

Научная статья

УДК 533.17

doi: 10.17223/19988621/92/10

Математическое моделирование натекания многоблочной сверхзвуковой струи на плоскую подвижную преграду

Ануар Магжанович Кагенов¹, Кирилл Владимирович Костюшин²,
Дмитрий Олегович Ларкин³

^{1, 2, 3} *Томский государственный университет, Томск, Россия*

¹ *anuar@ftf.tsu.ru*

² *kostushink@niipmm.tsu.ru*

³ *mister.larkin.dima@mail.ru*

Аннотация. Представлены результаты математического моделирования нестационарного взаимодействия многоблочной (составной) сверхзвуковой струи с подвижной преградой. Методика расчета реализована в OpenFOAM. Использовался подход сеток типа «Химера». Выполнено тестирование методики расчета. Получено, что результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными других авторов. Проведено параметрическое исследование взаимодействия двух струй с подвижной преградой. Выявлено, что в критической точке до момента времени 0.018 с наблюдаются незначительные колебания давления, затем давление возрастает.

Ключевые слова: многоблочные сверхзвуковые струи, математическое моделирование, подвижная преграда, сетки типа «Химера», OpenFOAM

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации МК-761.2022.1.1 и частично при поддержке Минобрнауки РФ (госзадание FSWM-2020-0032).

Для цитирования: Кагенов А.М., Костюшин К.В., Ларкин Д.О. Математическое моделирование натекания многоблочной сверхзвуковой струи на плоскую подвижную преграду // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 92. С. 114–124. doi: 10.17223/19988621/92/10

Original article

Mathematical modeling of the interaction of a multiple supersonic jet with a moving obstacle

Anuar M. Kagenov¹, Kirill V. Kostyushin², Dmitry O. Larkin³

^{1, 2, 3} *Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*

¹ *anuar@ftf.tsu.ru*

² *kostushink@niipmm.tsu.ru*

³ *mister.larkin.dima@mail.ru*

Abstract. This paper presents numerical modeling of the interaction of a multiple supersonic jet with a moving obstacle. For the mathematical description of the physical formu-

lation, the Navier–Stokes equations averaged by Favre in a non-stationary formulation were used. Chimera meshes were used for modeling of moving boundaries. The calculation method was implemented using the OpenFOAM open-source software. Testing of the calculation method showed good agreement with the experimental data of other authors and numerical data using a regular mesh. A conical nozzle with the Mach number of 4.5 at the outlet was used for the parametric study. The calculation was performed up to the time $t = 0.2$ s; the speed of the obstacle was 1 m/s. It is obtained that up to 0.01 s the maximum pressure on the barrier increases, then decreases. At the critical point up to the time of 0.018 s, there are insignificant pressure fluctuations. Then, there is an increase caused by a decrease in pressure at the intersection of the planes of symmetry of the propulsion system and the obstacle.

Keywords: multiple supersonic jet, mathematical modeling, moving obstacle, Chimera type mesh, OpenFOAM

Acknowledgments: The study was carried out with the financial support of the grant of the President of the Russian Federation MK-761.2022.1 and partially with the support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (state order FSWM-2020-0032).

For citation: Kagenov, A.M., Kostyushin, K.V., Larkin, D.O. (2024) Mathematical modeling of the interaction of a multiple supersonic jet with a moving obstacle. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 92. pp. 114–124. doi: 10.17223/19988621/92/10

Введение

В настоящее время актуальны исследования, связанные с моделированием взаимодействия многоблочных (составных) сверхзвуковых струй с подвижными преградами, положение которых динамично изменяется в пространстве. Экспериментальные и теоретические исследования в этой области сосредоточены преимущественно на изучении взаимодействия сверхзвуковых струй с неподвижными границами расчетной области [1–3]. Работ, изучающих особенности газодинамических процессов, происходящих при взаимодействии сверхзвуковых струй с подвижными границами, явно недостаточно. Для исследования газодинамических процессов с учетом подвижных границ в основном используются следующие методы изменения сеток: метод адаптивно перестраиваемых сеток [4], метод деформирующихся расчетных сеток с сохранением сеточной топологии [5] и перекрывающиеся расчетные сетки (сетки типа «Химера») [6, 7].

Первый метод позволяет получать хорошие результаты, но при этом для перестроения расчетной сетки на каждой итерации по времени требуются дополнительные вычислительные затраты. В работе [8] авторы применили данный подход для моделирования старта ракеты из шахты в двумерной постановке. Для описания течения газа использованы уравнения Эйлера, тепловым взаимодействием между газом и стенками шахты пренебрегали. При моделировании движения граничные ячейки растягивались в сторону движения до критического размера. После достижения этого размера каждая граничная ячейка делилась на две равные ячейки. В результате применения данного подхода были получены нестационарные зависимости газодинамических характеристик. В исследовании [9] использовался аналогичный подход перестроения сетки для моделирования нестационарных процессов, возникающих при старте твердотопливного ракетного двигателя в осесимметричной постановке. Проведенный автором анализ показал,

что на поверхности старта наблюдается несколько локальных пиков давления в различные моменты времени.

Метод деформирующихся расчетных сеток позволяет сохранить сеточную топологию без необходимости перестраивать сетку на каждом временном шаге, поскольку изменяется только положение узлов ячеек расчетной сетки, но при этом необходимо сохранение качества ячеек. Данный подход реализован в работе [10] при взаимодействии одиночной сверхзвуковой струи с подвижной преградой. Численное моделирование выполнялось с использованием схемы С.К. Годунова с ограничителем Б. Ван Лира в программном комплексе OpenFOAM. Скорость движения преграды составляла 1 м/с. В исследовании показана зависимость ударно-волновой картины течения от времени.

Расчет на перекрывающихся расчетных сетках лишен недостатков вышеописанных методов, так как объединяет несколько независимых расчетных сеток в одну общую с перекрытиями. Благодаря объединению сеток можно перемещать одну сетку относительно другой в произвольном направлении, тем самым повторяя движения реального объекта (например, посадку или старт космического аппарата). Реализация данного подхода показана на примере моделирования старта и посадки космического аппарата в работе [11], используя программный комплекс ANSYS Fluent (модуль Overset). Авторами были получены нестационарные зависимости всех газодинамических параметров для условий среды с низким значением давления. В работе [12] проведено численное моделирование нестационарного обтекания вертолета, несущего винта и исследовано влияние потока газа от винта на поведение ракет, выпускаемых с вертолета. Для этой цели авторы разработали трехмерный решатель невязких потоков, основанный на неструктурированных сетках с применением перекрывающихся расчетных сеток для моделирования относительного движения несущего винта, фюзеляжа и движущихся ракет. Решатель для потока они объединили с уравнениями движения ракеты, используя для этого шесть степеней свободы. В работе [13] рассмотрено истечение вязкой турбулентной сверхзвуковой струи из двухконтурного сопла. Расчетная область была поделена на подвижную и неподвижную части. Использовались уравнения Навье–Стокса в осесимметричной постановке. Было показано, что нестационарные процессы, связанные с изменением геометрии соплового блока, оказывают наибольшее влияние на структуру потока в начальной стадии раскрытия рабочей секции сопла.

Исходя из обзора литературы, для математического моделирования с использованием методов подвижных границ наиболее эффективным мы полагаем метод перекрывающихся расчетных сеток. Поэтому целью данного исследования является математическое моделирование натекания многооблочной сверхзвуковой струи на плоскую подвижную преграду с использованием сеток типа «Химера».

Физико-математическая постановка задачи и метод решения

Рассматривается задача натекания многооблочной сверхзвуковой струи, истекающей из многосопловой установки на плоскую подвижную преграду, расположенную перпендикулярно оси струи. В результате натекания формируется сложный поток с разветвленной системой скачков уплотнения, содержащий области местного дозвукового течения, контактные разрывы и участки течения

с большими градиентами параметров газа [14]. В зависимости от условий среды, физических свойств газа, геометрического расположения преграды, расстояния между срезом сопел и преградой, а также расположения сопел относительно друг друга структура газодинамической картины меняется. Некоторые примеры ударно-волновых структур описаны в работе [1].

Для математического описания течения газа использовалась система уравнений Навье–Стокса, осредненная по Фавру [15], в трехмерной постановке для вязкого сжимаемого идеального газа. Для замыкания системы использовалась модель турбулентности $k-\omega$ SST [16]. Полная система уравнений с постановкой начальных и граничных условий показана в работе [2]. Реализация физико-математической модели и проведение параметрических исследований выполнены в свободно распространяемом программном обеспечении OpenFOAM [17]. Использовался решатель `overRhoPimpleDyMFoam`, который основан на итерационном алгоритме PIMPLE [18]. Уравнения для каждой переменной, характеризующей систему (давление, скорость, температура и переменные используемой модели турбулентности), решаются последовательно. Благодаря библиотеке `overset` решение можно производить на множестве сеток, имеющих разную топологию без общих граней. Связь между сетками осуществляется за счет неявной интерполяции первого порядка. Для дискретизации по времени использовалась неявная схема Рунге–Кутты первого порядка, а дискретизация конвективных членов выполнялась с использованием схемы `LimitedLinear` с ограничителем `Sweby` [19] второго порядка. Интерполяция между сетками выполнялась с использованием метода обратных взвешенных расстояний [20]. На рис. 1, *a* показана основная сетка, а на рис. 1, *b* приведена перекрывающаяся сетка, результат наложения двух сеток показан на рис. 2.

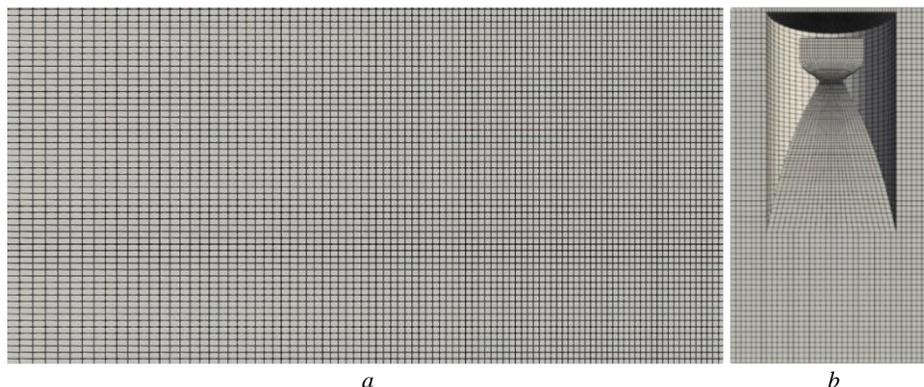


Рис. 1. Примеры сеток: *a* – основная сетка, *b* – перекрывающаяся сетка
Fig. 1. Examples of meshes: (*a*) the main grid and (*b*) the overlapping grid

В объединенной сетке ячейки делятся на несколько типов (см. рис. 2):

1. Ячейки, находящиеся в непроницаемой области – данные ячейки в расчетах не участвуют.
2. Ячейки, находящиеся на границе сеток, в которых происходит интерполяция (интерфейс).
3. Расчетные ячейки.

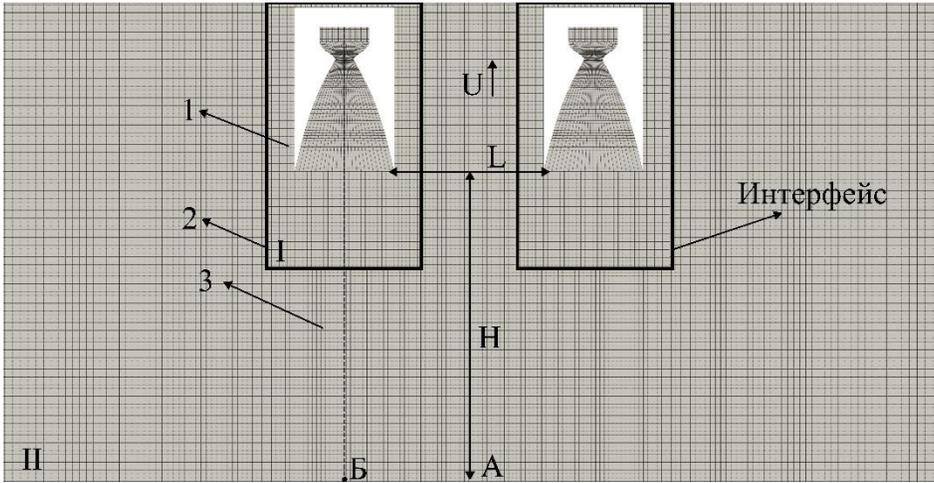


Рис. 2. Результат наложения двух сеток
 Fig. 2. The result of merging two grids

При расчете на сетках типа «Химера» к граничным условиям, приведенным в работе [2], добавляется условие на границе между основной и перекрывающей сетками – интерфейс (см. рис. 2).

Результаты численных исследований

В работе было выполнено тестирование методики расчета с использованием сеток типа «Химера». Для этого проведено сравнение экспериментальных данных авторов работы [21] с результатами расчетов, полученных с использованием перекрывающихся сеток и без учета перекрывающихся сеток (решатель rhoPimpleFoam). Для получения сверхзвуковой струи использовалось коническое сопло [21]. Среднее число Маха на выходном сечении составляло $M = 2.52$, степень нерасчетности $n = 0.46$, угол раствора $\alpha = 7^\circ 15'$. Расстояние от выходного сечения сопла до преграды составляло $H = 1.84 \cdot R_a$, где $R_a = 1$ см – радиус выходного сечения сопла. На рис. 3 показано распределение относительного давления P/P_a , где $P_a = 46\,600$ Па – давление на срезе сопла. Для варианта расчета с сеткой типа «Химера» перекрывающая сетка была неподвижной.

По результатам сравнения видно хорошее согласование распределения относительного давления P/P_a для сетки типа «Химера» с экспериментальными данными и численными расчетами без учета подвижных границ (решатель rhoPimpleFoam).

При проведении параметрических исследований использовалось профилированное сопло. Радиус минимального сечения составлял $R^* = 0.018$ м, а радиус выходного сечения $R_e = 0.097$ м. Расстояние между соплами $L = 0.291$ м. Скорость отдаления сопла от преграды $U = 1$ м/с. Среднее число Маха в выходном сечении обоих сопел составляло $M = 4.5$. В качестве рабочего тела использовался гидразин [22] (молярная масса $M_r = 14.53$ кг/(кмоль), показатель адиабаты $k = 1.292$). Параметры во входном сечении сопла были следующими: $P_0 = 1.962$ МПа, $T_0 = 1\,336$ К, $U_z = 0$, $U_y = 0$, $U_x = U_0$. В начальный момент времени среда покоилась, $P_a = 650$ Па, $T_a = 250$ К. Пример расчетной сетки приведен на рис. 2. Число

ячеек основной сетки $N_o = 794\,028$, перекрывающей сетки $N_{II} = 41\,352$, общее число ячеек $N = N_o + N_{II} = 835\,380$. Шаг по времени составлял $\Delta t = 10^{-7}$. Физическое время расчета 0.02 с, что соответствует пройденному расстоянию 0.02 м.

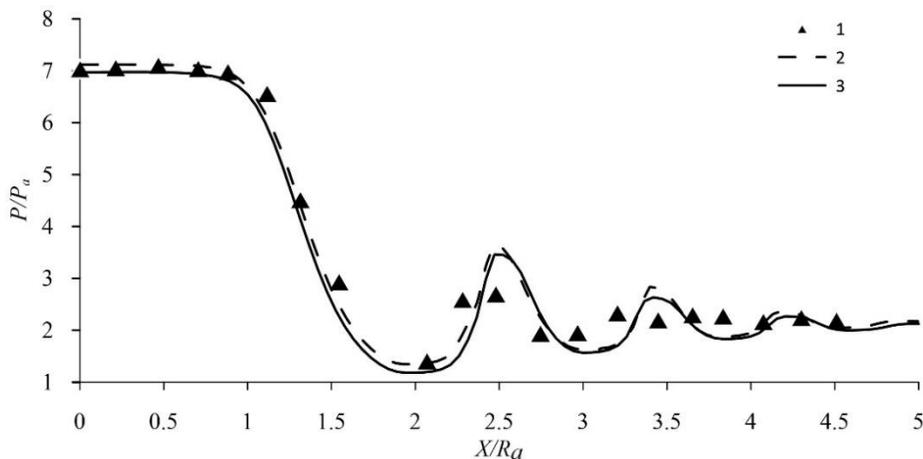


Рис. 3. Изменение распределения давления по преграде:
 1 – эксперимент [21], 2 – расчет на обычной сетке, 3 – расчет на перекрывающихся сетках
Fig. 3 Changing the pressure distribution along the obstacle:
 (1) experiment [21], (2) calculation on a conventional mesh,
 and (3) calculation on overlapping meshes

Расчет проводился в два этапа:

1. В начальный момент времени перекрывающая (сетка I на рис. 2) и основная (сетка II на рис. 2) сетки неподвижны, расчет выполняется до установления.

2. Перекрывающая сетка начинает отдаляться со скоростью $U = 1$ м/с от преграды. Начальное распределение параметров газа соответствует данным, полученным на этапе 1.

Результаты расчетов приведены на рис. 4–7. На рис. 4 показан градиент плотности газа для установившегося течения (этап 1). На рис. 5 показано распределение градиента плотности газа в моменты времени $t_1 = 0.005$ с, $t_2 = 0.01$ с, $t_3 = 0.02$ с (этап 2). Давление в точке пересечения плоскостей симметрии двигательной установки и преграды (точка А на рис. 2), а также давление в критической точке (точка В на рис. 2) в зависимости от времени показаны на рис. 6. Распределение давления на преграде вдоль линии, проходящей под двумя соплами, в моменты времени $t = 0.005$ с, $t = 0.01$ с, $t = 0.02$ с приведено на рис. 7.



Рис. 4. Градиент плотности
Fig. 4. Density gradient

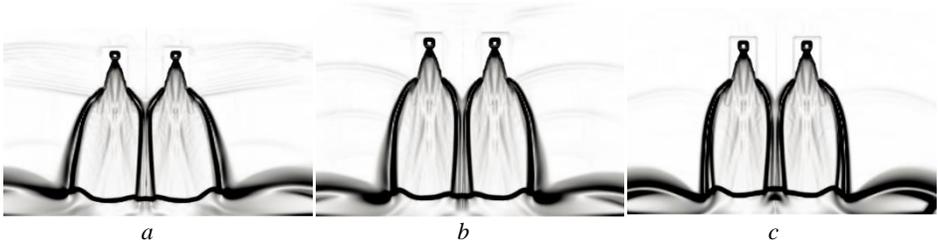


Рис. 5. Градиент плотности в моменты времени: *a* – 0,005 с, *b* – 0,01 с, *c* – 0,02 с
Fig. 5. Density gradient at time points: (*a*) 0.005, (*b*) 0.01, and (*c*) 0.02 s

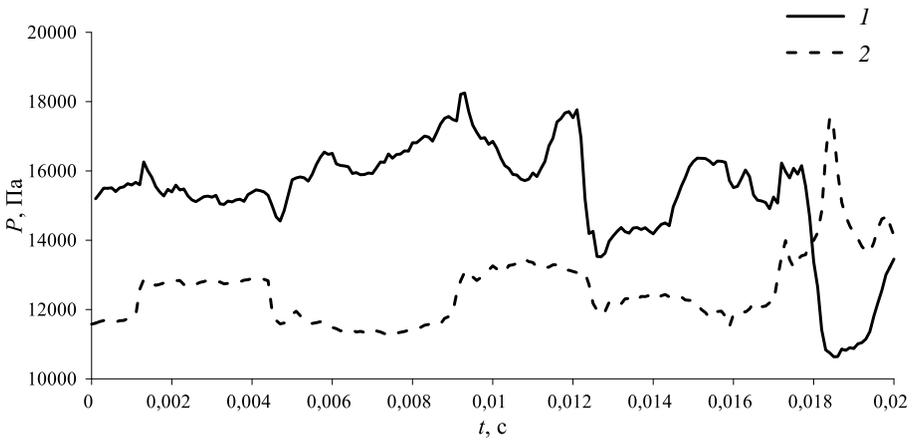


Рис. 6. Характер изменения давления на поверхности от времени:
 1 – в точке пересечения плоскостей симметрии двигательной установки и преграды,
 2 – в критической точке

Fig. 6. Pressure on the surface as a function of time:
 (1) at the intersection of the planes of symmetry of the propulsion system and the obstacle
 and (2) at the critical point

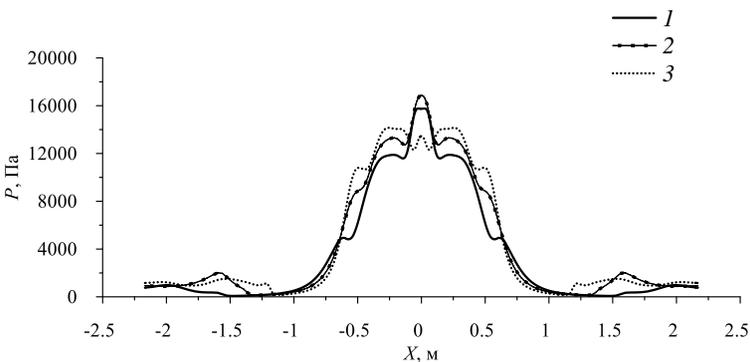


Рис. 7. Распределение давления на преграде в фиксированные моменты времени:
 1 – 0,005 с, 2 – 0,01 с, 3 – 0,02 с

Fig. 7. Pressure distribution on the obstacle at fixed points in time:
 (1) 0.005, (2) 0.01, and (3) 0.02 s

По мере отдаления сопел от преграды многоблочная струя перестраивается. Движение преграды сказывается на скачке, который образуется в результате взаимодействия центральных скачков каждой струи. Давление на преграде в центральной точке расчетной области, которая располагается в области данного скачка, меняется от 11 до 18 кПа в различные моменты времени (см. рис. 2 (1)). До 0.01 с давление возрастает до 18 кПа, затем падает до 11 кПа. Максимум давления вдоль преграды до момента времени расчета 0.01 с возрастает, затем уменьшается до 13 кПа (см. рис. 7). Давление в критической точке изменяется в диапазоне от 11.5 до 17.5 кПа (см. рис. 6 (2)). До 0.018 с давление изменяется незначительно, в пределах 2 кПа, затем происходит увеличение до 17.5 кПа, которое вызвано понижением давления в точке пересечения плоскостей симметрии двигательной установки с преградой.

Заключение

В работе проведено математическое моделирование нестационарного взаимодействия вязкой, турбулентной многоблочной (составной) сверхзвуковой струи с подвижной преградой. В расчетах применялся подход перекрывающихся сеток типа «Химера» с использованием открытого программного обеспечения OpenFOAM. Проведено тестирование методики расчета на перекрывающихся сетках применительно к взаимодействию сверхзвуковых струй с преградой. Получено хорошее согласование результатов расчетов с экспериментальными и численными данными других авторов. Проведено параметрическое исследование для взаимодействия двух струй с подвижной преградой для профилированного сопла в пространственной постановке. Получено, что при отдалении преграды со скоростью 1 м/с до момента времени расчета 0.01 с максимум давления в точке пересечения плоскостей симметрии двигательной установки с преградой возрастает. Показано, что в критической точке давление изменяется незначительно до момента времени 0.018 с, далее происходит увеличение до 17.5 кПа, вызванное понижением давления в точке пересечения плоскостей симметрии двигательной установки и преграды.

Список источников

1. Кагенов А.М., Костюшин К.В., Алигасанова К.Л., Котоногов В.А. Математическое моделирование взаимодействия составной сверхзвуковой струи с преградой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 68. С. 71–79. doi: 10.17223/19988621/68/7
2. Глазунов А.А., Кагенов А.М., Костюшин К.В., Еремин И.В., Котоногов В.А., Алигасанова К.Л. Математическое моделирование взаимодействия одиночной сверхзвуковой струи с преградами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 63. С. 87–101. doi: 10.17223/19988621/63/8
3. Запьягаев В.И., Солотчин А.В., Кавун И.Н., Яровский Д.А. Натекание сверхзвуковой недорасширенной струи на преграды различной проницаемости // Прикладная механика и техническая физика. 2011. Т. 52, № 5. С. 60–67.
4. Мажужин В.И., Самарский А.А., Кастельянос О., Шапранов А.В. Метод динамической адаптации для нестационарных задач с большими градиентами // Математическое моделирование. 1993. Т. 5, № 4. С. 32–56.
5. Годунов С.К., Прокопов Г.П. Об использовании подвижных сеток в газодинамических расчетах // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1972. Т. 12, № 2. С. 429–440.

6. Benek J.A., Buning P.G., Steger J.L. A 3-D Chimera Grid Embedding Technique // AIAA Paper. 1985. № 85. P. 322–331.
7. Benek J.A., Donegan T.L., Suhs N.E. Extended Chimera Grid Embedding Scheme With Application to Viscous Flow // AIAA Paper. 1987. № 87. P. 238–291.
8. Козлов Е.А., Абанеев Э.Р. Пример численного решения двухмерной газодинамической задачи в геометрически изменяющейся расчетной области // Вестник Томского государственного педагогического университета. 2006. Вып. 6 (57). С. 98–100.
9. Костюшин К.В. Численное исследование нестационарных газодинамических процессов при старте твердотопливных ракет // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 67. С. 127–143. doi: 10.17223/19988621/67/12
10. Еремин И.В., Кагенов А.М., Костюшин К.В., Червакова А.В. Математическое моделирование взаимодействия одиночной сверхзвуковой струи с подвижной преградой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 85. С. 146–156. doi: 10.17223/19988621/85/10
11. Жильцов К.Н., Тырышкин И.М., Глазунов А.А., Еремин И.В. Моделирование процессов нестационарной газодинамики при взлете и посадке космических аппаратов в условиях разреженной атмосферы // Тезисы докладов XXVI Всероссийского семинара с международным участием по струйным, отрывным и нестационарным течениям, С.-Петербург, 2022. СПб. : Балтийский гос. техн. ун-т «Военмех», 2022. С. 85–86.
12. Lee B.S., Choi J.H., Kwon O.J. Numerical Simulation of Free-Flight Rockets Air-Launched From a Helicopter // Journal of Aircraft. 2011. V. 48 (5). P. 1766–1775. doi: 10.2514/1.c031365
13. Волков К.Н., Емельянов В.Н., Яковчук М.С. Нестационарное течение в двухконтурном сопле с учетом перемещения его выдвигной секции из сложенного в рабочее положение // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2018. Т. 19, № 1.
14. Сизов А.М. Составные сверхзвуковые струи // Сверхзвуковые газовые струи : сб. ст. Новосибирск : Наука, Сиб. отд-ние, 1983. С. 85–102.
15. Солодов В.Г. Моделирование турбулентных течений. Расчет больших вихрей. Харьков : ХНАДУ, 2011. 168 с.
16. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model // Proceedings of the 4th International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer. West Redding : Begell House, Inc., 2003. P. 625–632.
17. OpenFOAM. URL: <http://openfoam.com> (accessed: 08.12.2023).
18. Holzmann T. Mathematics, numerics, derivations and OpenFOAM. Holzmann CFD, Inc., 2019. 155 p.
19. Sweby P.K. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1984. V. 21. P. 995–1011.
20. Franke R. Scattered data interpolation: tests of some methods // Mathematics of Computation. 1982. V. 38 (157). P. 181–181. doi: 10.1090/s0025-5718-1982-0637296-4
21. Мельникова М.Ф., Нестеров Ю.Н. Воздействие сверхзвуковой нерасчетной струи на плоскую преграду, перпендикулярную оси струи // Ученые записки ЦАГИ. 1971. Т. 2, № 5. С. 44–58.
22. Кагенов А.М. Математическое моделирование взаимодействия сверхзвуковых многоблочных струй посадочного модуля с поверхностями : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Томск, 2017. 155 с.

References

1. Kagenov A.M., Kostyushin K.V., Aligasanova K.L., Kotonogov V.A. (2020) Matematicheskoye modelirovaniye vzaimodeystviya sostavnoy sverkhzvukovoy strui s pregradoy [Mathematical modeling of a supersonic twin jet interaction with an obstacle]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 68. pp. 72–79. DOI: 10.17223/19988621/68/7.

2. Glazunov A.A., Kagenov A.M., Kostyushin K.V., Eremin I.V., Kotonogov V.A., Aligasanova K.L. (2020) Matematicheskoye modelirovaniye vzaimodeystviya odinochnoy sverkhzvukovoy strui s pregradami [Mathematical modeling of the interaction of a single supersonic jet with obstacles]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 63. pp. 87–101. DOI: 10.17223/19988621/63/8.
3. Zapryagaev V.I., Solotchin A.V., Kavun I.N., Yarovskiy D.A. (2011) Natekaniye sverkhzvukovoy nedorasshirennoy strui na pregrady razlichnoy pronitsayemosti [Leakage of a supersonic underexpanded jet on obstacles of various permeability]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 52. pp. 60–67.
4. Mazhukin V.I., Samarskii A.A., Kastel'yanos O., Shapranov A.V. (1993) Metod dinamicheskoi adaptatsii dlya nestatsionarnykh zadach s bol'shimi gradientami [Method of dynamic adaptation for nonstationary problems with large gradients]. *Matematicheskoe Modelirovaniye*. 5(4). pp. 32–56.
5. Godunov S.K., Prokopov G.P. (1972) The use of moving meshes in gas-dynamical computations. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 12(2). pp. 182–195.
6. Benek J.A., Buning P.G., Steger J.L. (1985) A 3-D chimera grid embedding technique. *AIAA Paper*. 85. pp. 322–331.
7. Benek J.A., Donegan T.L., Suhs N.E. (1987) Extended chimera grid embedding scheme with application to viscous flow. *AIAA Paper*. 87. pp. 238–291.
8. Kozlov E.A., Abaneev E.R. (2006) Primer chislennogo resheniya dvuhmernoy gazodinamicheskoy zadachi v geometricheski izmenyayushcheysya raschetnoy oblasti [An example of a numerical solution of a two-dimensional gas dynamic problem in a geometrically varying computational domain]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta – Tomsk State Pedagogical University Bulletin*. 6. pp. 98–100.
9. Kostyushin K.V. (2020) Chislennoye issledovaniye nestatsionarnykh gazodinamicheskikh protsessov pri starte tverdotoplivnykh raket [Numerical investigation of unsteady gasdynamic processes at the launch of solid-propellant rockets]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 67. pp. 127–143. DOI: 10.17223/19988621/67/12.
10. Eremin I.V., Kagenov A.M., Kostyushin K.V., Chervakova A.V. (2023) Mathematical modeling of the interaction of a single supersonic jet with a moving barrier. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 85. pp. 146–156. DOI: 10.17223/19988621/85/10.
11. Zhil'cov K.N., Tyryshkin I.M., Glazunov A.A., Eremin I.V. (2022) Modelirovaniye protsessov nestatsionarnoy gazodinamiki pri vzlete i posadke kosmicheskikh apparatov v usloviyakh razrezhennoy atmosfery [Modeling of nonstationary gas dynamics processes during takeoff and landing of spacecraft in a rarefied atmosphere]. *Tezisy dokladov XXVI Vserossiyskogo seminar s mezhdunarodnym uchastiyem po struynym, otrynnym i nestatsionarnym techeniyam. Sankt-Peterburg: Baltiyskiy gosudarstvennyi tekhnicheskiiy universitet*. pp. 85–86.
12. Lee B.S., Choi J.H., Kwon O.J. (2011) Numerical simulation of free-flight rockets air-launched from a helicopter. *Journal of Aircraft*. 48(5). pp 1766–1775. DOI: 10.2514/1.c031365.
13. Volkov K.N., Emelyanov V.N., Yakovchuk M.S. (2018) Nestatsionarnoye techeniye v dvukhkonturnom sople s uchetom peremeshcheniya ego vydvizhnoy seksii iz slozhennogo v rabocheye polozheniye [Unsteady flow in dual-bell nozzle with movement of extendible section from initial to working position]. *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*. 19(1).
14. Sizov A.M. (1983) Multiple supersonic jets, in *Supersonic gas jets. Collection of articles. Nauka, Novosibirsk*. pp. 85–102.
15. Solodov V.G. (2011) *Modelirovaniye turbulentnykh techeniy. Raschet bol'shikh vikhrey* [Modeling of turbulent flows. Calculation of large vortices]. Kharkov: Kharkov National Automobile and Highway University.

16. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. (2003). Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model. *Proceedings of the 4th International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer*. Begell House Inc., West Redding. pp. 625–632.
17. *OpenFOAM*. URL: <http://openfoam.com>
18. Holzmann T. (2019) *Mathematics, Numerics, Derivations and OpenFOAM*. Holzmann CFD.
19. Sweby P.K. (1984). High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 21. pp. 995–1011.
20. Franke R. (1982). Scattered data interpolation: tests of some methods. *Mathematics of Computation*. 38(157). pp 181–181. DOI: 10.1090/s0025-5718-1982-0637296-4.
21. Mel'nikova M.F., Nesterov Yu.N. (1971) Vozdeystviye sverkhzvukovoy nerashchetnoy strui na ploskuyu pregradu, perpendikulyarnuyu osi strui [Effect of a supersonic noncalculated jet on a flat obstacle perpendicular to the axis of the jet]. *Uchenye zapiski TSAGI – TsAGI Science Journal*. pp. 44–58.
22. Kagenov A.M. (2017) *Matematicheskoye modelirovaniye vzaimodeystviya sverkhzvukovykh mnogoblochnykh struy posadochnogo modulya s poverkhnostyami* [Mathematical modeling of the interaction of supersonic multiblock jets of the lander with surfaces]. Dissertation. Tomsk State University.

Сведения об авторах:

Кагенов Ануар Магжанович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной аэромеханики физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: anuar@ftf.tsu.ru

Костюшин Кирилл Владимирович – младший научный сотрудник лаборатории математической физики Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: kostushink@niipmm.tsu.ru

Ларкин Дмитрий Олегович – инженер-исследователь Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: mister.larkin.dima@mail.ru

Information about the authors:

Kagenov Anuar M. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: anuar@ftf.tsu.ru

Kostyushin Kirill V. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kostushink@niipmm.tsu.ru

Larkin Dmitry O. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: mister.larkin.dima@mail.ru

Статья поступила в редакцию 18.12.2023; принята к публикации 09.12.2024

The article was submitted 18.12.2023; accepted for publication 09.12.2024