ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2025 Математика и механика № 93
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Научная статья
УДК 517.956.6 MSC: 35M10, 35M12
doi: 10.17223/19988621/93/5

# Задача нахождения собственных значений и собственных функций краевых задач для уравнения смешанного типа

**Иброхимжон Тожалиевич Тожибоев**

*Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан,* ibroxim@gmail.com

**Аннотация.** Рассматриваются собственные значения и соответствующие им собственные функции краевой задачи с условием Франкла для эллиптического уравнения с негладкой линией смены типа в специальной области. Доказывается неполнота системы собственных функций рассматриваемой задачи в пространстве $L_2$.
**Ключевые слова:** уравнения смешанного типа со спектральным параметром, собственные значения, собственные функции, краевая задача, единственность решения, спектральная задача

**Для цитирования:** Тожибоев И.Т. Задача нахождения собственных значений и собственных функций краевых задач для уравнения смешанного типа // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 93. С. 58–66. doi: 10.17223/19988621/93/5

Original article

# The problem of finding eigenvalues and eigenfunctions of boundary value problems for mixed-type equations

**Ibrokhimjon Tojalievich Tojiboev**

*Ferghana State University, Ferghana, Republic of Uzbekistan,* ibroxim@gmail.com

**Abstract.** In this work, eigenvalues and eigenfunctions of the boundary value problem with the Frankl condition for an elliptic-hyperbolic type equation in a special domain are considered. In the elliptic part of the domain, using polar coordinates and the method of separation of variables, we derive the spectral problems for the ordinary differential equations. By solving these problems, we obtain the eigenvalues and eigenfunctions of the formulated problem. Furthermore, we prove that the system of eigenfunctions is incomplete in the $L^2$ space, which means that not every square-integrable function in the domain can be represented as a series expansion in terms of these eigenfunctions. This incompleteness is demonstrated by constructing a specific function orthogonal to the entire system of eigenfunctions.
By exploring the spectral properties of mixed-type equations, this paper contributes to a broader understanding of how solutions behave in domains with varying types of differential operators. The study highlights the challenges posed by the change in operator

type, emphasizing the difficulties in obtaining a complete and comprehensive eigenfunction system. The research expands on previous works in the field of spectral analysis for mixed-type equations, particularly with respect to the role of spectral parameters and their impact on the completeness of the solution space. This research provides valuable insights into the mathematical and physical implications of mixed-type boundary value problems.
**Keywords:** mixed-type equations with a spectral parameter, eigenvalues, eigenfunctions, boundary value problem, uniqueness of the solution, spectral problem

**For citation:** Tojiboev, I.T. (2025) The problem of finding eigenvalues and eigenfunctions of boundary value problems for mixed-type equations. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 93. pp. 58–66. doi: 10.17223/19988621/93/5

## Введение

Со второй половины 70-х гг. прошлого столетия очень хорошо и интенсивно изучались краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. Одна из причин этого состоит в том, что некоторые многомерные аналоги основных краевых задач для уравнений смешанного типа могут быть изучены [1] путем их сведения (с помощью преобразования Фурье) к задачам для уравнений со спектральным параметром. Существование и единственность решения различных задач для уравнений смешанного типа изучались этим же методом в работах [2, 3] в трехмерных областях.

Изучение спектральных свойств краевых задач для уравнений такого типа началось с работы Т.С. Кальменова [4], в которой он доказал существование хотя бы одного собственного значения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе. Позднее Е.И. Моисеевым [5] были найдены участки, в которых нет собственного значения задачи Трикоми для серий смешанных уравнений. В работе С.М. Пономарева [6] найдены собственные функции и собственные значения задачи Трикоми для уравнения $u_{xx} + \operatorname{sign} y \, u_{yy} - \lambda u = 0$ в специальной области.

По изучению спектральных свойств локальных краевых задач для уравнений смешанного типа отметим работы К.Б. Сабитова и В.В. Тихомирова [7, 8].

В настоящее время исследований спектральных свойств нелокальных задач для смешанных уравнений эллиптико-гиперболического типа со спектральным параметром мало. Отметим лишь работы [9–14].

В данной работе мы найдем собственные значения и соответствующие им собственные функции краевой задачи с условием Франкла для эллиптико-гиперболического уравнения с негладкой линией изменения типа в специальной области, а также докажем неполноту системы собственных функций рассматриваемой задачи в пространстве $L_2$.

## 1. Постановка задачи

В данной работе в конечной односвязной области $\Omega$ плоскости $xOy$, ограниченной при $x \geq 0$, $y \geq 0$ и $x \leq 0$, $y \leq 0$ дугами $\sigma_1$ и $\sigma_2$ окружности $x^2 + y^2 = 1$, с концами в точках $A_1(0,1)$, $B_1(1,0)$ и $A_2(0,-1)$, $B_2(-1,0)$ и отрезками $\overline{OA_1}$ и $\overline{OB_2}$ прямых $x = 0$, $y = 0$ соответственно, а при $x \geq 0$, $y \leq 0$ отрезком $\overline{B_1 A_2}$ прямой $x - y = 1$, будут поставлены краевые задачи для уравнения

$$\operatorname{sign}(x+y)\left(\operatorname{sign} x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\operatorname{sign} y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\lambda u=0,\quad (x,y)\in\Omega\setminus\left(OA_1\cup OA_2\cup OC\right),\tag{1}$$

где λ – заданное действительное число, и исследована однозначная разрешимость поставленных задач.

Кроме того, будут найдены собственные значения и собственные функции этих задач и исследована полнота системы собственных функций. При этом используются следующие обозначения: $\Omega^+=\Omega\cap(x+y>0)$, $\Omega_0^+=\Omega^+\cap(y>0)$, $\Omega_1^+=\Omega^+\cap(y<0)$; $\Omega^-=\Omega\cap(x+y<0)$, $\Omega_0^-=\Omega^-\cap(x<0)$, $\Omega_1^-=\Omega^-\cap(x>0)$; $OD=\{(x,y):x+y=0,0<x<(1/2)\}$.

Уравнение (1) в области Ω принадлежит смешанному типу, а именно: в областях $\Omega_0^\pm$ – эллиптическому типу, а в областях $\Omega_1^\pm$ – гиперболическому типу. Отрезки $OA_2$ и $OB_1$ являются линиями изменения типа уравнения, а $OD$ – линией разрыва последнего коэффициента уравнения.

При этом используются следующие обозначения: $\Delta=\Omega\cap(x-y>0)$, $\Delta^+=\Delta\cap(x+y>0)$, $\Omega_2^+=\Delta^+\cap(y<0)$, $\Omega_3^+=\Delta^+\cap(y>0)$; $\Delta^-=\Delta\cap(x+y<0)$, $\Omega_2^-=\Delta^-\cap(x>0)$, $\Omega_3^-=\Delta^-\cap(x<0)$; $\sigma_3=\sigma_1\cap(x-y>0)$, $\sigma_4=\sigma_2\cap(x-y>0)$; $OA_3$ $(OA_4)$, $OB_1$, $OA_2$, $OD$ – отрезки $x-y=0$, $y=0$, $x=0$, $x+y=0$ соответственно, где $O(0,0)$, $D(1/2,-1/2)$, $B_1(1,0)$, $A_2(0,-1)$, $A_3\left(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}\right)$, $A_4\left(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}\right)$.

**Задача** $\Theta_\lambda$. Найти значения параметра λ и соответствующие им нетривиальные в области Δ решения уравнения

$$\operatorname{sign}(x+y)\left(\operatorname{sign}x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\operatorname{sign}y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\lambda u=0,\quad (x,y)\in\Omega\setminus\left(OA_1\cup OA_2\cup OC\right),\tag{1}$$

из класса $C(\overline{\Delta})\cap C^1\left((\Delta\cup OA_3\cup OA_4)\setminus OD\right)\cap C^2\left(\Delta\setminus(OB_1\cup OA_2\cup OD)\right)$, удовлетворяющие условиям

$$u(x,y)=0,\quad (x,y)\in\overline{\sigma}_3;\quad \frac{\partial}{\partial n}u(x,y)=0,\ (x,y)\in OA_3;\tag{2}$$

$$u(x,y)=0,\quad (x,y)\in\overline{\sigma}_4;\quad \frac{\partial}{\partial n}u(x,y)=0,\ (x,y)\in OA_4;\tag{3}$$

$$u(0,-x)+u\left(x/\sqrt{2},x/\sqrt{2}\right)=0,\quad 0\le x\le 1,\tag{4}$$

где $n$ – внутренняя нормаль к $OA_3$ и $OA_4$.

Те значения параметра λ, которые требуется найти в задачах $\Theta_\lambda$, называются собственными значениями, а соответствующие им нетривиальные функции – собственными функциями задачи $\Theta_\lambda$.

Пусть $\lambda_0$ есть какое-нибудь собственное значение задачи $\Theta_\lambda$, а $u_0(x,y)$ – соответствующая ему собственная функция. Введем обозначения $\xi=\xi(x,y)=-y$, $\eta=\eta(x,y)=-x$ и

$$u_0(x,y)=\begin{cases} u_0^+(x,y), & (x,y)\in\Delta^+; \\ u_0^-(x,y), & (x,y)\in\Delta^-. \end{cases}$$

Очевидно, что если $(x,y)\in\overline{\Delta}^+$, то $(\xi,\eta)\in\overline{\Delta}^-$. Учитывая это, в области $\Delta^+$ введем в рассмотрение функцию

$$\upsilon_0(x,y)=u_0^+(x,y)-u_0^-(\xi,\eta),\ (x,y)\in\Delta^+.$$

Пользуясь свойствами функций $u_0^+(x,y)$ и $u_0^-(\xi,\eta)$, краевыми условиями (2), (3) и $u_0^+(x,-x)=u_0^-(x,-x)$, $0\le x\le 1/2$, нетрудно убедиться в том, что функция $\upsilon_0(x,y)$ удовлетворяет условиям

$$\left.\begin{aligned} &\upsilon_0(x,y)\in C(\overline{\Delta}^+)\cap C^1(\Delta^+\cup OA_3)\cap C^2(\Delta^+\setminus OB_1); \\ &\upsilon_{0xx}+\operatorname{sign} y\,\upsilon_{0yy}+\lambda_0\upsilon_0=0, \quad (x,y)\in\Delta^+\setminus OB_1; \\ &\upsilon_{0xx}(x,y)=0, \quad (x,y)\in\overline{\sigma}_1\cup\overline{OD}; \\ &\frac{\partial\upsilon_0(x,y)}{\partial n}=0, \quad (x,y)\in OA_3. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Одной из функций, удовлетворяющих условию (5), является функция $\upsilon_0(x,y)\equiv 0$, $(x,y)\in\overline{\Delta}^+$, откуда следует, что $\upsilon_0(x,0)=0$, $0\le x\le 1$, т.е. $u_0^+(x,0)-u_0^-(0,-x)=0$, $0\le x\le 1$. Учитывая это и условие (4), имеем

$$u_0^+(x,0)+u_0^+(0,x)=0,\ 0\le x\le 1. \tag{6}$$

Из свойства функции $u_0^+(x,y)$ и равенства (6) следует, что функция $u_0^+(x,y)$ в области $\Omega_3^+$ удовлетворяет уравнению

$$u_{0xx}+u_{0yy}+\lambda_0 u_0=0,$$

а на ее границе – условиям (6) и

$$u_0(x,y)=0,\ (x,y)\in\overline{\sigma}_3;\quad \frac{\partial}{\partial n}u_0(x,y)=0,\ (x,y)\in OA_3.$$

Отсюда следует, что собственные значения и собственные функции задачи $\Theta_\lambda$ в области $\Omega_3^+$ являются также собственными значениями и собственными функциями следующей задачи.

**Задача** $\Psi_\lambda$. Найти значения параметра $\lambda$ и соответствующие им нетривиальные в области $\Omega_3^+$ решения уравнения (1) из класса $C(\overline{\Omega}_3^+)\cap C^1(\Omega_3^+\cup OA_3)\cap C^2(\Omega_3^+)$, удовлетворяющие условиям

$$u(x,y)=0,\ (x,y)\in\overline{\sigma}_3,\ (\partial/\partial n)u(x,y)=0,\ (x,y)\in OA_3$$

и

$$u(x,0)+u\left(x/\sqrt{2},x/\sqrt{2}\right)=0,\ (x,0)\in\overline{OB}_1,$$

где $n$ – внутренняя нормаль к $OA_3$.

## 2. Результаты и исследования

В области $\Omega_3^+$ переходим к полярным координатам

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi\ \ (0 \le r \le 1, 0 \le \varphi \le \pi/2) \tag{7}$$

и решение задачи $\Psi_\lambda$ ищем в виде:

$$u(x,y) = R(r)\cdot\Phi(\varphi) \not\equiv 0. \tag{8}$$

Тогда из задачи $\Psi_\lambda$ относительно функций $R(r)$ получим задачу на собственные значения:

$$r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - \omega^2)R(r) = 0, \quad 0 < r < 1, \tag{9}$$

и $R(0) = 0,\ \ R(1) = 0,$ а относительно $\Phi(\varphi)$ – задачу с условиями

$$\Phi''(\varphi) + \omega^2\Phi(\varphi) = 0, \quad 0 < \varphi < \pi/2, \tag{10}$$

$$\Phi'(\pi/4) = 0,\ \Phi(0) + \Phi(\pi/4) = 0. \tag{11}$$

Решением уравнения (9), удовлетворяющим условию $R(0) = 0$, является функция

$$R(r) = J_\omega\left(\sqrt{\lambda}r\right), \quad \mathrm{Re}\,\omega > 0. \tag{12}$$

Пользуясь общим решением

$$\Phi(\varphi) = a\cos(\omega\varphi) + b\sin(\omega\varphi)$$

уравнения (10) и $\mathrm{Re}\,\omega > 0$, нетрудно убедиться, что нетривиальные решения задачи $\{(10),\ (11)\}$ существуют при $\omega = \omega_n = 8n - 4,\ n \in N$, и они определяются равенствами

$$\Phi_n(\varphi) = a_n\cos\left[(8n-4)\varphi\right], \quad n \in N, \tag{13}$$

где $a_n \ne 0$ – произвольные постоянные.

Подставляя $\omega = \omega_n = 8n - 4$, $n \in N$, в решение

$$\Phi'(\pi/2) = 0,\ \Phi(0) + \Phi(\pi/2) = 0$$

уравнения (9) и удовлетворяя условию $R(1) = 0$, имеем уравнение

$$J_{8n-4}\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0, \ \ n \in N, \tag{14}$$

относительно λ. Обозначая через $\beta_{n,m}$ – $m$-й положительный корень уравнения (14), находим собственные значения $\lambda_{n,m} = \beta_{n,m}^2$ задачи $\Psi_\lambda$.

Собственные функции задачи $\Psi_\lambda$, соответствующие собственным числам $\lambda_{n,m}$, в силу (8), (12), (13) и $\omega = \omega_n = 8n - 4$ имеют вид:

$$\begin{gathered} u_{n,m}(x,y) = a_{n,m}\cos[(8n-4)\varphi]\times \\ \times J_{8n-4}\left(\beta_{n,m}\sqrt{x^2+y^2}\right),\ \ (x,y) \in \Omega_3^+,\ \ n,m \in N, \end{gathered} \tag{15}$$

где $a_{n,m} \ne 0$ – произвольные постоянные.

**Теорема 1.** Система собственных функций $\{u_{n,m}(x,y)\}_{n,m=1}^{\infty}$ задачи $\Psi_\lambda$, определяемая формулой (15), не полна в пространстве $L_2(\Omega_3^+)$.

В самом деле, каждая функция вида $f(x,y)=r^p\sin[(8p-4)\varphi]$, $p=const\in N$, ортогональна ко всем функциям системы (15) в $L_2(\Omega_3^+)$.

Пользуясь функциями (15) и формулами

$$u(x,y)=\left[k_1T_1^{\rho/2}+k_2T_1^{-\rho/2}\right]J_\rho\left[\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}\right],\qquad (x,y)\in\Omega_1^+;.$$

$$u(x,y)=\left[k_3T_2^{\rho/2}+k_4T_2^{-\rho/2}\right]J_\rho\left[\sqrt{\lambda(y^2-x^2)}\right],\qquad (x,y)\in\Omega_1^-,$$

можно убедиться, что числа $\lambda_{n,m}=\beta_{n,m}^2$ являются собственными значениями задачи $\Theta_\lambda$, а собственные функции этой задачи определяются равенствами

$$u_{n,m}(x,y)=\begin{cases}a_{n,m}\cos[(8n-4)\varphi]J_{8n-4}\left[\beta_{n,m}\sqrt{x^2+y^2}\right], & (x,y)\in\Omega_3^+;\\ \frac{1}{2}a_{n,m}\left[T_1^{4n-2}-T_1^{-(4n-2)}\right]J_{8n-4}\left[\beta_{n,m}\sqrt{x^2-y^2}\right], & (x,y)\in\Omega_2^+;\\ \frac{1}{2}a_{n,m}\left[T_2^{4n-2}-T_2^{-(4n-2)}\right]J_{8n-4}\left[\beta_{n,m}\sqrt{y^2-x^2}\right], & (x,y)\in\Omega_2^-;\\ a_{n,m}\cos[(8n-4)\varphi]J_{8n-4}\left[\beta_{n,m}\sqrt{x^2+y^2}\right], & (x,y)\in\Omega_3^-,\end{cases}\tag{16}$$

где $a_{n,m}\neq 0$ – произвольные постоянные, $n,m\in N$; $\mathrm{Re}\rho\geq 0$, $T_1=(x-y)/(x+y)$, $T_2=(y-x)/(y+x)$.

**Теорема 2.** Система собственных функций $\{u_{n,m}(x,y)\}_{n,m=1}^{\infty}$ задачи $\Theta_\lambda$, определяемая формулой (16), не полна в пространстве $L_2(\Delta)$.

**Доказательство.** В области $\Delta$ рассмотрим функцию

$$F(x,y)=\begin{cases}F_3^+(x,y), & (x,y)\in\Omega_3^+;\\ F_2^+(x,y), & (x,y)\in\Omega_2^+;\\ F_2^-(x,y), & (x,y)\in\Omega_2^-;\\ F_3^-(x,y), & (x,y)\in\Omega_3^-,\end{cases}$$

где $F_j^\pm(x,y)\in L_2(\Omega_j^\pm)$, $j=\overline{2,3}$, и интеграл

$$L=\iint\limits_{\Delta}F(x,y)\,u_{n,m}(x,y)\,dx\,dy=\sum_{j=2}^{3}\iint\limits_{\Omega_j^+}F_j^+(x,y)\,u_{n,m}(x,y)\,dx\,dy+$$
$$+\sum_{j=2}^{3}\iint\limits_{\Omega_j^-}F_j^-(x,y)\,u_{n,m}(x,y)\,dx\,dy=L_3^++L_2^++L_2^-+L_3^-.\tag{17}$$

Переходя к полярным координатам (7) в $L_3^+$ и $L_3^-$, получим

$$L_3^+=c_2\int_0^1\bar{J}_{8n-4}(\beta_{n,m}r)r^{8n-3}dr\int_0^\pi f_3^+(r,\theta/4)\cos[(2n-1)\theta]d\theta,\tag{18}$$

$$L_3^- = c_2 \int_0^1 \bar{J}_{8n-4}(\beta_{n,m} r) r^{8n-3} dr \int_{5\pi}^{6\pi} f_3^-(r, \theta/4) \cos[(2n-1)\theta] d\theta, \qquad (19)$$

где $f_3^\pm(r,\theta/4) = F_3^\pm(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, $\theta = 4\varphi$, $c_2 = a_{n,m}(\beta_{n,m}/2)^{8n-4}/[4\Gamma(4n-1)]$.

В интеграле $L_2^+$ произведем замену переменных $\xi = x+y, \eta = x-y$ аналогично тому, как это сделано в доказательстве теоремы [14], получим

$$L_2^+ = c_2 \int_0^1 \bar{J}_{8n-4}\left(\beta_{n,m} q\right) q^{8n-3} dq \int_q^1 f_2^+\left(qs, q/s\right)\left(s^{-8n+3} + s^{8n-5}\right) ds. \qquad (20)$$

Полагая $\xi = -x-y, \eta = x-y$ в интеграле $L_2^-$, аналогично находим

$$L_2^- = c_2 \int_0^1 \bar{J}_{8n-4}\left(\beta_{n,m} q\right) q^{8n-3} dq \int_q^1 f_2^-\left(qs, q/s\right)\left(s^{-8n+3} + s^{8n-5}\right) ds, \qquad (21)$$

здесь $f_2^\pm\left(qs, q/s\right) = F_2^\pm(x,y)$.

Подставляя (18)–(21) в (17), будем иметь

$$\begin{aligned} L = c_2 \int_0^1 \bar{J}_{8n-4}\left(\beta_{n,m} r\right) r^{8n-3} dr \Bigg[ \int_0^\pi f_3^+\left(r, \theta/4\right) \cos[(2n-1)\theta] d\theta + \\ + \int_{5\pi}^{6\pi} f_3^-\left(r, \theta/4\right) \cos[(2n-1)\theta] d\theta \Bigg] + c_2 \int_0^1 \bar{J}_{8n-4}\left(\beta_{n,m} q\right) q^{8n-3} dq \times \\ \times \int_q^1 \left[ f_2^+\left(qs, q/s\right) + f_2^-\left(qs, q/s\right) \right]\left(s^{-8n+3} + s^{8n-5}\right) ds. \end{aligned} \qquad (22)$$

Пусть $f_3^\pm\left(r,\theta/4\right) = r^p \sin\left[(2p-1)\theta\right]$, $p = \mathrm{const} \in N$; $f_2^+\left(qs, q/s\right) = -f_2^-\left(qs, q/s\right) \not\equiv 0$. Тогда из (22) следует, что $L = 0$. Следовательно, существует функция $F(x,y) \in L_2(\Delta)$, и $F(x,y) \not\equiv 0$ в $\bar{\Delta}$, которая ортогональна ко всем функциям системы (16). Теорема 2 доказана.

**Список источников**

1. *Бицадзе А.В.* Об одном трехмерном аналоге задачи Трикоми // Сибирский математический журнал. 1962. № 3. С. 642–644.
2. *Ежов А.М., Пулькин С.П.* Оценка решения задачи Трикоми для одного класса уравнений смешанного типа // Доклады Академии наук СССР. 1970. Т. 193, № 5. С. 978–980.
3. *Нахушев А.М.* Об одном классе линейных краевых задач для гиперболического и смешанного типов уравнений второго порядка. Нальчик : Эльбрус, 1992. 155 с.
4. *Кальменов Т.Ш.* О спектре задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, № 8. С. 1418–1425.
5. *Моисеев Е.И.* Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М. : Моск. гос. ун-т, 1988. 150 с.
6. *Пономарев С.М.* Спектральная теория основной краевой задачи для уравнения смешанного типа Лаврентьева–Бицадзе : дис. … д-ра физ.-мат. наук. М., 1981. 139 с.
7. *Сабитов К.Б.* К теории уравнений параболо-гиперболического типа со спектральным параметром // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, № 1. С. 117–126.

8. *Сабитов К.Б., Тихомиров В.В.* О построении собственных значений и функций одной газодинамической задачи Франкля // Математическое моделирование. 1990. Т. 2, № 10. С. 100–109.
9. *Салахитдинов М.С., Уринов А.К.* Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. Ташкент : Фан, 1997. 166 с.
10. *Уринов А.К., Тожибоев И.Т.* Собственные числа и собственные функции некоторых краевых задач для одного уравнения смешанного типа с негладкой линией изменения типа // Дифференциальные уравнения, функциональные пространства, теория приближений : тез. междунар. науч. конф., 5–12 октября 2008 г. Новосибирск, 2008. С. 218.
11. *Уринов А.К., Тожибоев И.Т.* О полноте системы собственных функций некоторых внутренне-краевых задач для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с негладкой линией изменения типа // Доклады Академии наук Республики Узбекистан. 2009. № 3-4. С. 19–23.
12. *Тожибоев И.Т.* Краевые задачи в специальной области для уравнения смешанного типа // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 56. С. 17–29.
13. *Тожибоев И.Т.* Собственные числа и собственные функции одной внутренне-краевой задачи для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с негладкой линией изменения типа // Узбекский математический журнал. 2009. № 4. С. 107–114.
14. *Urinov A.K., Tojiboev I.T.* Eigenvalue and eigenfunctions of some boundary-value problems for a mixed type equation with non-smooth line of type changing // Proceedings of the 16th Inter. conf. on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, July 28 – August 1, 2008. Gyeongju, 2009. P. 282–289.


**References**


1. Bitsadze A.V. (1962) Ob odnom trekhmernom analoge zadachi Trikomi [A three-dimensional analogue of the Tricomi problem]. *Siberian Mathematical Journal*. 3(5). pp. 642–644.
2. Ezhov A.M., Pul'kin S.P. (1970) Otsenka resheniya zadachi Trikomi dlya odnogo klassa uravneniy smeshannogo tipa [Estimation of the solution of the Tricomi problem for a certain class of equations of mixed type]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 193(5). pp. 978–980.
3. Nakhushev A.M. (1992) *Ob odnom klasse lineynykh krayevykh zadach dlya giperbolicheskogo i smeshannogo tipov uravneniy vtorogo poryadka* [On a class of linear boundary-value problems for the hyperbolic and the mixed type equations of the second order]. Nalchik: Elbrus.
4. Kal'menov T.S. (1977) O spektre zadachi Trikomi dlya uravneniya Lavrent'yeva – Bitsadze [On spectrum of the Tricomi problem for the Lavrent'ev–Bitsadze equation]. *Differentsial'nye uravneniya*. 13(8). pp. 1418–1425.
5. Moiseev E.I. (1988) *Uravneniya smeshannogo tipa so spektral'nym parametrom* [Mixed type equations with a spectral parameter]. Moscow: Moscow State University.
6. Ponomarev S.M. (1981) *Spektral'naya teoriya osnovnoy krayevoy zadachi dlya uravneniya smeshannogo tipa Lavrent'yeva – Bitsadze* [Spectral theory of the main boundary value problem for the Lavrent'ev–Bitsadze equation of the mixed type]. Dissertation. Moscow State University.
7. Sabitov K.B. (1989) K teorii uravneniy parabolo-giperbolicheskogo tipa so spektral'nym parametrom [Toward the theory of mixed parabolic-hyperbolic type equations with a spectral parameter]. *Differentsial'nye uravneniya*. 25(1). pp. 117–126.
8. Sabitov K.B., Tikhomirov V.V. (1990) O postroyenii sobstvennykh znacheniy i funktsiy odnoy gazodinamicheskoy zadachi Franklya [On construction of eigenvalues and eigenfunctions of a gas-dynamical Frankl problem]. *Matematicheskoye modelirovatiye*. 2(10). pp. 100–109.
9. Salakhitdinov M.S., Urinov A.K. (1997) *Krayevyye zadachi dlya uravneniy smeshannogo tipa so spektral'nym parametrom* [Boundary value problems for mixed type equations with a spectral parameter]. Tashkent: Fan.

10. Urinov A.K., Tojiboev I.T. (2008) Sobstvennyye chisla i sobstvennyye funktsii nekotorykh krayevykh zadach dlya odnogo uravneniya smeshannogo tipa s negladkoy liniyey izmeneniya tipa [Eigenvalues and eigenfunctions of some boundary value problems for an equation of mixed type with a nonsmooth line of type change]. *Differential Equations, Functional Spaces, Approximation Theory: Proceeding of the International Scientific Conference. October 5–12, 2008. Novosibirsk*. p. 218.
11. Urinov A.K., Tojiboev I.T. (2009) O polnote sistemy sobstvennykh funktsiy nekotorykh vnutrenne-krayevykh zadach dlya uravneniya Lavrent'yeva – Bitsadze s negladkoy liniyey izmeneniya tipa [On completeness of the system of eigenfunctions of some internal boundary value problems for the Lavrentiev–Bitsadze equation with a non-smooth line of type change]. *Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan*. 3-4. pp. 19–23.
12. Tojiboev I.T. (2018) Krayevyye zadachi v spetsial'noy oblasti dlya uravneniya smeshannogo tipa [Boundary problems in a special domain for an equation of mixed type]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 56. pp. 17–28.
13. Tojiboev I.T. (2009) Sobstvennyye chisla i sobstvennyye funktsii odnoy vnutrenne-krayevoy zadachi dlya uravneniya Lavrent'yeva – Bitsadze s negladkoy liniyey izmeneniya tipa [Eigenvalues and eigenfunctions of an internal boundary value problem for the Lavrentiev–Bitsadze equation with a non-smooth type change line]. *Uzbek Mathematical Journal*. 4. pp. 107–114.
14. Urinov A.K., Tojiboev I.T. (2009) Eigenvalue and eigenfunctions of some boundary-value problems for a mixed type equation with non-smooth line of type changing. *Proceedings of the 16th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, July 28–August 1, 2008. Gyeongju*. pp. 282–289.

***Сведения об авторе*:**
**Тожибоев Иброхимжон Тожалиевич** – кандидат физико-математических наук, доцент Ферганского государственного университета (Фергана, Узбекистан). E-mail: ibroxim@gmail.com

***Information about the author*:**
**Tojiboev Ibrokhimjon T.** (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Ferghana State University, Ferghana, Republic of Uzbekistan). E-mail: ibroxim@gmail.com

*Статья поступила в редакцию 24.10.2023; принята к публикации 07.02.2025*

*The article was submitted 24.10.2023; accepted for publication 07.02.2025*