

Научная статья

УДК 521.1, 521.182

doi: 10.17223/19988621/93/10

## Исследование стохастических свойств средневысотной области движения спутников глобальных навигационных систем

Эдуард Дмитриевич Кузнецов<sup>1</sup>, Екатерина Сергеевна Смагина<sup>2</sup>,  
Иван Сергеевич Жмакин<sup>3</sup>, Тавриз Ринатович Уразаев<sup>4</sup>

*1, 2, 3, 4 Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия*

*<sup>1</sup> eduard.kuznetsov@urfu.ru*

*<sup>2</sup> Ekaterina.Smagina@urfu.me*

*<sup>3</sup> zhmakin01@bk.ru*

*<sup>4</sup> urazaev11@list.ru*

**Аннотация.** Стохастические свойства средневысотной области движения спутников глобальных навигационных систем исследованы для малых и умеренных отношений площади миделева сечения к массе на основе результатов численного моделирования. Стохастические свойства движения анализировались с использованием интегральной автокорреляционной функции. При увеличении начальных значений наклона и большой полуоси орбиты проявления стохастической эволюции, обусловленной лунно-солнечными возмущениями, увеличиваются. Оценки интегральной автокорреляционной функции существенно зависят от начальной ориентации плоскости орбиты по отношению к направлению на Солнце.

**Ключевые слова:** глобальные навигационные спутниковые системы, отношение площади миделева сечения к массе, стохастическое движение, орбитальная эволюция, интегральная автокорреляционная функция

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, тема № FEUZ-2020-0038.

**Для цитирования:** Кузнецов Э.Д., Смагина Е.С., Жмакин И.С., Уразаев Т.Р. Исследование стохастических свойств средневысотной области движения спутников глобальных навигационных систем // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 93. С. 117–130. doi: 10.17223/19988621/93/10

## A study of stochastic properties of the mid-altitude region of motion of global navigation system satellites

Eduard D. Kuznetsov<sup>1</sup>, Ekaterina S. Smagina<sup>2</sup>,  
Ivan S. Zhmakin<sup>3</sup>, Tavriz R. Urazaev<sup>4</sup>

<sup>1, 2, 3, 4</sup> Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation

<sup>1</sup> [eduard.kuznetsov@urfu.ru](mailto:eduard.kuznetsov@urfu.ru)

<sup>2</sup> [Ekaterina.Smagina@urfu.me](mailto:Ekaterina.Smagina@urfu.me)

<sup>3</sup> [zhmakin01@bk.ru](mailto:zhmakin01@bk.ru)

<sup>4</sup> [urazaev11@list.ru](mailto:urazaev11@list.ru)

**Abstract.** The study of the stochastic properties of the mid-altitude region of motion of global navigation system satellites at low and moderate area-to-mass ratios (0.001, 0.01, and 0.1 m<sup>2</sup>/kg) is performed based on the numerical simulation results. The behavior of the integrated autocorrelation functions for the semi-major axis and Kholshchevnikov metric is considered. The Kholshchevnikov metric is specified in the three-dimensional factor space of the positional orbit elements. The initial orbits are assumed to be close to circular orbits with an eccentricity of 0.0001. The initial inclination is chosen according to the semi-major axis of the orbit: 64.8° near the GLONASS system, 55° near the GPS and BeiDou systems, and 56° near the Galileo system. The initial longitude of the ascending node is varied with a 90° step. The dependence of the integrated autocorrelation function on the initial semi-major axis of object's orbit is analyzed. The occurrence of stochastic evolution grows with an increase in the initial inclination and semi-major axis of the orbit due to luni-solar perturbations. The attributes of stochastic behavior are revealed even at small area-to-mass ratios corresponding to the satellites. It can be concluded that the estimates of the integrated autocorrelation function significantly depend on the initial orientation of the orbit plane with respect to the direction to the Sun. This should be considered when selecting orbits for the disposal of deactivated satellites of global navigation systems.

**Keywords:** global navigation satellite systems, area-to-mass ratio, stochastic motion, orbital evolution, integrated autocorrelation function

**Acknowledgments:** This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. FEUZ-2020-0038).

**For citation:** Kuznetsov, E.D., Smagina, E.S., Zhmakin, I.S., Urazaev, T.R. (2025) A study of stochastic properties of the mid-altitude region of motion of global navigation system satellites. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 93. pp. 117–130. doi: 10.17223/19988621/93/10

### Введение

Исследование стохастической эволюции объектов, движущихся вблизи орбит глобальных навигационных спутниковых систем, представляет интерес для решения проблемы космического мусора, поскольку навигационные спутники, завершившие работу, остаются вблизи области движения рабочих спутников. Актуаль-

ность данной проблемы связана с тем, что постепенное разрушение завершивших работу спутников может приводить к появлению объектов, имеющих большую парусность (отношение площади миделева сечения  $A$  к массе  $m$ ), что ведет к росту возмущений, обусловленных давлением солнечного излучения, так как для объектов за пределами атмосферы Земли световое давление является основным негравитационным возмущающим фактором.

В настоящее время ведутся активные исследования динамических свойств околоземного космического пространства. Например, в международном проекте ReDSHIFT выполняется динамическое картографирование области околоземного пространства от 400 км над поверхностью Земли до геостационарной и супергеосинхронных орбит [1] с целью анализа устойчивости орбит и их стохастических свойств. В НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета (НИИ ПММ ТГУ) изучаются резонансные и стохастические свойства низких, средних и высоких орбит (см., напр.: [2–5]). Сохраняется интерес к детальному исследованию отдельных областей околоземного космического пространства, например к средним и высоким орбитам, по которым происходит движение спутников глобальных навигационных систем [6–10]. При исследовании орбитальной эволюции объектов на интервалах десятков и сотен лет необходимо учитывать, что характер эволюции орбит фрагментов космического мусора может становиться стохастическим за счет влияния резонансов средних движений и вековых резонансов [6], а при росте парусности вероятность проявления стохастических свойств увеличивается.

В настоящей работе новизна подхода, направленного на изучение стохастических свойств движения, связана с использованием интегральной автокорреляционной функции [11]. Этот относительно простой и эффективный метод был успешно применен для исследования стохастической эволюции объектов в окрестности геосинхронных орбит [11] более 15 лет назад, в настоящее время он практически не используется.

Цель настоящей работы – исследовать стохастические свойства движения в области средневысотных орбит глобальных навигационных систем на основе результатов численного моделирования, используя интегральные автокорреляционную функцию для большой полуоси и метрики Холшевникова [12].

### **Методика исследования**

Стохастические свойства движения исследовались на основе результатов численного моделирования с помощью численной модели движения искусственных спутников Земли, разработанной в НИИ ПММ ТГУ [10]. Мы использовали модель возмущающих сил, которая включает основные возмущающие факторы: влияние гравитационного поля Земли (в модели гравитационного потенциала Земли EGM96 учитывались гармоники до 27-го порядка и степени включительно); притяжение Луны и Солнца в приближении точечных масс; приливы в теле Земли; прямое давление солнечного излучения (модель сферического объекта с однородной диффузно отражающей поверхностью и коэффициентом отражения  $k = 1.44$ ) с учетом тени Земли; эффект Пойнтинга–Робертсона; сопротивление атмосферы в случае, если орбита спутника проходит через атмосферу Земли. Уравнения движения интегрируются методом Эверхарта 19-го порядка.

Мы рассматривали области около средневысотных орбит спутников глобальных навигационных систем ГЛОНАСС, GPS, BeiDou и Galileo. Начальные значения большой полуоси орбиты  $a_0$  варьировали от 25 400 км (ниже орбит ГЛОНАСС) до 30 000 км (выше орбит Galileo) с шагом 10 км. Начальное значение наклона орбиты  $i_0$  полагалось равным  $63.4^\circ$  для  $a_0 = 25\,400\text{--}25\,950$  км (окрестность орбит системы ГЛОНАСС),  $i_0 = 55^\circ$  для  $a_0 = 25\,950\text{--}29\,040$  км (окрестность орбит систем GPS и средневысотного сегмента BeiDou),  $i_0 = 56^\circ$  для  $a_0 = 29\,040\text{--}30\,000$  км (окрестность орбит системы Galileo). Начальное значение эксцентриситета орбиты  $e_0$  было выбрано равным 0.0001, что соответствует номинальным эксцентриситетам орбит навигационных спутников. Для долготы восходящего узла  $\Omega_0$  рассматривались четыре начальных значения: 0, 90, 180,  $270^\circ$ . Начальное значение аргумента перицентра  $g_0$  положено равным  $270^\circ$ . Начальная эпоха  $T_0 = 00^{\text{h}} 00^{\text{m}} 00^{\text{s}}$  21.03.1998. Рассматривались значения парусности  $A/m = 0.001, 0.01$  и  $0.1$  м<sup>2</sup>/кг. Эволюция при более высоких значениях парусности будет исследоваться в следующих работах. Интервал интегрирования составлял 200 лет. Длительность интервала определялась в первую очередь необходимостью надежного выявления признаков стохастического движения.

Стохастические свойства движения анализировались с помощью интегральной автокорреляционной функции  $W$  [11], определяемой как среднее значение квадратов последовательности автокорреляционных функций  $A_k$  по смешанным моментам:

$$A_k = \frac{\sum_{i=0}^{N-k} (r_i - \bar{r}_i)(r_{i+k} - \bar{r}_{i+k})}{\left( \sum_{i=0}^{N-k} (r_i - \bar{r}_i)^2 \sum_{i=0}^{N-k} (r_{i+k} - \bar{r}_{i+k})^2 \right)^{1/2}} \quad (1)$$

где  $\bar{r}_s = (s+1)^{-1} \sum_{i=0}^s r_i$  – среднее значение  $s$ -элементного подмножества равномерного временного ряда

$$r = \{r_i : r_i = r(f(t_0 + ih)), 0 \leq i \leq N\}, \quad (2)$$

где  $t_0$  – начальный момент,  $h$  – постоянный шаг,  $N$  – число членов временного ряда. При обработке результатов интегрирования на интервале 200 лет число членов  $N$  составляло 7 307, шаг временного ряда  $h$  (шаг выдачи результатов) равнялся 10 сут.

Для вычисления интегральной автокорреляционной функции  $W$  использовалось ее представление в виде суммы

$$W(J_K) = \frac{1}{J_K} \left( 1 + \sum_{k=1}^K (J_k - J_{k-1}) A_{J_k}^2 \right), \quad (3)$$

где  $K = [B(\lg(N)/\lg(2))]$  – максимальное рассматриваемое значение  $k$ , на котором завершается суммирование по сдвигам аргумента автокорреляционной функции  $A_{J_k}$ ,  $B$  – базовое число,  $[z]$  – целая часть числа  $z$ . Параметр  $J_k = j_k - j_{k-k}$  в формуле (3) задает сдвиг аргумента автокорреляционной функции  $A_{J_k}$  на последовательности экспоненциально распределенных точек:

$$j_0 = 0, \quad j_1 = 1, \quad \dots, \quad j_k = j_{k-1} + 2^{\lfloor (k-1)/B \rfloor}, \quad k = 0, 1, \dots, K.$$

Если  $B = 1$ , то получается последовательность точек  $\{0, 1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$ . При больших значениях  $B$  точки выборки группируются в последовательности из  $B$  точек, каждая последующая последовательность в два раза реже предыдущей.

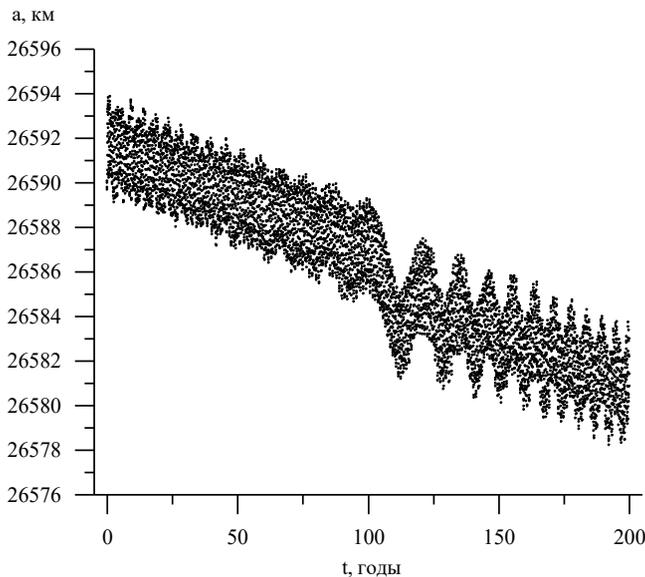
Свойства интегральной автокорреляционной функции  $W$  (3) позволяют выявлять и анализировать хаотическое поведение системы. В случае постоянного временного ряда функция  $W$  асимптотически стремится к 1. Если равномерный временной ряд представим периодической функцией типа синус, функция  $W$  стремится к 0.5. Для других периодических и квазипериодических временных рядов функция  $W$  изменяется в небольших пределах около 0.5. Для хаотических траекторий интегральная автокорреляционная функция  $W$  асимптотически стремится к нулю.

Оценка функции  $W$ , получаемая по формуле (3), зависит от выбора значения базового числа  $B$ . Была выполнена серия численных экспериментов на интервале времени 200 лет, в которых значение  $B$  варьировало от 50 до 500. В качестве оптимального было выбрано значение базового числа  $B = 100$ , при котором интегральная автокорреляционная функция  $W$  на рассматриваемом интервале времени оценивается надежно при минимальных затратах вычислительных ресурсов.

В настоящей работе мы рассматривали поведение двух интегральных автокорреляционных функций:  $W_a$  для большой полуоси орбиты  $a$  и  $W_{\rho_5}$  для метрики Холшевникова  $\rho_5$  [12] между текущей (индекс 2) и начальной (индекс 1) орбитами. Метрика Холшевникова  $\rho_5$  (обозначение метрики  $\rho_5$  соответствует соглашению, принятому в работе [12]) вычисляется на основе позиционных элементов орбиты (большая полуось  $a$ , эксцентриситет  $e$ , наклон  $i$ ):

$$\rho_5^2 = (1 + e_1^2) p_1 + (1 + e_2^2) p_2 - 2\sqrt{p_1 p_2} [e_1 e_2 + \cos(i_1 - i_2)], \quad (4)$$

следовательно, функция  $W_{\rho_5}$  характеризует стохастические свойства орбитально-эллипса без учета движения узлов и перигея.



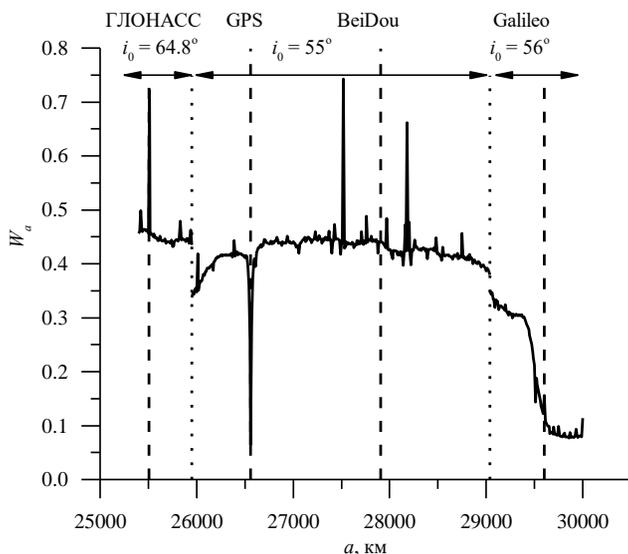
**Рис. 1.** Эволюция большой полуоси орбиты вблизи области резонанса 1/2 ( $a_0 = 26\,590$  км,  $\Omega_0 = 0^\circ$ ,  $A/m = 1$  м<sup>2</sup>/кг)

**Fig. 1.** Evolution of a semi-major axis of the orbit near the resonance region 1/2 ( $a_0 = 26\,590$  km,  $\Omega_0 = 0^\circ$ ,  $A/m = 1$  м<sup>2</sup>/кг)

Стохастические эффекты в первую очередь проявляются в угловых элементах орбиты: аномалиях, аргументах и долготах, что приводит к частичной потере информации о положении объекта, ориентации конического сечения и плоскости орбиты. Однако для анализа области возможных движений существенную роль играют размер, форма и наклон орбиты, описываемые позиционными элементами. Именно поэтому в данной работе основное внимание уделяется интегральным автокорреляционным функциям большой полуоси  $W_a$  и метрики Холшевникова  $W_{\rho_5}$ . Пример проявления стохастичности в большой полуоси орбиты объекта вблизи области резонанса  $1/2$  (система GPS) показан на рис. 1. Большое отношение миделева сечения к массе  $A/m = 1 \text{ м}^2/\text{кг}$  приводит к вековому уменьшению большой полуоси орбиты  $a$ . Примерно через 100 лет объект проходит через область резонанса  $1/2$ , в результате чего происходит качественное изменение характера эволюции.

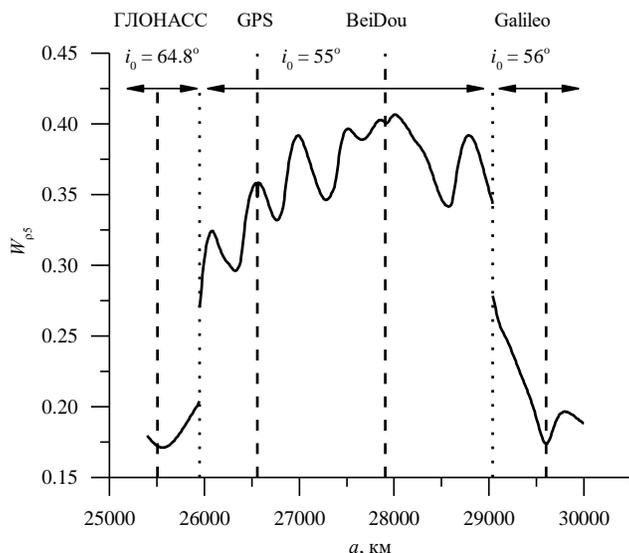
### Результаты и их обсуждение

На рис. 2 и 3 соответственно показаны зависимости оценок интегральных автокорреляционных функций  $W_a$  и  $W_{\rho_5}$  от начальной большой полуоси  $a$  для начальной долготы восходящего узла  $\Omega_0 = 0^\circ$  при парусности  $A/m = 0.001 \text{ м}^2/\text{кг}$ . Значения больших полуосей, соответствующих номинальным средневысотным орбитам спутников глобальных навигационных систем ГЛОНАСС, GPS, BeiDou, Galileo, показаны штриховыми линиями. На рис. 2 и 3 объединены результаты, полученные при различных начальных наклонах орбит  $i_0$ . Границы начальных больших полуосей орбит  $a$ , соответствующих заданным начальным наклонам  $i_0$ , показаны пунктирными линиями.



**Рис. 2.** Зависимость интегральной автокорреляционной функции для большой полуоси  $W_a$  от начального значения большой полуоси  $a$  ( $\Omega_0 = 0^\circ$ ,  $A/m = 0.001 \text{ м}^2/\text{кг}$ )

**Fig. 2.** Dependence of the integrated autocorrelation function for the semi-major axis  $W_a$  on the initial semi-major axis  $a$  ( $\Omega_0 = 0^\circ$ ,  $A/m = 0.001 \text{ м}^2/\text{кг}$ )



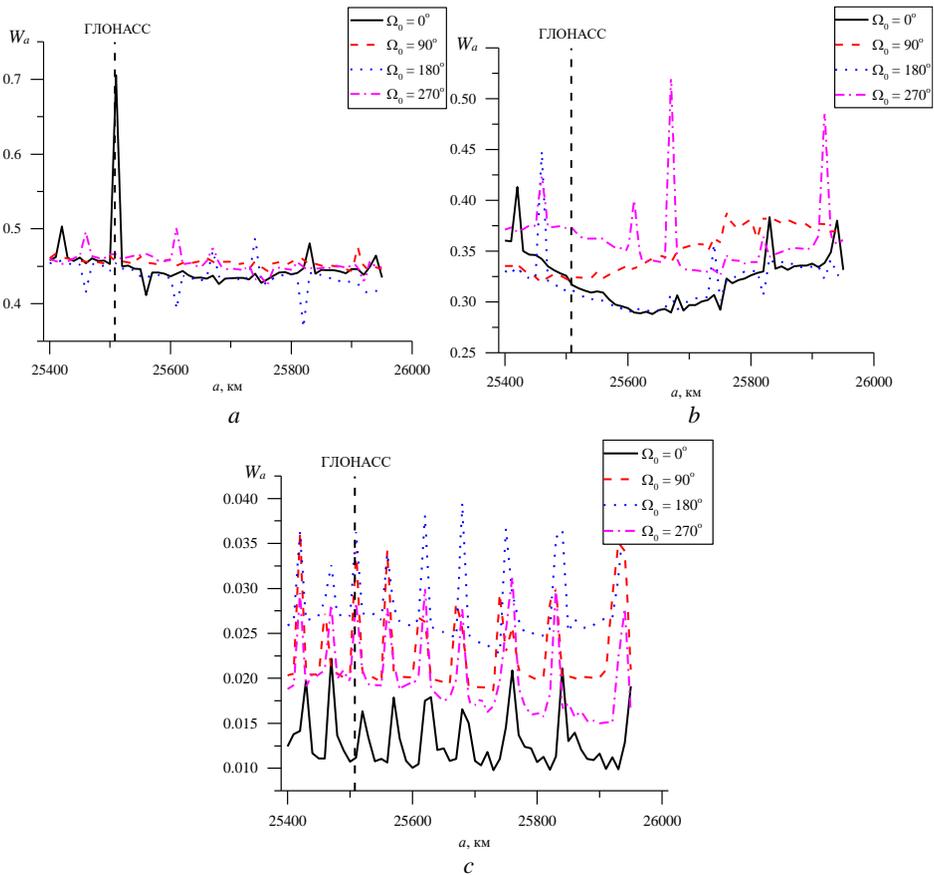
**Рис. 3.** Зависимость интегральной автокорреляционной функции для метрики Холшевникова  $W_{p5}$  от начального значения большой полуоси  $a$  ( $\Omega_0 = 0^\circ$ ,  $A/m = 0.001 \text{ м}^2/\text{кг}$ )  
**Fig. 3.** Dependence of the integrated autocorrelation function for the Kholshchevnikov metric  $W_{p5}$  on the initial semi-major axis  $a$  ( $\Omega_0 = 0^\circ$ ,  $A/m = 0.001 \text{ м}^2/\text{кг}$ )

Функция  $W_a$  характеризуется наличием локальных экстремумов большой амплитуды для некоторых значений большой полуоси (см. рис. 2): например, максимум в окрестности номинального значения большой полуоси системы ГЛОНАСС и минимум для системы GPS. В обоих случаях присутствуют тессеральные резонансы: резонанс высокого порядка 8:17 для системы ГЛОНАСС и резонанс низкого порядка 1:2 для GPS. В области системы GPS даже при малом значении парусности  $A/m = 0.001 \text{ м}^2/\text{кг}$ , которое сопоставимо с парусностью спутников NAVSTAR (см, напр.: [13]), проявляется стохастический характер эволюции большой полуоси орбиты. При начальных значениях большой полуоси от 25 500 до 29 000 км функция  $W_a$  колеблется в пределах от 0.5 до 0.35 (исключая несколько локальных экстремумов), что свидетельствует о регулярном характере эволюции большой полуоси орбиты. В области движения спутников Galileo функция  $W_a$  быстро убывает до значений менее 0.1, что свидетельствует о нарастании стохастичности за счет влияния лунно-солнечных возмущений.

Изменение функции  $W_{p5}$  более плавное (см. рис. 3). Экстремумы функции располагаются вблизи (для ГЛОНАСС) или совпадают (для GPS, BeiDou, Galileo) со значениями больших полуосей орбит спутников глобальных навигационных систем. Для системы ГЛОНАСС значение функции  $W_{p5} \approx 0.17$ , что указывает на проявление стохастических свойств, в отличие от  $W_a \approx 0.73$ , указывающего на малые изменения большой полуоси. Это связано с ростом стохастичности в эволюции эксцентриситета и наклона при большом начальном значении последнего. Для системы GPS функция  $W_{p5}$  имеет острый локальный минимум аналогично  $W_a$ . В области движения спутников систем GPS и BeiDou значения функции  $W_{p5}$  лежат в пределах от 0.28 до 0.41, что указывает на регулярный характер эволюции. Это согласуется с выводом, полученным на основе анализа поведения функции  $W_a$ .

В области системы Galileo функция  $W_{p5}$  быстро убывает и достигает минимума  $W_{p5} \approx 0.175$ , что говорит о нарастании стохастичности, обусловленной лунно-солнечными возмущениями, как и в случае функции  $W_a$ . Все рассматриваемые глобальные навигационные спутниковые системы (ГНСС) являются резонансными: ГЛОНАСС – 8:17, GPS – 1:2, BeiDou – 7:13, Galileo – 10:17. Для всех систем наличие резонансов ведет к формированию локальных минимумов функции  $W_{p5}$ , в отличие от функции  $W_a$ .

На рис. 4 и 5 даны зависимости оценок интегральных автокорреляционных функций  $W_a$  и  $W_{p5}$  от начальной большой полуоси  $a$  для области ГЛОНАСС при варьировании начальной долготы восходящего узла:  $\Omega_0 = 0, 90, 180, 270^\circ$  и парусности  $A/m = 0.001, 0.01, 0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$ .



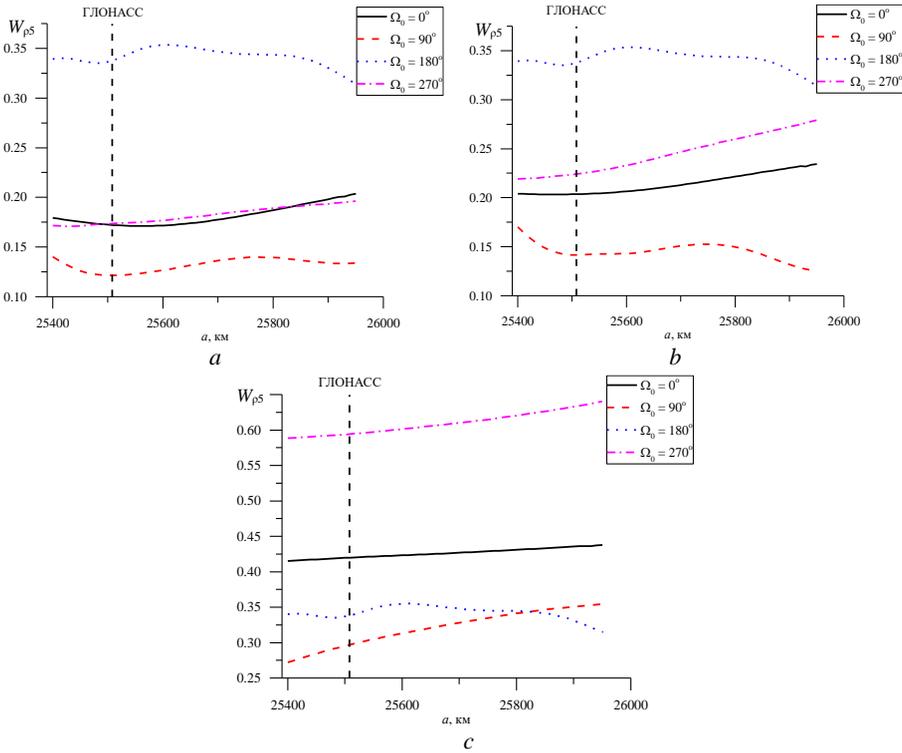
**Рис. 4.** Зависимость интегральной автокорреляционной функции для большой полуоси  $W_a$  от начальной большой полуоси  $a$  для области ГЛОНАСС при различных начальных долготах восходящего узла  $\Omega_0$  и отношениях  $A/m$ :  $a - A/m = 0.001 \text{ м}^2/\text{кг}$ ,  $b - A/m = 0.01 \text{ м}^2/\text{кг}$ ,  $c - A/m = 0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$

**Fig. 4.** Dependence of the integrated autocorrelation function for the semi-major axis  $W_a$  on the initial semi-major axis  $a$  for the GLONASS region at different initial longitudes of the ascending node  $\Omega_0$  and area-to-mass ratios  $A/m$ :  $A/m = (a) 0.001, (b) 0.01, \text{ and } (c) 0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$

Как видно из рис. 4, при варьировании начальной долготы восходящего узла  $\Omega_0$  значения функции  $W_a$  меняются слабо, экстремумы изменяют свой вид и положение, но большинство колебаний функции  $W_a$  остается на уровне фоновых изменений. Отметим, что максимум функции  $W_a$  при значении, равном номинальному значению большой полуоси орбиты системы ГЛОНАСС, присутствует только в одном варианте при  $\Omega_0 = 0^\circ$  и  $A/m = 0.001 \text{ м}^2/\text{кг}$ . При увеличении парусности  $A/m$  от 0.001 до  $0.01 \text{ м}^2/\text{кг}$ , значение функции  $W_a$  в среднем уменьшается на 0.1, достигая в минимуме 0.3, т.е. происходит нарастание стохастичности. Также с ростом парусности увеличивается разброс значений функции  $W_a$  при различных начальных долготах восходящего узла  $\Omega_0$ . При парусности  $A/m = 0.001 \text{ м}^2/\text{кг}$  интегральная автокорреляционная функция  $W_a$  в среднем уменьшается с ростом большой полуоси  $a$ . При  $A/m = 0.01 \text{ м}^2/\text{кг}$  поведение функции  $W_a$  зависит от начальной долготы восходящего узла  $\Omega_0$ . При  $A/m = 0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$  значения функции  $W_a$  изменяются в пределах от 0.01 до 0.04, что указывает на проявление стохастичности в поведении большой полуоси орбиты  $a$ , связанное с влиянием светового давления. Отметим, что в этом случае зависимость функции  $W_a$  от начальной большой полуоси  $a$  имеет квазипериодический характер для всех рассмотренных начальных значений долготы восходящего узла  $\Omega_0$ .

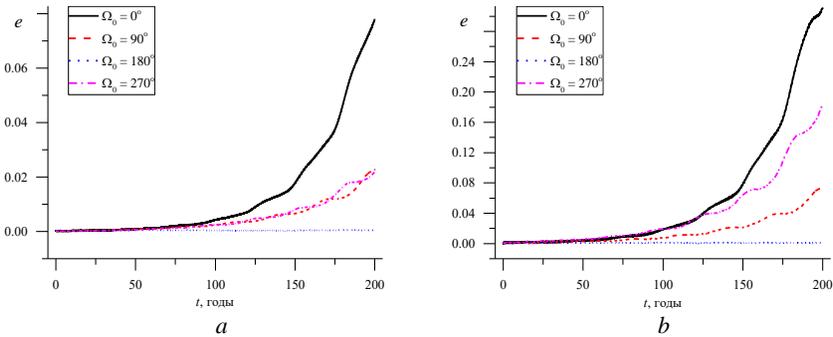
Интегральная автокорреляционная функция  $W_{p5}$  при значениях парусности  $A/m = 0.001$  и  $0.01 \text{ м}^2/\text{кг}$  изменяется в пределах от 0.12 до 0.35 (см. рис. 5, *a, b*) в зависимости от начальной долготы восходящего узла  $\Omega_0$ . При  $\Omega_0 = 0, 90, 270^\circ$  стохастическое поведение проявляется наиболее сильно. Сравнение с функцией  $W_a$  (см. рис. 4, *a, b*) указывает, что стохастическое поведение связано с особенностями эволюции эксцентриситета орбит (рис. 6) под влиянием возмущений от Луны и Солнца. На рассматриваемом интервале времени эволюция эксцентриситета не имеет доминирующей периодической составляющей, а представляется нелинейной возрастающей функцией, что приводит к малым значениям функции  $W_{p5}$ . Появление выраженной периодической компоненты при росте парусности (см. рис. 6, *b* при  $\Omega_0 = 270^\circ$ ) приводит к росту значений функции  $W_{p5}$ . Рост парусности до значения  $A/m = 0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$  (см. рис. 5, *c*) приводит к увеличению  $W_{p5}$ . При начальных значениях  $\Omega_0 = 0$  и  $270^\circ$  движение становится регулярным, а при  $\Omega_0 = 90$  и  $180^\circ$  проявления стохастичности уменьшаются. Это может быть связано с доминированием возмущений от светового давления в эксцентриситете и наклоне над лунно-солнечными возмущениями.

На рис. 7 и 8 показаны зависимости интегральных автокорреляционных функций  $W_a$  и  $W_{p5}$  от начальной большой полуоси  $a$  для областей GPS и BeiDou при варьировании начальной долготы восходящего узла:  $\Omega_0 = 0, 90^\circ$  и парусности  $A/m = 0.001, 0.01, 0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$ . Как видно из рис. 7, изменение функции  $W_a$  для значений  $\Omega_0 = 0$  и  $90^\circ$  происходит схожим образом. При  $A/m = 0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$  эволюция большой полуоси  $a$  становится стохастической. Зависимости функции  $W_{p5}$  от большой полуоси  $a$  при  $\Omega_0 = 0^\circ$  для значений парусности  $A/m = 0.001, 0.01, 0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$  практически совпадают (см. рис. 8, *a*). При  $\Omega_0 = 90^\circ$  для значений парусности  $A/m = 0.001$  и  $0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$  эволюция становится стохастической (см. рис. 8, *b*), хотя для  $A/m = 0.01 \text{ м}^2/\text{кг}$  характер эволюции близок к регулярному. Это связано с особенностями эволюции эксцентриситета орбиты, аналогичными приведенным на рис. 6. Отметим, что при  $\Omega_0 = 90^\circ$  и  $A/m = 0.001 \text{ м}^2/\text{кг}$  вблизи орбиты GPS формируются условия для регулярной эволюции.



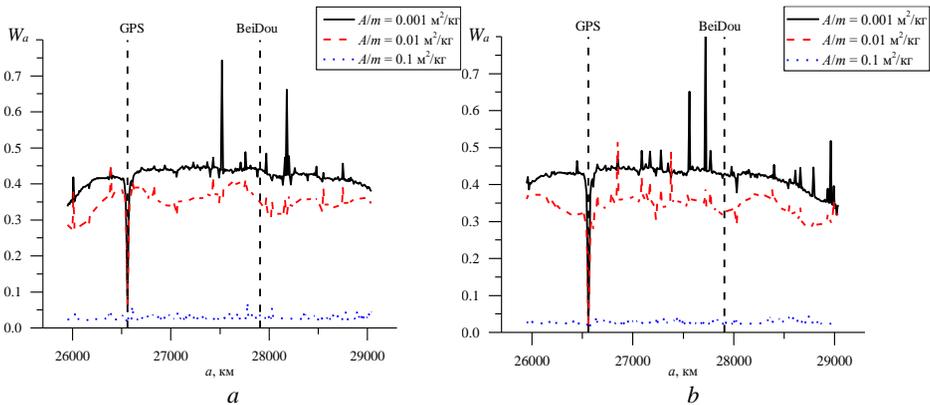
**Рис. 5.** Зависимость интегральной автокорреляционной функции для метрики Холшевникова  $W_{p5}$  от начальной большой полуоси  $a$  для области ГЛОНАСС при различных начальных долготах восходящего узла  $\Omega_0$  и отношениях  $A/m$ :  $a - A/m = 0.001 \text{ м}^2/\text{кг}$ ,  $b - A/m = 0.01 \text{ м}^2/\text{кг}$ ,  $c - A/m = 0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$

**Fig. 5.** Dependence of the integrated autocorrelation function for the Kholshchevnikov metric  $W_{p5}$  on the initial semi-major axis  $a$  for the GLONASS region at different initial longitudes of the ascending node  $\Omega_0$  and area-to-mass ratios  $A/m$ :  $A/m = (a) 0.001, (b) 0.01, \text{ and } (c) 0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$



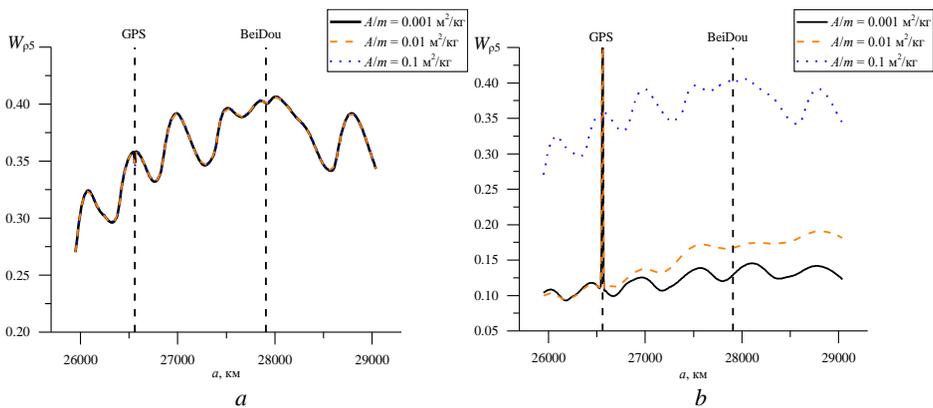
**Рис. 6.** Эволюция эксцентриситета орбиты для начального значения большой полуоси  $a_0 = 25\,510 \text{ км}$  при различных начальных долготах восходящего узла  $\Omega_0$  и отношениях  $A/m$ :  $a - A/m = 0.001 \text{ м}^2/\text{кг}$ ,  $b - A/m = 0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$

**Fig. 6.** Evolution of the orbital eccentricity for the initial semi-major axis  $a_0 = 25\,510 \text{ км}$  at different initial longitudes of the ascending node  $\Omega_0$  and area-to-mass ratios  $A/m$ :  $A/m = (a) 0.001 \text{ and } (b) 0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$



**Рис. 7.** Зависимость интегральной автокорреляционной функции для большой полуоси  $W_a$  от начальной большой полуоси  $a$  для областей GPS и BeiDou при различных отношениях  $A/m$  и начальных долготах восходящего узла  $\Omega_0$ :  $a - \Omega_0 = 0^\circ$ ,  $b - \Omega_0 = 90^\circ$

**Fig. 7.** Dependence of the integrated autocorrelation function for the semi-major axis  $W_a$  on the initial semi-major axis  $a$  for GPS and BeiDou regions at different area-to-mass ratios  $A/m$  and initial longitudes of the ascending node  $\Omega_0$ :  $\Omega_0 = (a) 0^\circ$  and  $(b) 90^\circ$



**Рис. 8.** Зависимость интегральной автокорреляционной функции для метрики Холшевникова  $W_{p5}$  от начальной большой полуоси  $a$  для областей GPS и BeiDou при различных отношениях  $A/m$  и начальных долготах восходящего узла  $\Omega_0$ :  $a - \Omega_0 = 0^\circ$ ,  $b - \Omega_0 = 90^\circ$

**Fig. 8.** Dependence of the integrated autocorrelation function for the Kholshchennikov metric  $W_{p5}$  on the initial semi-major axis  $a$  for GPS and BeiDou regions at different area-to-mass ratios  $A/m$  and initial longitudes of the ascending node  $\Omega_0$ :  $\Omega_0 = (a) 0^\circ$  and  $(b) 90^\circ$

Анализ поведения функции  $W_a$  показывает, что при парусности  $A/m = 0.1 \text{ м}^2/\text{кг}$  в областях движения спутников ГЛОНАСС, GPS, BeiDou характер эволюции большой полуоси  $a$  становится стохастическим (см. рис. 4 и 7). В то же время функция  $W_{p5}$  (определяется через позиционные элементы орбиты) показывает, что в областях движения спутников ГЛОНАСС, GPS, BeiDou в зависимости от начальной долготы восходящего узла  $\Omega_0$  стохастичность может проявляться и при малых значениях парусности  $A/m = 0.001, 0.01 \text{ м}^2/\text{кг}$  (см. рис. 5 и 8).

### Заключение

Результаты исследования стохастических свойств окрестностей средневысотных орбит спутников глобальных навигационных систем на основе анализа значений интегральных автокорреляционных функций  $W_a$  и  $W_{p5}$  в случае малых и умеренных значений парусности показали, что проявления стохастической эволюции, обусловленной лунно-солнечными возмущениями, фиксируются при малых значениях парусности  $A/m \leq 0.01$  м<sup>2</sup>/кг. Увеличение парусности может приводить как к уменьшению стохастичности, так и к ее росту в зависимости от начальной ориентации плоскости орбиты. Отметим, что в случае умеренных значений парусности это играет важную роль, определяя начальное положение плоскости орбиты относительно направления на Солнце. Это необходимо учитывать при выборе орбит для размещения выведенных из эксплуатации спутников глобальных навигационных систем.

В дальнейшем планируется продолжить исследование и рассмотреть особенности стохастической эволюции при больших значениях парусности, соответствующих космическому мусору, а также исследовать стохастические свойства движения в области высокоорбитального сегмента системы BeiDou.

### Список источников

1. *Rosengren A.J., Skoulidou D.K., Tsiganis K., Voyatzis G.* Dynamical cartography of Earth satellite orbits // *Advances in Space Research*. 2019. V. 63. P. 443–460. doi: 10.1016/j.asr.2018.09.004
2. *Бордовицына Т.В., Александрова А.Г., Чувашиов И.Н.* Комплекс алгоритмов и программ для исследования хаотичности в динамике искусственных спутников Земли // *Известия вузов. Физика*. 2010. № 8/2. С. 14–21.
3. *Томилова И.В., Блинкова Е.В., Бордовицына Т.В.* Особенности динамики объектов, движущихся в окрестности резонанса 1:3 с вращением Земли // *Астрономический вестник*. 2019. Т 53, №5. С. 323–338. doi: 10.1134/S0038094619050071
4. *Александрова А.Г., Блинкова Е.В., Бордовицына Т.В., Попандоупоуло Н.А., Томилова И.В.* Вековые резонансы в динамике объектов, движущихся в областях LEO–MEO околоземного орбитального пространства // *Астрономический вестник*. 2021. Т 55, № 3. С. 272–287. doi: 10.1134/S0038094621030011
5. *Блинкова Е.В., Бордовицына Т.В.* Исследование динамики области орбитальных резонансов высоких порядков // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2022. № 79. С. 58–68. doi: 10.17223/19988621/79/5
6. *Бордовицына Т.В., Томилова И.В., Чувашиов И.Н.* Вековые резонансы как источник возникновения динамической хаотичности в долговременной орбитальной эволюции неуправляемых объектов спутниковых радионавигационных систем // *Астрономический вестник*. 2014. Т. 48, № 4. С. 280–289. doi: 10.1134/S0038094614040042
7. *Rosengren A.J., Alessi E.M., Rossi A., Valsecchi G.B.* Chaos in navigation satellite orbits caused by the perturbed motion // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2015. V. 449, is. 4. P. 3522–3526. doi: 10.1093/mnras/stv534
8. *Kuznetsov E.D., Avvakumova E.A.* Dynamical evolution of space debris in the vicinity of GNSS regions // *Acta Astronautica*. 2019. V. 158. P. 140–147. doi: 10.1016/j.actaastro.2018.02.001
9. *Томилова И.В., Красавин Д.С., Бордовицына Т.В.* Динамическая структура околоземного орбитального пространства в области резонанса 1:2 со скоростью вращения Земли // *Астрономический вестник*. 2020. Т 54, № 4. С. 337–348. doi: 10.1134/S0038094620040085
10. *Бордовицына Т.В., Томилова И.В., Чувашиов И.Н.* Влияние вековых резонансов на долговременную орбитальную эволюцию неуправляемых объектов спутниковых радиона-

вигационных систем в области МЕО // *Астрономический вестник*. 2012. Т. 46. С. 356–368. doi: 10.1134/S0038094612040016

11. Wytrzyszczak I., Breiter S., Borczyk W. Regular and chaotic motion of high altitude satellites // *Advances in Space Research*. 2007. V. 40. P. 134–142. doi: 10.1016/j.asr.2006.11.020
12. Kholshchevnikov K.V., Kokhirova G.I., Babadzhanov P.B., Khamroev U.H. Metrics in the space of orbits and their application to searching for celestial objects of common origin // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2016. V. 462. P. 2275–2283. doi: 10.1093/mnras/stw1712
13. Anselmo L., Pardini C. Dynamical evolution of high area-to-mass ratio debris released into GPS orbits // *Advances in Space Research*. 2009. V. 43. P. 1491–1508. doi: 10.1016/j.asr.2009.01.017

### References

1. Rosengren A.J., Skoulidou D.K., Tsiganis K., Voyatzis G. (2019) Dynamical cartography of Earth satellite orbits. *Advances in Space Research*. 63. pp. 443–460. doi: 10.1016/j.asr.2018.09.004
2. Bordovitsyna T.V., Aleksandrova A.G., Chuvashov I.N. (2010) Kompleks algoritmov i programm dlya issledovaniya khaotichnosti v dinamike iskusstvennykh sputnikov Zemli [Algorithms and program complex for chaotic dynamics investigation of the Earth artificial satellites]. *Izvestiya Vuzov. Fizika*. 8(2). pp. 14–21.
3. Tomilova I.V., Blinkova E.V., Bordovitsyna T.V. (2019) Features of the dynamics of objects moving in the neighborhood of the 1:3 resonance with the Earth's rotation. *Solar System Research*. 53(5). pp. 307–321. doi: 10.1134/S0038094619050071
4. Aleksandrova A.G., Blinkova E.V., Bordovitsyna T.V., Popandopulo N.A., Tomilova I.V. (2021) Secular resonances in the dynamics of objects moving in LEO-MEO regions of near-Earth orbital space. *Solar System Research*. 55(3). pp. 266–281. doi: 10.1134/S0038094621030011
5. Blinkova E.V., Bordovitsyna T.V. (2022) Issledovanie dinamiki oblasti orbital'nykh rezonansov vysokikh poryadkov [Investigation of dynamics of a region with high-order orbital resonances]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 79. pp. 58–68. doi: 10.17223/19988621/79/5
6. Bordovitsyna T.V., Tomilova I.V., Chuvashov I.N. (2014) Secular resonances as a source of dynamic chaoticity in the long-term orbital evolution of uncontrolled satellites. *Solar System Research*. 48(4). pp. 259–268. doi: 10.1134/S0038094614040042
7. Rosengren A.J., Alessi E.M., Rossi A., Valsecchi G.B. (2015) Chaos in navigation satellite orbits caused by the perturbed motion. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 449(4). pp. 3522–3526. doi: 10.1093/mnras/stv534
8. Kuznetsov E.D., Avvakumova E.A. (2019) Dynamical evolution of space debris in the vicinity of GNSS regions. *Acta Astronautica*. 158. pp. 140–147. doi: 10.1016/j.actaastro.2018.02.001
9. Tomilova I.V., Krasavin D.S., Bordovitsyna T.V. (2020) Dynamic structure of near-Earth orbital space in the 1:2 resonance region with the speed of Earth's rotation. *Solar System Research*. 54(4). pp. 307–317. doi: 10.1134/S0038094620040085
10. Bordovitsyna T.V., Tomilova I.V., Chuvashov I.N. (2012) The effect of secular resonances on the long-term orbital evolution of uncontrollable objects on satellite radio navigation systems in the MEO region. *Solar System Research*. 46. pp. 329–340. doi: 10.1134/S0038094612040016
11. Wytrzyszczak I., Breiter S., Borczyk W. (2007) Regular and chaotic motion of high altitude satellites. *Advances in Space Research*. 40. pp. 134–142. doi: 10.1016/j.asr.2006.11.020
12. Kholshchevnikov K.V., Kokhirova G.I., Babadzhanov P.B., Khamroev U.H. (2016) Metrics in the space of orbits and their application to searching for celestial objects of common

origin. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 462. pp. 2275–2283. doi: 10.1093/mnras/stw1712

13. Anselmo L., Pardini C. (2009) Dynamical evolution of high area-to-mass ratio debris released into GPS orbits. *Advances in Space Research*. 43. pp. 1491–1508. doi: 10.1016/j.asr.2009.01.017

**Сведения об авторах:**

**Кузнецов Эдуард Дмитриевич** – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой астрономии, геодезии, экологии и мониторинга окружающей среды Института естественных наук и математики Уральского федерального университета (Екатеринбург, Россия). E-mail: eduard.kuznetsov@urfu.ru

**Смагина Екатерина Сергеевна** – аспирант кафедры астрономии, геодезии, экологии и мониторинга окружающей среды Института естественных наук и математики Уральского федерального университета (Екатеринбург, Россия). E-mail: Ekaterina.Smagina@urfu.me

**Жмакин Иван Сергеевич** – магистрант кафедры астрономии, геодезии, экологии и мониторинга окружающей среды Института естественных наук и математики Уральского федерального университета (Екатеринбург, Россия). E-mail: zhmakin01@bk.ru

**Уразаев Тавриз Ринатович** – магистрант кафедры астрономии, геодезии, экологии и мониторинга окружающей среды Института естественных наук и математики Уральского федерального университета (Екатеринбург, Россия). E-mail: urazaev11@list.ru

**Information about the authors:**

**Kuznetsov Eduard D.** (Doctor of Physics and Mathematics, Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation). E-mail: eduard.kuznetsov@urfu.ru

**Smagina Ekaterina S.** (Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation). E-mail: Ekaterina.Smagina@urfu.me

**Zhmakin Ivan S.** (Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation). E-mail: zhmakin01@bk.ru

**Urazaev Tavriz R.** (Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation). E-mail: urazaev11@list.ru

*Статья поступила в редакцию 18.12.2023; принята к публикации 07.02.2025*

*The article was submitted 18.12.2023; accepted for publication 07.02.2025*