$. Предположим, существует линейный гомеоморфизм $T: C_{p,A}[a, b] \rightarrow C_{p,B}[c, d]$. Тогда оператор $T^*: C_{p,B}^*[c, d] \rightarrow C_{p,A}^*[a, b]$, действующий по правилу $T^*\phi = \phi \circ T$, – тоже линейный гомеоморфизм. По следствию из теоремы о замкнутом графике для линейного отображения в банаховых пространствах получаем, что отображение $T: C[a, b] \rightarrow C[c, d]$ является линейным гомеоморфизмом, $T^*: C^*[c, d] \rightarrow C^*[a, b]$ действует по той же формуле $T^*\phi = \phi \circ T$ и также является линейным гомеоморфизмом пространств $C^*[c, d]$ и $C^*[a, b]$.

Заметим, что если $\phi \in C_{p,A}^*[a, b]$, то

$$\phi = \alpha_1 \delta_{x_1} + \dots + \alpha_l \delta_{x_l},$$

где $x_i \in A$ и $\delta_{x_i} f = f(x_i)$. Так как $a_i \notin A$, то $\delta_{a_i} \in C^*[a, b]$, но $\delta_{a_i} \notin C_{p,A}^*[a, b]$ для $i = 1, \dots, n$.

Если $\phi \in C^*[c, d]$, то

$$\phi(Tf) = \phi_g(Tf) = \int_c^d Tf(y)dg,$$

где g – функция ограниченной вариации на промежутке $[c, d]$, такая что $g(c) = 0$ и $g(y) = g(y+0)$ для любого $y \in (c, d]$ [3. С. 384].

Для каждого $i \leq n$ существует функция $g_i \in V[c, d]$, такая что $(T^{-1})^* \delta_{a_i} = \phi_{g_i}$ и $g_i(b_k) = g(b_k+0)$ для $k = 1, \dots, m$.

По свойствам интеграла Стильтьеса

$$\alpha_1 \phi_{g_1} + \dots + \alpha_n \phi_{g_n} = \phi_{\alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_n g_n}.$$

Покажем, что существуют константы $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, такие что функция $g = \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_n g_n$ непрерывна в точках $b_1, \dots, b_m$ и $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0$. Непрерывность означает, что выполняются следующие равенства:

$$\begin{cases} \alpha_1 g_1(b_1) + \dots + \alpha_n g_n(b_1) = \alpha_1 g_1(b_1-0) + \dots + \alpha_n g_n(b_1-0), \\ \dots \dots \dots \\ \alpha_1 g_1(b_m) + \dots + \alpha_n g_n(b_m) = \alpha_1 g_1(b_m-0) + \dots + \alpha_n g_n(b_m-0). \end{cases}$$

Получаем однородную систему m уравнений с n неизвестными, где $n > m$. В этом случае система имеет ненулевое решение. Не нарушая общности, можно считать, что $\alpha_1 \neq 0$.

Зададим последовательность непрерывных функций $\{f_j\}_{j=1}^\infty \in C_{p,A}[a, b]$:

$$f_j(a_1) = 1, \quad f_j(x) = 0, \text{ если } x \notin (a_1 - \frac{\delta}{j}, a_1 + \frac{\delta}{j}) \text{ и } \delta > 0 \text{ задано так, что } a_1 + \delta < a_2.$$

Ясно, что в пространстве $C_{p,A}[a, b]$ последовательность $f_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$ и $\|f_j\| = 1$.

Для каждого $j \in \mathbb{N}$, с одной стороны,

$$\begin{aligned} (T^{-1})^*(\alpha_1 \delta_{a_1} + \dots + \alpha_n \delta_{a_n})(Tf_j) &= ((\alpha_1 \delta_{a_1} + \dots + \alpha_n \delta_{a_n}) \circ T^{-1})(Tf_j) = \\ &= (\alpha_1 \delta_{a_1} + \dots + \alpha_n \delta_{a_n})(f_j) = \alpha_1 f_j(a_1) + \dots + \alpha_n f_j(a_n) = \alpha_1 \neq 0. \end{aligned}$$

С другой стороны, получаем

$$\begin{aligned} (T^{-1})^*(\alpha_1 \delta_{a_1} + \dots + \alpha_n \delta_{a_n})(Tf_j) &= (\alpha_1 \phi_{g_1} + \dots + \alpha_n \phi_{g_n})(Tf_j) = \phi_g(Tf_j) = \\ &= \int_c^d Tf_j(y)dg = \int_c^{b_1 - \frac{\delta}{k}} Tf_j(y)dg + \int_{b_1 - \frac{\delta}{k}}^{b_1 + \frac{\delta}{k}} Tf_j(y)dg + \int_{b_1 + \frac{\delta}{k}}^{b_2 - \frac{\delta}{k}} Tf_j(y)dg + \dots + \int_{b_{m-1} + \frac{\delta}{k}}^{b_m - \frac{\delta}{k}} Tf_j(y)dg + \\ &\quad + \int_{b_m - \frac{\delta}{k}}^{b_m + \frac{\delta}{k}} Tf_j(y)dg + \int_{b_m + \frac{\delta}{k}}^d Tf_j(y)dg. \end{aligned}$$

По свойствам интеграла Стильеса [4. С. 218]) для всех $i = 1, \dots, m$ и $k \in \mathbb{N}$

$$\left| \int_{b_i - \frac{\delta}{k}}^{b_i + \frac{\delta}{k}} Tf_j(y) dg \right| \leq \max_{c \leq y \leq d} |Tf_j(y)| \cdot \bigvee_{b_i - \frac{\delta}{k}}^{b_i + \frac{\delta}{k}} g = \|Tf_j\| \cdot \bigvee_{b_i - \frac{\delta}{k}}^{b_i + \frac{\delta}{k}} g \leq \|T\| \cdot \|f_j\| \cdot \bigvee_{b_i - \frac{\delta}{k}}^{b_i + \frac{\delta}{k}} g = \|T\| \cdot \bigvee_{b_i - \frac{\delta}{k}}^{b_i + \frac{\delta}{k}} g \quad (1)$$

По определению функции $v(y) = \bigvee_c^y g$, получим

$$\bigvee_{b_i - \frac{\delta}{k}}^{b_i + \frac{\delta}{k}} g = v(b_i + \frac{\delta}{k}) - v(b_i - \frac{\delta}{k}).$$

Известно, что если функция g непрерывна в некоторой точке y , то функция v также непрерывна в точке y [4. С. 210]. Поэтому для некоторого $k_0 \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\bigvee_{b_i - \frac{\delta}{k_0}}^{b_i + \frac{\delta}{k_0}} g = v(b_i + \frac{\delta}{k_0}) - v(b_i - \frac{\delta}{k_0}) < \frac{|\alpha_1|}{2m \cdot \|T\|}.$$

Тогда, учитывая (1), получим

$$\sum_{i=1}^m \left| \int_{b_i - \frac{\delta}{k_0}}^{b_i + \frac{\delta}{k_0}} Tf_j(y) dg \right| < \|T\| \cdot \frac{|\alpha_1|}{2m \cdot \|T\|} m = \frac{|\alpha_1|}{2}.$$

Рассмотрим интегралы вида:

$$\int_c^{b_i - \frac{\delta}{k_0}} Tf_j(y) dg, \quad \int_{b_i + \frac{\delta}{k_0}}^{b_{i+1} - \frac{\delta}{k_0}} Tf_j(y) dg, \quad \int_{b_m + \frac{\delta}{k_0}}^d Tf_j(y) dg.$$

Каждый из этих $m + 1$ интегралов представляет собой линейный непрерывный функционал $\Phi_i \in C^*[b_{i-1} + \frac{\delta}{k_0}, b_i - \frac{\delta}{k_0}]$, $(b_0 + \frac{\delta}{k_0})$ считаем равным c , а $b_{m+1} - \frac{\delta}{k_0}$ считаем равным d . Поскольку слабая сходимость ограниченных последовательностей в пространствах $C(K)$ совпадает с поточечной сходимостью [5. С. 288], то для всех $i = 1, \dots, m+1$ выполнено $\Phi_i(f_j) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Следовательно, существует такое j_0 , что каждый из этих интегралов будет меньше $\frac{|\alpha_1|}{2(m+1)}$.

Таким образом,

$$|\alpha_1| = |(T^{-1})^*(\alpha_1 \delta_{a_1} + \dots + \alpha_n \delta_{a_n})(Tf_{j_0})| < |\alpha_1|.$$

Это противоречие завершает доказательство теоремы.

Обозначим через $UC_p(a, b)$ ($UC_p[a, b]$) пространство равномерно непрерывных вещественнозначных функций, заданных на интервале (a, b) ($[a, b]$) и наделенное топологией поточечной сходимости. Нетрудно видеть, что $UC_p(a, b) = C_p((a, b) | [a, b])$. Так как $C_p((a, b) | [a, b]) \cong C_{p, (a, b)}[a, b]$, то из теоремы 2 получаем такое следствие.

Следствие 1. $UC_p(a, b) \not\cong UC_p[a, b]$, т.е. пространства равномерно непрерывных функций, определенных на интервале (a, b) и полуинтервале $[a, b)$, не являются линейно гомеоморфными.

Следствие 2. $UC_p(\mathbb{R}) \not\cong UC_p[0, +\infty)$.

Список источников

1. Архангельский А.В. Топологические пространства функций. М. : Изд-во МГУ, 1989. 222 с.
2. van Mill J. The Infinite-Dimensional Topology of Function Spaces. Amsterdam et al. : Elsevier, 2001. 643 p. (North-Holland Mathematical library; v. 64).
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. 7-е изд. М. : Физматлит, 2004. 572 с.
4. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М. : Наука, 1974. 480 с.
5. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 895 с.

References

1. Arkhangel'skii A.V. (1992) *Topological Functions Spaces. Mathematics and Applications, Soviet Series*, vol.78. Dordrecht: Kluwer Academic.
2. van Mill J. (2001) *The Infinite-Dimensional Topology of Function Spaces*. North-Holland.
3. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. (2012) *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*. Eastford: Martino Fine Books.
4. Natanson I.P. (2016) *Theory of Functions of a Real Variable*. Mineola: Dover Publications.
5. Dunford N., Schwartz J.T. (1988) *Linear Operators*. Part I. New York: Wiley.

Сведения об авторах:

Хмылёва Татьяна Евгеньевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и теории функций Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: tex2150@yandex.ru.

Петрова Кира Максимовна – студент механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: lililitiy534@yandex.ru

Information about the authors:

Khmyleva Tatiana Evgenievna (Candidate of Physics and Mathematics, Department of Mathematical Analysis and Theory of Functions, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tex2150@yandex.ru

Petrova Kira Maximovna (Faculty of Mechanics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: lililitiy534@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 21.06.2024; принята к публикации 09.12.2024

The article was submitted 21.06.2024; accepted for publication 09.12.2024