

Научная статья

УДК 517.977, 62-50

doi: 10.17223/19988605/70/2

Об одной дискретной двухпараметрической задаче управления**Камиль Байрамали оглы Мансимов***Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан**Институт систем управления Министерства науки и образования Азербайджана, Баку, Азербайджан**kamilbmansimov@gmail.com*

Аннотация. Рассматривается дискретная задача оптимального управления, описываемая системой двумерных разностных уравнений типа Вольтерра с управляемым начальным условием. Предполагается, что начальная функция является решением одномерного разностного уравнения Вольтерра. Функционал качества является терминальным. Процесс управляется с двумя классами управляющих функций. Области управления являются ограниченными и открытыми множествами. Вычислены первая и вторая (в классическом смысле) вариации функционала качества. Доказан аналог уравнения Эйлера, и установлен ряд конструктивно проверяемых необходимых условий оптимальности второго порядка.

Ключевые слова: двумерное разностное уравнение типа Вольтерра; допустимое управление; область управления; открытое множество; вариация функционала; допустимая вариация управления; аналог уравнения Эйлера; необходимое условие оптимальности второго порядка.

Для цитирования: Мансимов К.Б. Об одной дискретной двухпараметрической задаче управления // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2025. № 70. С. 15–28. doi: 10.17223/19988605/70/2

Original article

doi: 10.17223/19988605/70/2

About one discrete two-parameter control problem**Kamil B. Mansimov***Baku State University, Baku, Azerbaijan**Institute of Control Systems of the Ministry of Science and Education of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan**kamilbmansimov@gmail.com*

Abstract. We consider a discrete optimal control problem described by a system of two-dimensional Volterra-type difference equations with a controlled initial condition. It is assumed that the initial function is a solution to the one-dimensional Volterra difference equation. The quality functionality is terminal. The process is controlled with two classes of control functions. Control areas are bounded and open sets. The first and second (in the classical sense) variations of the quality functional are calculated. An analogue of the Euler equation is proved and a number of constructively verifiable necessary conditions for second-order optimality are established.

Keywords: two-dimensional difference equation of Volterra type, admissible control, control domain, open set, variation of the functional, admissible variation of the functional, analogue of the Euler equation, necessary condition for second-order optimality.

For citation: Mansimov, K.B. (2025) About one discrete two-parameter control problem. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 70. pp. 15–28. doi: 10.17223/19988605/70/2

Введение

К настоящему времени основательно изучен ряд аспектов задач оптимального управления, описываемых обыкновенными разностными уравнениями. Для подобных задач теория необходимых условий оптимальности первого и второго порядков достаточно полно разработана. Обзор соответствующих результатов имеется, например, в работах [1–7].

В работах [8, 9] и других изучены задачи оптимального управления, являющиеся дискретными аналогами задачи, рассмотренной в работах [10, 11] А.И. Москаленко.

В предлагаемой работе исследуется задача оптимального управления, описываемая двумерным разностным уравнением типа Вольтерра, а начальная функция определяется как решение управляемого одномерного разностного уравнения типа Вольтерра.

Таким образом, рассматриваемая задача является более общей, чем задачи, проанализированные в работах [8, 9].

В предположении открытости областей управления установлено необходимое условие оптимальности первого порядка в форме аналога уравнения Эйлера и доказан ряд необходимых условий оптимальности второго порядка.

1. Постановка задачи

Пусть $U_1 \subset R^r$, $U_2 \subset R^q$ – некоторые заданные непустые, ограниченные и открытые множества.

Предположим, что управляющий процесс описывается системой двумерных разностных уравнений типа Вольтерра

$$z(t+1, x) = \sum_{\tau=t_0}^t f(\tau, x, z(\tau, x), u_1(\tau)), \quad t \in T = \{t_0, t_0+1, \dots, t_1-1\}, \quad x \in X = \{x_0, x_0+1, \dots, x_1\} \quad (1)$$

с начальным условием

$$z(t_0, x) = a(x), \quad x \in X. \quad (2)$$

Здесь $f(t, \tau, x, z, u_1)$ – заданная n -мерная вектор-функция, дискретная по (t, τ, x) и непрерывная по (z, u_1) вместе с частными производными по (z, u_1) до второго порядка включительно, t_0, t_1, x_0, x_1 – заданные натуральные числа, $u_1(t)$ – r -мерный дискретный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого, ограниченного множества U_1 , т.е.

$$u_1(t) \in U_1 \subset R^r, \quad t \in T, \quad (3)$$

а начальная функция $a(x)$ определяется как решение аналога задачи Коши,

$$a(x+1) = \sum_{s=x_0}^x K(x, s, a(s), u_2(s)), \quad x \in X \setminus x_1, \quad (4)$$

$$a(x_0) = a_0, \quad (5)$$

где $K(x, s, a, u_2)$ – заданная n -мерная вектор-функция, дискретная по (x, s) и имеющая непрерывные по (a, u_2) производные до второго порядка включительно, a_0 – заданный постоянный вектор, $u_2(t)$ – q -мерная дискретная вектор-функция управляющих воздействий со значениями из заданного непустого, ограниченного множества U_2 , т.е.

$$u_2(x) \in U_2 \subset R^q, \quad x \in X \setminus x_1. \quad (6)$$

Управляющие функции $u_1(t)$ и $u_2(x)$ с вышеприведенными свойствами назовем допустимыми управлениями.

Как видно, уравнения (1) и (4) являются нелинейными разностными уравнениями типа Вольтерра.

Предполагается, что при каждом заданном управлении задачи Коши (1)–(2) и (4)–(5) имеют единственное дискретное решение.

На решениях задач Коши (1)–(2) и (4)–(5), порожденных всевозможными допустимыми управлениями, определим терминального типа функционал

$$J(u_1, u_2) = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \varphi_1(x, z(t_1, x)) + \varphi_2(a(x_1)). \quad (7)$$

Здесь $\varphi_1(x, z)$ – дискретная по x и дважды непрерывно дифференцируемая по z скалярная функция, а $\varphi_2(a)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция.

Рассмотрим задачу о минимуме функционала (7) при ограничениях (1)–(6).

Допустимое управление $(u(t), v(t))$, доставляющее минимальное значение функционалу (7) при ограничениях (1)–(6), назовем оптимальным управлением.

Предполагается, что в рассматриваемой задаче оптимальное управление существует.

Целью предлагаемой статьи является вывод необходимых условий оптимальности первого (аналог уравнения Эйлера) и второго порядков.

2. Вычисление формулы приращения критерия качества

Пусть $(u_1(t), u_2(x))$ и $(\bar{u}_1(t) = u_1(t) + \Delta u_1(t), \bar{u}_2(x) = u_2(x) + \Delta u_2(x))$ – некоторые допустимые управления, а $(z(t, x), a(x))$ и $(\bar{z}(t, x) = z(t, x) + \Delta z(t, x), \bar{a}(x) = a(x) + \Delta a(x))$ – соответствующие им решения задач (1)–(2) и (4)–(5) соответственно.

Тогда, ясно, что $\Delta z(t, x)$ и $\Delta a(x)$ будут решениями следующих задач:

$$\Delta z(t+1, x) = \sum_{\tau=t_0}^t \left[f(t, \tau, \bar{z}(\tau, x), \bar{u}_1(\tau)) - f(t, \tau, z(\tau, x), u_1(\tau)) \right], \quad (8)$$

$$\Delta z(t_0, x) = \Delta a(x), \quad (9)$$

$$\Delta a(x+1) = \sum_{s=x_0}^x \left[K(x, s, \bar{a}(s), \bar{u}_2(s)) - K(x, s, a(s), u_2(s)) \right], \quad (10)$$

$$\Delta a(x_0) = 0. \quad (11)$$

Пусть $\psi(t, x)$ и $p(x)$ – пока произвольные дискретные n -мерные вектор-функции.

Учитывая тождества (8) и (10), получим, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi'(t, x) \Delta z(t+1, x) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi'(t, x) \sum_{\tau=t_0}^t \left[f(t, \tau, \bar{z}(\tau, x), \bar{u}_1(\tau)) - f(t, \tau, z(\tau, x), u_1(\tau)) \right], \quad (12)$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'(x) \Delta a(x+1) = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'(x) \sum_{s=x_0}^x \left[K(x, s, \bar{a}(s), \bar{u}_2(s)) - K(x, s, a(s), u_2(s)) \right]. \quad (13)$$

Учитывая начальные условия (9) и (11), доказывается, что

$$\begin{aligned} & \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi'(t, x) \Delta z(t+1, x) = \\ & = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi'(t_1-1, x) \Delta z(t_1, x) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi'(t_0-1, x) \Delta a(x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi'(t-1, x) \Delta z(t, x), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'(x) \Delta a(x+1) = p'(x_1-1) \Delta a(x_1) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'(x-1) \Delta a(x). \quad (15)$$

Здесь $(')$ – операция транспонирования.

Далее, используя дискретный аналог теоремы Фубини (см., напр.: [12]), доказывается, что

$$\begin{aligned} & \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi'(t, x) \left[\sum_{\tau=t_0}^t \left(f(t, \tau, \bar{z}(\tau, x), \bar{u}_1(\tau)) - f(t, \tau, z(\tau, x), u_1(\tau)) \right) \right] = \\ & = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\sum_{\tau=t}^{t_1-1} \left(f(\tau, t, \bar{z}(t, x), \bar{u}_1(t)) - f(\tau, t, z(t, x), u_1(t)) \right) \right], \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'(x) \left[\sum_{s=x_0}^x \left(K(x, s, \bar{a}(s), \bar{u}_2(s)) - K(x, s, a(s), u_2(s)) \right) \right] = \\ & = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\sum_{s=x}^{x_1-1} \left(K(s, x, \bar{a}(x), \bar{u}_2(x)) - K(s, x, a(x), u_2(x)) \right) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Введем аналоги функции Гамильтона в виде:

$$\begin{aligned} H(t, x, z(t, x), u_1(t), \psi(t, x)) &= \sum_{\tau=t}^{t_1-1} \psi'(\tau, x) f(\tau, t, x, z(t, x), u_1(t)), \\ M(x, a(x), u_2(x), p(x)) &= \sum_{s=x}^{x_1-1} p'(s) K(s, x, a(x), u_2(x)). \end{aligned}$$

Учитывая тождества (14)–(17) и введенные обозначения, формулу для приращения функционала (7) запишем в виде:

$$\begin{aligned} J(\bar{u}_1, \bar{u}_2) - J(u_1, u_2) &= \sum_{x=x_0}^{x_1-1} (\varphi_1(x, \bar{z}(t_1, x)) - \varphi_1(x, z(t_1, x))) + \varphi_2(\bar{a}(x_1)) - \varphi_2(a(x_1)) + \\ &+ \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi'(t_1-1, x) \Delta z(t_1, x) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi'(t_0-1, x) \Delta a(x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi'(t-1, x) \Delta z(t, x) - \\ &- \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [H(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{u}_1(t), \psi(t, x)) - H(t, x, z(t, x), u_1(t), \psi(t, x))] + \\ &+ p'(x_1-1) \Delta a(x_1) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'(x-1) \Delta a(x) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [M(x, \bar{a}(x), \bar{u}_2(x), p(x)) - M(x, a(x), u_2(x), p(x))]. \end{aligned} \quad (18)$$

Учитывая условия гладкости, наложенные на параметры задачи, и применяя формулу Тейлора, получаем, что

$$\begin{aligned} & \varphi_1(x, \bar{z}(t_1, x)) - \varphi_1(x, z(t_1, x)) = \\ &= \frac{\partial \varphi_1'(x, z(t_1, x))}{\partial z} \Delta z(t_1, x) + \frac{1}{2} \Delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 \varphi_1(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} \Delta z(t_1, x) + o_1(\|\Delta z(t_1, x)\|^2), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\varphi_2(\bar{a}(x_1)) - \varphi_2(a(x_1)) = \frac{\partial \varphi_2'(a(x_1))}{\partial a} \Delta a(x_1) + \frac{1}{2} \Delta a'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi_2(a(x_1))}{\partial a^2} \Delta a(x_1) + o_2(\|\Delta a(x_1)\|^2), \quad (20)$$

$$\begin{aligned} H(t, x, \bar{z}, \bar{u}_1, \psi) - H(t, x, z, u_1, \psi) &= \frac{\partial H'(t, x, z, u_1, \psi)}{\partial z} \Delta z + \frac{1}{2} \Delta z' \frac{\partial^2 H(t, x, z, u_1, \psi)}{\partial z^2} \Delta z + \\ &+ \frac{\partial H'(t, x, z, u_1, \psi)}{\partial u_1} \Delta u_1 + \Delta u_1' \frac{\partial^2 H(t, x, z, u_1, \psi)}{\partial u_1 \partial z} \Delta z + \frac{1}{2} \Delta u_1' \frac{\partial^2 H(t, x, z, u_1, \psi)}{\partial u_1^2} \Delta u_1 + o_3(\|\Delta z\| + \|\Delta u_1\|)^2, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} M(x, \bar{a}, \bar{u}_2, p) - M(x, a, u_2, p) &= \frac{\partial M'(x, a, u_2, p)}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial M'(x, a, u_2, p)}{\partial u_2} \Delta u_2 + \frac{1}{2} \Delta a' \frac{\partial^2 M(x, a, u_2, p)}{\partial a^2} \Delta a + \\ &+ \Delta u_2' \frac{\partial^2 M(x, a, u_2, p)}{\partial u_2 \partial a} \Delta a + \frac{1}{2} \Delta u_2' \frac{\partial^2 M(x, a, u_2, p)}{\partial u_2^2} \Delta u_2 + o_4(\|\Delta a\| + \|\Delta u_2\|)^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь $\|\alpha\|$ есть норма вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)'$, определяемая формулой $\|\alpha\| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|$, $o(\alpha^2)$ – величина более высокого порядка, чем α , т. е. $\frac{o(\alpha^2)}{\alpha^2} \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$.

Учитывая формулы (19)–(22) в формуле приращения (18), функционала (7), получаем, что

$$\begin{aligned} J(\bar{u}_1, \bar{u}_2) - J(u_1, u_2) &= \\ &= \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial \varphi_1'(x, z(t_1, x))}{\partial z} \Delta z(t_1, x) + \frac{1}{2} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 \varphi_1(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} \Delta z(t_1, x) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_1(\|\Delta z(t_1, x)\|^2) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi'(t_1-1, x) \Delta z(t_1, x) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi'(t_0-1, x) \Delta a(x) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi'(t-1, x) \Delta z(t, x) - \\
 & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\frac{\partial H'(t, x, z(t, x), u_1(t, x), \psi(t, x))}{\partial z} \Delta z(t, x) + \frac{\partial H'(t, x, z(t, x), u_1(t, x), \psi(t, x))}{\partial u_1} \Delta u_1(t, x) \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\Delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), u_1(t), \psi(t, x))}{\partial z^2} \Delta z(t, x) + 2 \Delta u_1'(t) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), u_1(t), \psi(t, x))}{\partial u_1 \partial z} \Delta z(t, x) + \right. \\
 & \left. + \Delta u_1'(t) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), u_1(t), \psi(t, x))}{\partial u_1^2} \Delta u_1(t) \right] - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_3 \left(\left[\|\Delta z(t, x)\| + \|\Delta u_1(t)\| \right]^2 \right) + \\
 & + p'(x_1-1) \Delta a(x_1) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p'(x-1) \Delta a(x) - \\
 & - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\frac{\partial M'(x, a(x), u_2(x), p(x))}{\partial a} \Delta a(x) + \frac{\partial M'(x, a(x), u_2(x), p(x))}{\partial u_2} \Delta u_2(x) \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\Delta a'(x) \frac{\partial^2 M(x, a(x), u_2(x), p(x))}{\partial a^2} \Delta a(x) + 2 \Delta u_2'(x) \frac{\partial^2 M(x, a(x), u_2(x), p(x))}{\partial u_2 \partial a} \Delta a(x) + \right. \\
 & \left. + 2 \Delta u_2'(x) \frac{\partial^2 M(x, a(x), u_2(x), p(x))}{\partial u_2^2} \Delta u_2(x) \right] - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_4 \left(\left[\|\Delta a(x)\| + \|\Delta u_2(x)\| \right]^2 \right) + \frac{\partial \varphi_2'(a(x_1))}{\partial a} \Delta a(x_1) + \\
 & + \frac{1}{2} \Delta a'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi_2(a(x_1))}{\partial a^2} \Delta a(x_1) + o_2 \left(\|\Delta a(x_1)\|^2 \right). \quad (23)
 \end{aligned}$$

Теперь предположим, что вектор-функции $\psi(t, x)$ и $p(x)$ являются соответственно решениями следующих задач:

$$\begin{aligned}
 \psi(t-1, x) &= \frac{\partial H(t, x, z(t, x), u_1(t, x), \psi(t, x))}{\partial z}, \quad \psi(t_1-1, x) = -\frac{\partial \varphi_1(z(t_1, x))}{\partial z}, \\
 p(x-1) &= \frac{\partial M(x, a(x), u_2(x), p(x))}{\partial a} + \psi(t_0-1, x), \quad p(x_1-1) = -\frac{\partial \varphi_2(a(x_1))}{\partial a}.
 \end{aligned}$$

Тогда формула приращения (23) примет вид:

$$\begin{aligned}
 J(\bar{u}_1, \bar{u}_2) - J(u_1, u_2) &= - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial H'(t, x, z(t, x), u_1(t), \psi(t, x))}{\partial u_1} \Delta u_1(t, x) - \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\Delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), u_1(t), \psi(t, x))}{\partial z^2} \Delta z(t, x) + 2 \Delta u_1'(t) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), u_1(t), \psi(t, x))}{\partial u_1 \partial z} \Delta z(t, x) + \right. \\
 & \left. + \Delta u_1'(t) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), u_1(t), \psi(t, x))}{\partial u_1^2} \Delta u_1(t) \right] + \frac{1}{2} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 \varphi_1(z(t_1, x))}{\partial z^2} \Delta z(t_1, x) - \\
 & - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial M'(x, a(x), u_2(x), p(x))}{\partial u_2} \Delta u_2(x) - \frac{1}{2} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\Delta a'(x) \frac{\partial^2 M(x, a(x), u_2(x), p(x))}{\partial a^2} \Delta a(x) + \right. \\
 & \left. + 2 \Delta u_2'(x) \frac{\partial^2 M(x, a(x), u_2(x), p(x))}{\partial u_2 \partial a} \Delta a(x) + \Delta u_2'(x) \frac{\partial^2 M(x, a(x), u_2(x), p(x))}{\partial u_2^2} \Delta u_2(x) \right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \Delta a'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi_2(a(x_1))}{\partial a^2} \Delta a(x_1) + o_2(\|\Delta a(x_1)\|^2) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_1(\|\Delta z(t_1, x)\|^2) - \\
 & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_3(\|\Delta z(t, x)\| + \|\Delta u_1(t, x)\|)^2 - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_4(\|\Delta a(x)\| + \|\Delta u_2(t, x)\|)^2.
 \end{aligned} \quad (24)$$

Доказанная формула приращения второго порядка позволяет установить ряд конструктивно проверяемых условий оптимальности первого и второго порядков.

Легко видеть, что

$$\Delta z(t+1, x) = \sum_{\tau=t_0}^t [\Delta z(\tau+1, x) - \Delta z(\tau, x)] + \Delta z(t_0, x).$$

Поэтому с учетом формул (8), (9), применяя дискретный аналог теоремы Фубини, получаем, что

$$\Delta z(t+1, x) = \Delta a(x) + \sum_{\tau=t_0}^t \left[\sum_{s=\tau}^t (f(s, \tau, x, \bar{z}(\tau, x), \bar{u}_1(\tau)) - f(s, \tau, x, z(\tau, x), u_1(\tau))) - \Delta z(\tau, x) \right].$$

Переходя к норме в этом равенстве и используя правило треугольника, получаем

$$\begin{aligned}
 \|\Delta z(t+1, x)\| & \leq \|\Delta a(x)\| + L_1 \sum_{\tau=t_0}^t \left[\sum_{s=\tau}^t (\|\Delta z(\tau, x)\| + \|\Delta u_1(\tau)\|) + \|\Delta z(\tau, x)\| \right] \leq \\
 & \leq \|\Delta a(x)\| + L_2 \sum_{\tau=t_0}^t [\|\Delta z(\tau, x)\| + \|\Delta u_1(\tau)\|].
 \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь $L_2 = \text{const} > 0$ – некоторая постоянная.

Далее, учитывая формулы (10) и (11), будем иметь

$$\Delta a(x+1) = \sum_{s=x_0}^x \left[\sum_{\alpha=x_0}^s [K(s, \alpha, \bar{a}(\alpha), \bar{u}_2(\alpha)) - K(s, \alpha, a(\alpha), u_2(\alpha))] - \Delta a(s) \right].$$

Отсюда на основе аналога теоремы Фубини получаем, что

$$\Delta a(x+1) = \sum_{s=x_0}^x \left[\sum_{\alpha=s}^x [K(\alpha, s, \bar{a}(s), \bar{u}_2(s)) - K(\alpha, s, a(s), u_2(s))] - \Delta a(s) \right].$$

Переходя в этой формуле к норме и используя условие Липшица, имеем

$$\|\Delta a(x+1)\| = L_3 \sum_{s=x_0}^x [\|\Delta a(s)\| + \|\Delta u_2(s)\|]. \quad (26)$$

Здесь $L_3 = \text{const} > 0$ – некоторая постоянная.

Применяя к неравенствам (25) и (26) дискретный аналог леммы Гронуолла (см., напр.: [6]), получим, что

$$\|\Delta z(t, x)\| \leq L_4 \left(\|\Delta a(x)\| + \sum_{\tau=t_0}^t \|\Delta u_1(\tau)\| \right), \quad (27)$$

$$\|\Delta a(x)\| = L_5 \sum_{s=x_0}^x \|\Delta u_2(s)\|. \quad (28)$$

Здесь L_4 и L_5 – некоторые положительные постоянные.

Далее из соотношений (8)–(11) получаем, что $\Delta z(t, x)$ и $\Delta a(x)$ являются решениями линеаризованных задач

$$\begin{aligned}
 & \Delta z(t+1, x) = \\
 & = \sum_{\tau=t_0}^t \left[\frac{\partial f(t, \tau, z(\tau, x), u_1(\tau))}{\partial z} \Delta z(\tau, x) + \frac{\partial f(t, \tau, z(\tau, x), u_1(\tau))}{\partial u_1} \Delta u_1(\tau) + o_5(\|\Delta z(\tau, x)\| + \|\Delta u_1(\tau)\|) \right],
 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\Delta z(t_0, x) = \Delta a(x), \quad (30)$$

$$\Delta a(x+1) = \sum_{s=x_0}^x \left[\frac{\partial K(x, s, a(s), u_2(s))}{\partial a} \Delta a(s) + \frac{\partial K(x, s, a(s), u_2(s))}{\partial u_2} \Delta u_2(s) + o_6(\|\Delta a(s)\| + \|\Delta u_2(s)\|) \right], \quad (31)$$

$$\Delta a(x_0) = 0. \quad (32)$$

3. Специальные приращения управляющих функций и уравнения в вариациях

Пусть $\delta u_1(t) \in R^r, t \in T$ и $\delta u_2(x) \in R^q, x \in X \setminus x_1$ – две произвольные дискретные и ограниченные вектор-функции, а ε – достаточно малое по абсолютной величине число.

Тогда специальные приращения допустимых управлений $u_1(t)$ и $u_2(x)$ можно определить формулами

$$\begin{aligned} \Delta u_1(t; \varepsilon) &= \varepsilon \delta u_1(t), t \in T, \\ \Delta u_2(x; \varepsilon) &= \varepsilon \delta u_2(x), x \in X \setminus x_1. \end{aligned} \quad (33)$$

Через $(\Delta z(t, x; \varepsilon), \Delta a(x; \varepsilon))$ обозначим специальное приращение состояния $(z(t, x), a(x))$, отвечающее специальному приращению (33) управлений $u_1(t)$ и $u_2(x)$.

Из оценок (27) и (28) следует, что $\|\Delta a(x; \varepsilon)\|$ и $\|\Delta z(t, x; \varepsilon)\|$ имеют порядок малости ε .

Учитывая это и принимая во внимания формулу (33), с помощью формул (29)–(30), (31)–(32) доказывается следующее утверждение.

Лемма. При сделанных предположениях имеют место разложения

$$\Delta a(x; \varepsilon) = \varepsilon \delta a(x) + o(\varepsilon; x), \quad (34)$$

$$\Delta z(t, x; \varepsilon) = \varepsilon \delta z(t, x) + o(\varepsilon; t, x). \quad (35)$$

Здесь $\delta a(x)$ и $\delta z(t, x)$ являются решениями следующих задач Коши соответственно

$$\delta a(x+1) = \sum_{s=x_0}^x \left[\frac{\partial K(x, s, a(s), u_2(s))}{\partial a} \delta a(s) + \frac{\partial K(x, s, a(s), u_2(s))}{\partial u_2} \delta u_2(s) \right], \quad (36)$$

$$\delta a(x_0) = 0, \quad (37)$$

$$\delta z(t+1, x) = \sum_{\tau=t_0}^t \left[\frac{\partial f(t, \tau, z(\tau, x), u_1(\tau))}{\partial z} \delta z(\tau, x) + \frac{\partial f(t, \tau, z(\tau, x), u_1(\tau))}{\partial u_1} \delta u_1(\tau) \right], \quad (38)$$

$$\delta z(t_0, x) = \delta a(x). \quad (39)$$

Задачи (36)–(37) и (38)–(39) являются дискретными аналогами уравнений в вариациях (см., напр.: [13]).

4. Необходимые условия оптимальности

Учитывая формулы (33) и используя разложения (34), (35), из формулы приращения (24) получаем, что

$$\begin{aligned} J(u_1 + \varepsilon \delta u_1, u_2 + \varepsilon \delta u_2) - J(u_1, u_2) &= \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 \varphi_1(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} \delta z(t_1, x) + \frac{\varepsilon^2}{2} \delta a'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi_2(a(x_1))}{\partial a^2} \delta a(x_1) - \\ &- \varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial H'(t, x, z(t, x), u_1(t), \psi(t, x))}{\partial u_1} \delta u_1(t) - \varepsilon \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial M'(x, a(x), u_2(x), p(x))}{\partial u_2} \delta u_2(x) - \\ &- \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), u_1(t), \psi(t, x))}{\partial z^2} \delta z(t, x) + 2 \delta u_1'(t) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), u_1(t), \psi(t, x))}{\partial u_1 \partial z} \delta z(t, x) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\delta u_1'(t) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), u_1(t), \psi(t, x))}{\partial u_1^2} \delta u_1(t) \Big] - \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\delta a'(x) \frac{\partial^2 M(x, a(x), u_2(x), p(x))}{\partial a^2} \delta a(x) + \right. \\
 & \left. + 2\delta u_2'(x) \frac{\partial^2 M(x, a(x), u_2(x), p(x))}{\partial u_2 \partial a} \delta a(x) + \delta u_2'(x) \frac{\partial^2 M(x, a(x), u_2(x), p(x))}{\partial u_2^2} \delta u_2(x) \right] + o(\varepsilon^2).
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что первая и вторая вариации функционала (7) имеют соответственно вид:

$$\begin{aligned}
 \delta^1 J(u_1, u_2, \delta u_1, \delta u_2) &= - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial M'(x, a(x), u_2(x), p(x))}{\partial u_2} \delta u_2(x) - \\
 & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial H'(t, x, z(t, x), u_1(t), \psi(t, x))}{\partial u_1} \delta u_1(t), \\
 \delta^2 J(u_1, u_2, \delta u_1, \delta u_2) &= \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 \varphi_1(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} \delta z(t_1, x) + \delta a'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi_2(a(x_1))}{\partial a^2} \delta a(x_1) - \\
 & - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\delta a'(x) \frac{\partial^2 M(x, a(x), u_2(x), p(x))}{\partial a^2} \delta a(x) + \right. \\
 & \left. + 2\delta u_2'(x) \frac{\partial^2 M(x, a(x), u_2(x), p(x))}{\partial u_2 \partial a} \delta a(x) + \delta u_2'(x) \frac{\partial^2 M(x, a(x), u_2(x), p(x))}{\partial u_2^2} \delta u_2(x) \right] - \\
 & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), u_1(t), \psi(t, x))}{\partial z^2} \delta z(t, x) + \right. \\
 & \left. + 2\delta u_1'(t) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), u_1(t), \psi(t, x))}{\partial u_1 \partial z} \delta z(t, x) + \right. \\
 & \left. + \delta u_1'(t) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), u_1(t), \psi(t, x))}{\partial u_1^2} \delta u_1(t) \right].
 \end{aligned} \tag{40}$$

В силу открытости областей управления из формулы (40) следует, что вдоль оптимального управления $(u_1(t), u_2(x))$ для всех $\delta u_1(t)$ и $\delta u_2(x)$ соответственно выполняются соотношения

$$\begin{aligned}
 & \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial M'(x, a(x), u_2(x), p(x))}{\partial u_2} \delta u_2(x) + \\
 & + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial H'(t, x, z(t, x), u_1(t), \psi(t, x))}{\partial u_1} \delta u_1(t) = 0,
 \end{aligned} \tag{42}$$

Из формулы (42) в силу произвольности и независимости вариаций $\delta u_1(t)$ и $\delta u_2(x)$ управляющих функций $u_1(t)$ и $u_2(x)$ следует

Теорема 1. Для оптимальности допустимого управления $(u_1(t), u_2(x))$ необходимо, чтобы соотношения

$$\begin{aligned}
 \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial H(\theta, x, z(\theta, x), u_1(\theta), \psi(\theta, x))}{\partial u_1} &= 0, \\
 \frac{\partial M(\xi, a(\xi), u_2(\xi), p(\xi))}{\partial u_2} &= 0
 \end{aligned} \tag{43}$$

выполнялись соответственно для всех $\theta \in T$ и $\xi \in X \setminus x_1$.

Это условие оптимальности (43) является аналогом уравнения Эйлера для рассматриваемой задачи. Каждое решение уравнения Эйлера назовем классической экстремалью.

В вариационном исчислении, учитывая слабость условия первого порядка – уравнения Эйлера, был установлен ряд необходимых условий оптимальности второго порядка, в частности условия оптимальности Лежандра–Клебша (см., напр.: [13]).

В задачах оптимального управления также прослеживается аналогичная ситуация.

Из формулы (41) следует, что для оптимальности классической экстремали $(u_1(t), u_2(x))$ необходимо, чтобы неравенство

$$\begin{aligned} & \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 \varphi_1(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} \delta z(t_1, x) + \delta a'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi_2(a(x_1))}{\partial a^2} \delta a(x_1) - \\ & - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\delta a'(x) \frac{\partial^2 M(x, a(x), u_2(x), p(x))}{\partial a^2} \delta a(x) + \right. \\ & + 2\delta u_2'(x) \frac{\partial^2 M(x, a(x), u_2(x), p(x))}{\partial u_2 \partial a} \delta a(x) + \delta u_2'(x) \frac{\partial^2 M(x, a(x), u_2(x), p(x))}{\partial u_2^2} \delta u_2(x) \left. \right] - \\ & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), u_1(t), \psi(t, x))}{\partial z^2} \delta z(t, x) + \right. \\ & + 2\delta u_1'(t) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), u_1(t), \psi(t, x))}{\partial u_1 \partial z} \delta z(t, x) + \delta u_1'(t) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), u_1(t), \psi(t, x))}{\partial u_1^2} \delta u_1(t) \left. \right] \geq 0 \quad (44) \end{aligned}$$

выполнялось для всех вариаций $\delta u_1(t)$ и $\delta u_2(x)$ управляющих функций $u_1(t)$ и $u_2(x)$.

Неравенство (44) является неявным необходимым условием оптимальности второго порядка.

Возникает необходимость в получении необходимых условий оптимальности второго порядка, явно выраженных через параметры рассматриваемой задачи.

Пусть $F(t, \tau; x)$ и $\Phi(x, s)$ ($n \times n$) – матричные функции, являющиеся решениями матричных разностных уравнений типа Вольтерра

$$\begin{aligned} F(t, \tau-1; x) &= \sum_{s=\tau}^{t-1} F(t, s; x) \frac{\partial f(s, \tau, x, z(\tau, x), u_1(\tau))}{\partial z}, \\ F(t, t-1; x) &= E, \\ \Phi(x, s-1) &= \sum_{\alpha=s}^{x-1} \Phi(x, \alpha) \frac{\partial K(\alpha, s, a(s), u_2(\tau))}{\partial a}, \\ \Phi(x, x-1) &= E, \end{aligned}$$

где E – ($n \times n$) единичная матрица.

Из результатов работы [14] следует, что решения задач (37)–(38) и (36)–(37) могут быть представлены в виде:

$$\delta z(t, x) = F(t, t_0-1; x) \delta a(x) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=\tau}^{t-1} F(t, s; x) \frac{\partial f(s, \tau, x, z(\tau, x), u_1(\tau))}{\partial u_1} \delta u_1(\tau), \quad (45)$$

$$\delta a(x) = \sum_{s=x_0}^{x-1} \sum_{\alpha=s}^{x-1} \Phi(x, \alpha) \frac{\partial K(\alpha, s, a(s), u_2(s))}{\partial u_2} \delta u_2(s). \quad (46)$$

Теперь, используя произвольность $\delta u_1(t)$ и $\delta u_2(x)$, положим $\delta u_2(x) = 0$.

Тогда представление (45) примет вид:

$$\delta z(t, x) = \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=\tau}^{t-1} F(t, s; x) \frac{\partial f(s, \tau, x, z(\tau, x), u_1(\tau))}{\partial u_1} \delta u_1(\tau), \quad (47)$$

а из представления (46) при этом следует, что $\delta a(x) = 0$.

Поэтому из неравенства (44) получим, что вдоль оптимального управления $(u_1(t), u_2(x))$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 \varphi_1(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} \delta z(t_1, x) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), u_1(t), \psi(t, x))}{\partial z^2} \delta z(t, x) + \right. \\ \left. + 2\delta u_1'(t) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), u_1(t), \psi(t, x))}{\partial u_1 \partial z} \delta z(t, x) + \delta u_1'(t) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), u_1(t), \psi(t, x))}{\partial u_1^2} \delta u_1(t) \right] \geq 0. \quad (48)$$

Введя обозначение

$$\sum_{s=\tau}^{t-1} F(t, s; x) \frac{\partial f(s, \tau, x, z(\tau, x), u_1(\tau))}{\partial u_1} = Q(t, \tau, x),$$

представление (47) можно записать в виде:

$$\delta z(t, x) = \sum_{\tau=t_0}^{t-1} Q(t, \tau, x) \delta u_1(\tau). \quad (49)$$

Используя представление (49), получим, что

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 \varphi_1(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} \delta z(t_1, x) = \\ = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} \delta u_1'(\tau) \left(\sum_{x=x_0}^{x_1-1} Q'(t_1, \tau, x) \frac{\partial^2 \varphi_1(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} Q(t_1, s, x) \right) \delta u_1(s), \quad (50)$$

$$2 \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta u_1'(t) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), u_1(t), \psi(t, x))}{\partial u_1 \partial z} \delta z(t, x) = \\ = 2 \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\sum_{\tau=t_0}^{t-1} \delta u_1'(\tau) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), u_1(t), \psi(t, x))}{\partial u_1 \partial z} Q(t, \tau, x) \delta u_1(\tau) \right], \quad (51)$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), u_1(t), \psi(t, x))}{\partial z^2} \delta z(t, x) = \\ = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta u_1'(\tau) \left(\sum_{t=\max(\tau, s)+1}^{t_1-1} Q'(t, \tau, x) \frac{\partial^2 \varphi_1(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} Q(t, s, x) \right) \delta u_1(s). \quad (52)$$

Введем обозначение

$$K_1(\tau, s) = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left(\sum_{t=\max(\tau, s)+1}^{t_1-1} Q'(t, \tau, x) \frac{\partial^2 \varphi_1(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} Q(t, \tau, x) \right) - \\ - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} Q'(t_1, \tau, x) \frac{\partial^2 \varphi_1(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} Q(t_1, s, x). \quad (53)$$

С учетом обозначения (53) и тождеств (50)–(52) неравенство (44) записывается в виде:

$$\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} \delta u_1'(\tau) K_1(\tau, s) \delta u_1(s) + 2 \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\sum_{\tau=t_0}^{t-1} \delta u_1'(\tau) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), u_1(t), \psi(t, x))}{\partial u_1 \partial z} Q(t, \tau, x) \delta u_1(\tau) \right] + \\ + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta u_1'(t) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), u_1(t), \psi(t, x))}{\partial u_1^2} \delta u_1(t) \leq 0. \quad (54)$$

Теперь положим $\delta u_1(x) = 0$, считая, что $\delta u_2(x) \neq 0$. При этом формула представления (45) примет вид:

$$\delta z(t, x) = \sum_{s=x_0}^{x-1} \sum_{\alpha=s}^{x-1} F(t, t_0-1; x) \Phi(x, \alpha) \frac{\partial K(\alpha, s, a(s), u_2(s))}{\partial u_2} \delta u_2(s). \quad (55)$$

Введем обозначение

$$R(t, x, s) = \sum_{\alpha=s}^{x-1} F(t, t_0 - 1; x) \Phi(x, \alpha) \frac{\partial K(\alpha, s, a(s), u_2(s))}{\partial u_2},$$

из формулы (55) получим, что

$$\delta z(t, x) = \sum_{s=x_0}^{x-1} R(t, x, s) \delta u_2(s). \quad (56)$$

Далее, полагая

$$N(x, s) = \sum_{\alpha=s}^{x-1} \Phi(x, \alpha) \frac{\partial K(\alpha, s, a(s), u_2(s))}{\partial u_2},$$

представление (46) запишем в виде:

$$\delta a(x) = \sum_{s=x_0}^{x-1} N(x, s) \delta u_2(s). \quad (57)$$

При предположении $\delta u_1(x) = 0$, $\delta u_2(x) \neq 0$ неравенство (44) примет вид:

$$\begin{aligned} & \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 \varphi_1(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} \delta z(t_1, x) + \delta a'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi_2(a(x_1))}{\partial a^2} \delta a(x_1) - \\ & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), u_1(t), \psi(t, x))}{\partial z^2} \delta z(t, x) - \\ & - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\delta a'(x) \frac{\partial^2 M(x, a(x), u_2(x), p(x))}{\partial a^2} \delta a(x) + \right. \\ & \left. + 2\delta u_2'(x) \frac{\partial^2 M(x, a(x), u_2(x), p(x))}{\partial u_2 \partial a} \delta a(x) + \delta u_2'(x) \frac{\partial^2 M(x, a(x), u_2(x), p(x))}{\partial u_2^2} \delta u_2(x) \right] \geq 0. \quad (58) \end{aligned}$$

Займемся преобразованием отдельных слагаемых в неравенстве (58). С использованием формул (56) и (57) доказывается, что

$$\delta a'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi_2(a(x_1))}{\partial a^2} \delta a(x_1) = \sum_{\tau=x_0}^{x-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} \delta u_2'(\tau) N'(x_1, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_2(a(x_1))}{\partial a^2} N'(x_1, s) \delta u_2(s), \quad (59)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 \varphi_1(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} \delta z(t_1, x) = \\ & = \sum_{\tau=x_0}^{x-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} \delta u_2'(\tau) \left(\sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} R'(t_1, x, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_1(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} R(t_1, x, s) \right) \delta u_2(s), \quad (60) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), u_1(t), \psi(t, x))}{\partial z^2} \delta z(t, x) = \\ & \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \delta u_2'(\tau) \left[\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} R'(t, x, \tau) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), u_1(t), \psi(t, x))}{\partial z^2} R(t, x, s) \right] \delta u_2(s), \quad (61) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta a'(x) \frac{\partial^2 M(x, a(x), u_2(x), p(x))}{\partial a^2} \delta a(x) = \\ & = \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} \delta u_2'(\tau) \left[\sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} N'(x_1, \tau) \frac{\partial^2 M(x, a(x), u_2(x), p(x))}{\partial a^2} N(x_1, s) \right] \delta u_2(s), \quad (62) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta u_2'(x) \frac{\partial^2 M(x, a(x), u_2(x), p(x))}{\partial u_2 \partial a} \delta a(x) = \\ & = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\sum_{s=x_0}^{x-1} \delta u_2'(x) \frac{\partial^2 M(x, a(x), u_2(x), p(x))}{\partial u_2 \partial a} N(x, s) \delta u_2(s) \right]. \end{aligned} \quad (63)$$

Введя обозначение

$$\begin{aligned} K_2(\tau, s) = & -N'(x_1, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_2(a(x_1))}{\partial a^2} N'(x_1, s) - \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} R'(t_1, x, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_1(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} R(t_1, x, s) + \\ & + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x-1} R'(t, x, \tau) \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), u_1(t), \psi(t, x))}{\partial z^2} R(t, x, s) + \\ & + \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} N'(x_1, \tau) \frac{\partial^2 M(x, a(x), u_2(x), p(x))}{\partial a^2} N(x_1, s) \end{aligned}$$

и учитывая тождества (59)–(63), из неравенства (58) получаем, что

$$\begin{aligned} & \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \delta u_2'(\tau) K_2(\tau, s) \delta u_2(s) + 2 \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\sum_{s=x_0}^{x-1} \delta u_2'(x) \frac{\partial^2 M(x, a(x), u_2(x), p(x))}{\partial u_2 \partial a} N(x, s) \delta u_2(s) \right] + \\ & + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta u_2'(x) \frac{\partial^2 M(x, a(x), u_2(x), p(x))}{\partial u_2^2} \delta u_2(x) \leq 0. \end{aligned} \quad (64)$$

Следовательно, доказана

Теорема 2. Для оптимальности классической экстремали $(u_1(t), u_2(x))$ необходимо, чтобы неравенства (54) и (64) выполнялись для всех допустимых вариаций $\delta u_1(t)$ и $\delta u_2(x)$ соответственно.

Замечание. Результат теоремы 2 является довольно общим. Используя произвольность допустимых вариаций $\delta u_1(t)$ и $\delta u_2(x)$, из неравенств (54) и (64) можно получить ряд относительно легко проверяемых необходимых условий оптимальности. Но они будут менее информативными.

Приведем одно из них.

Теорема 3. Для оптимальности классической экстремали $(u_1(t), u_2(x))$ необходимо, чтобы неравенства

$$\begin{aligned} & v_1' K_1(\theta, \theta) v_1 + v_1' \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial^2 H(t, x, z(t, x), u_1(t), \psi(t, x))}{\partial u_1^2} v_1 \leq 0, \\ & v_2' K_2(\xi, \xi) v_2 + v_2' \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial^2 M(x, a(x), u_2(x), p(x))}{\partial u_2^2} v_2 \leq 0 \end{aligned}$$

выполнялись соответственно для всех $v_1 \in R^r$ и $v_2 \in R^q$.

Заключение

В работе исследуется одна дискретная задача оптимального управления, описываемая системой двумерных и одномерных разностных уравнений типа Вольтерра.

Процесс описывается с двумя группами управляющих функций. Управляющая функция из первого класса входит в правую часть уравнения, а управляющая функция из второй группы входит в начальное условие уравнения. При этом начальная функция, являясь управляемой, определяется как решение одномерного разностного уравнения Вольтерра.

Получены аналог уравнения Эйлера и ряд необходимых условий оптимальности второго порядка.

Список источников

1. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. М. : Наука, 1972. 446 с.
2. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку : Изд-во БГУ, 2013. 151 с.
3. Марданов М.Дж., Меликов Т.К., Малик С.Т. К теории оптимальных процессов в дискретных системах // Математические заметки. 2019. Т. 106, вып. 3. С. 408–413.
4. Марданов М.Дж., Меликов Т.К., Малик С.Т. К необходимым условиям оптимальности в дискретных системах управления // Известия Иркутского университета. Сер. математическая. 2020. Т. 31. С. 49–61. doi: 10.26516/1997-7670.2020.31.49
5. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Альсевич В.В. и др. Методы оптимизации. Минск : Четыре четверти, 2011. 472 с.
6. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М. : Наука, 1981. 400 с.
7. Габасов Р., Кириллова Ф.М. К теории необходимых условий оптимальности в дискретных системах управления // Управляемые системы : сб. тр. Новосибирск : Ин-т математики СО АН СССР, 1979. Вып. 18. С. 14–25.
8. Гараева Э.А., Мансимов К.Б. Об одной дискретной задаче оптимального управления // Вестник Бакинского университета. Сер. Физика, математика. 2014. № 1. С. 40–49.
9. Гараева Э.А. Об одной дискретной линейной задаче оптимального управления // Вестник Бакинского университета. Сер. Физика, математика. 2015. № 1. С. 70–76.
10. Москаленко А.И. Об одном классе задач оптимального регулирования // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1969. № 1. С. 69–95.
11. Москаленко А.И. Некоторые вопросы теории оптимального управления : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Томск, 1971. 20 с.
12. Souyousefain M., Leela S. Stability results for difference equations of Volterra type // Appl. Math. Comput. 1990. V. 36 (1). P. 51–61.
13. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М. : Либроком, 2011. 256 с.
14. Керимова А.В. О представлении решения одного класса систем линейных неоднородных разностных уравнений типа Вольтерра // Журнал Бакинского инженерного университета. Сер. Математика и компьютерные науки. 2023. № 2. С. 30–36.

References

1. Boltyansky, V.G. (1972) *Optimal'noe upravlenie diskretnymi sistemami* [Optimal control of discrete systems]. Moscow: Nauka.
2. Mansimov, K.B. (2013) *Diskretnye sistemy* [Discrete systems]. Baku: BSU.
3. Mardanov, M.J., Melikov, T.K. & Malik, S.T. (2019) K teorii optimal'nykh protsessov v diskretnykh sistemakh [On the theory of optimal processes in discrete systems]. *Matematicheskie zametki*. 106(3). pp. 408–413.
4. Mardanov, M.J., Melikov, T.K. & Malik, S.T. (2020) K neobkhodimym usloviyam optimal'nosti v diskretnykh sistemakh upravleniya [On necessary conditions for optimality in discrete control systems]. *Izvestiya Irkutskogo universitetata. Ser. matematicheskaya*. 31. pp. 49–61. DOI: 10.26516/1997-7670.2020.31.49
5. Gabasov, R., Kirillova, F.M., Alseovich, V.V. et al. (2011) *Metody optimizatsii* [Optimization Methods]. Minsk: Chetyre chetverti.
6. Vasiliev, F.P. (1981) *Metody resheniya ekstremal'nykh zadach* [Methods for Solving Extremal Problems]. Moscow: Nauka.
7. Gabasov, R. & Kirillova, F.M. (1979) K teorii neobkhodimyykh usloviy optimal'nosti v diskretnykh sistemakh upravleniya [On the theory of necessary conditions for optimality in discrete control systems]. In: *Upravlyaemye sistemy* [Controlled Systems]. Vol. 18. Novosibirsk: SB RAS. pp. 14–25.
8. Garaeva, E.A. & Mansimov, K.B. (2014) Ob odnoy diskretnoy zadache optimal'nogo upravleniya [On one discrete optimal control problem]. *Vestnik Bakinskogo universiteta. Ser. Fizika, matematika*. 1. pp. 40–49.
9. Garaeva, E.A. (2015) Ob odnoy diskretnoy lineynoy zadache optimal'nogo upravleniya [On one discrete linear optimal control problem]. *Vestnik Bakinskogo universiteta. Ser. Fizika, matematika*. 1. pp. 70–76.
10. Moskalenko, A.I. (1969) Ob odnom klasse zadach optimal'nogo regulirovaniya [On one class of optimal control problems]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*. 1. pp. 69–95.
11. Moskalenko, A.I. (1971) *Nekotorye voprosy teorii optimal'nogo upravleniya* [Some issues in optimal control theory]. Abstract of Physics and Mathematics Cand. Diss. Tomsk.
12. Souyousefain, M. & Leela, S. (1990) Stability results for difference equations of Volterra type. *Applied Mathematics and Computation*. 36(1). pp. 51–61.
13. Gabasov, R. & Kirillova, F.M. (2011) *Osobyie optimal'nye upravleniya* [Special Optimal Controls]. Moscow: Librokom.
14. Kerimova, A.V. (2023) O predstavlenii resheniya odnogo klassa sistem lineynykh neodnorodnykh raznostnykh uravneniy tipa Vol'terra [On the representation of the solution of one class of systems of linear inhomogeneous difference equations of Volterra type]. *Zhurnal Bakinskogo inzhener'nogo universiteta. Ser. Matematika i komp'yuternye nauki*. 2. pp. 30–36.

Информация об авторе:

Мансимов Камиль Байрамали оглы – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией «Методы управления в сложных динамических системах» Института систем управления Министерства науки и образования

Азербайджана (Баку, Азербайджан); заведующий кафедрой «Математическая кибернетика» Бакинского государственного университета (Баку, Азербайджан), E-mail: kamilbmansimov@gmail.com

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authorss:

Mansimov Kamil B. (Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Laboratory “Control Methods in Complex Dynamic Systems” of the Institute of Control Systems of the Ministry of Science and Education of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan); Head Department of Mathematical Cybernetics, Baku State University (Baku, Azerbaijan), E-mail: kamilbmansimov@gmail.com

The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 30.05.2024; принята к публикации 03.03.2025

Received 30.05.2024; accepted for publication 03.03.2025