

Научная статья

УДК 519.213

doi: 10.17223/19988605/70/4

Математическая модель нерегулируемого перекрестка в виде системы массового обслуживания с групповым входящим потоком и ненадежным прибором

Александра Владимировна Старовойтова¹, Александр Николаевич Моисеев²

^{1,2} *Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия*

¹ *starovoytova.tsu@gmail.com*

² *moiseev.tsu@gmail.com*

Аннотация. Предложена математическая модель нерегулируемого перекрестка с примыканием второстепенной однополосной дороги к главной в виде однолинейной системы массового обслуживания с неординарным пуассоновским входящим потоком и ненадежным прибором. Особенностью рассматриваемой модели является то, что занятость перекрестка для транспортных средств со второстепенной дороги моделируется как ненадежный обслуживающий прибор, работоспособность которого определяется в виде цепи Маркова с двумя состояниями. Также важная отличительная особенность модели – неординарный входящий поток. В работе выполнено исследование данной модели, с применением метода производящих функций найдено стационарное распределение вероятностей числа заявок в системе. Проведены численные эксперименты.

Ключевые слова: система массового обслуживания; моделирование проезда перекрестка; ненадежный прибор; неординарный пуассоновский поток.

Для цитирования: Старовойтова А.В., Моисеев А.Н. Математическая модель нерегулируемого перекрестка в виде системы массового обслуживания с групповым входящим потоком и ненадежным прибором // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2025. № 70. С. 42–51. doi: 10.17223/19988605/70/4

Original article

doi: 10.17223/19988605/70/4

Model of an Unsignalized Intersection in the Form of Queueing System with Batch Arrival Process and Unreliable Server

Alexandra V. Starovoytova¹, Alexander N. Moiseev²

^{1,2} *National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*

¹ *starovoytova.tsu@gmail.com*

² *moiseev.tsu@gmail.com*

Abstract. In the paper, a mathematical model of a non-equal priority intersection of single-lane roads represented as a single-server queueing system with a batch Poisson arrival process and unreliable server. The study focuses on the passage of vehicles from the secondary road and the resulting queue. The traffic flow on the main road is modeled as the state of the server like "on/off" mode, determined by a given Markov chain. A system of Kolmogorov differential equations was constructed, and the generating function method was applied to solve the system. Additionally, the condition for the existence of a stationary regime of the system was found. As a result, the steady-state probability distribution of the number of customers is derived. Numerical experiments are conducted.

Keywords: queueing system; modeling of passing an intersection; batch Poisson process; unreliable server.

For citation: Starovoytova, A.V., Moiseev, A.N. (2025) Model of an unsignalized intersection in the form of queueing system with batch arrival process and unreliable server. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnik i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 70. pp. 42–51. doi: 10.17223/19988605/70/4

Введение

Реальные транспортные потоки являются стохастическими процессами, поэтому применение для них теории случайных процессов и разработка стохастических математических моделей представляют собой актуальную задачу. Математическая модель нерегулируемого перекрестка может быть описана как система массового обслуживания, где транспортные потоки взаимодействуют и создают задержки для участников движения. Исследования, такие как анализ трафика [1–2], а также теоретическая оценка задержек на нерегулируемых перекрестках Tanner'a [3], заложили основы для изучения таких систем.

В [4–5] для анализа используются клеточные автоматы и рассматривается модель «медленного старта», учитывающая время старта, которое нужно автомобилю для того, чтобы начать движение.

Большое число работ в области математического моделирования проезда перекрестков применяет методы теории массового обслуживания. Так, в статье [6] рассматривается перекресток со светофорным регулированием с одинаковой длительностью переключений красного и зеленого сигналов, а также с произвольными длительностями переключений, что соответствует нерегулируемому перекрестку. В модели неравнозначного перекрестка рассматривается система с входящим пуассоновским потоком автомобилей и постоянным временем обслуживания. Также модель регулируемого перекрестка была рассмотрена в [7]. Особенность данной работы в том, что в предложенной модели в фазе зеленого сигнала светофора интенсивность обслуживания изменяется во времени.

Модель нерегулируемого перекрестка с ограничением мест в очереди для главной и второстепенной дороги была рассмотрена в [8]. В данной модели машины со второстепенной дороги проезжают перекресток с некоторой вероятностью, которая зависит от количества машин на главной дороге.

В работах [9–11] предложена математическая модель нерегулируемого перекрестка как система массового обслуживания M/G2/1. Время ожидания в данной работе зависит от «критического интервала» – минимального безопасного промежутка для проезда, который может варьировать случайным образом. Учитывая различные типы поведения водителей, оценивается их влияние на время ожидания и длину очереди.

В исследованиях [12–14] рассматриваются задачи управления регулирующими перекрестками.

В настоящей работе предлагается модель нерегулируемого перекрестка с примыканием однополосной второстепенной дороги к главной однополосной (обе дороги односторонние). Модель описывает проезд автомобилей со второстепенной дороги и образующуюся на ней очередь. Движение по главной дороге моделируется как состояние обслуживающего прибора по типу «включено / выключено». По сути, это представлено как «поломки» прибора, режим которых определяется заданной цепью Маркова.

В отличие от [6] в данной работе рассматривается модель в виде системы массового обслуживания с неординарным (групповым) пуассоновским входящим потоком и ненадежным прибором. Групповой входящий поток позволяет моделировать поступление автомобилей на рассматриваемый перекресток «пачками», что может быть вызвано, например, наличием другого (регулируемого) перекрестка перед данным или присутствием в голове пачки медленного транспортного средства.

1. Математическая модель и постановка задачи

Рассматривается математическая модель неравнозначного нерегулируемого перекрестка с примыканием однополосной второстепенной дороги к главной однополосной в виде системы массового обслуживания с неординарным пуассоновским входящим потоком и ненадежным прибором.

Пусть в систему поступают группы машин, образующие пуассоновский поток с параметром λ , при этом в группу приходит случайное число автомобилей v , где v – дискретная случайная величина, заданная рядом распределения $P\{v = s\} = l_s, s \in \{1, 2, \dots\}$. Входящий поток в данной модели формирует только появление автомобилей на второстепенной дороге.

Проезд автомобилей по главной дороге моделируется как цепь Маркова $k(t)$ с двумя состояниями

$$k(t) = \begin{cases} 1, & \text{обслуживание транспорта на второстепенной дороге,} \\ 0, & \text{проезд перекрестка запрещен для второстепенной дороги,} \end{cases}$$

которая задается матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q}$ с элементами, имеющими смысл интенсивностей перехода прибора из нерабочего состояния в рабочее (элемент q_{01}) и из рабочего в нерабочее (элемент q_{10}).

Время проезда (обслуживания) автомобиля со второстепенной дороги является экспоненциальной случайной величиной с параметром μ , если перекресток свободен ($k(t) = 1$ – обслуживающий прибор работает). Если же перекресток занят ($k(t) = 0$ – обслуживающий прибор «сломан»), то автомобили со второстепенной дороги не обслуживаются. Таким образом, интенсивность их обслуживания можно определить как случайный процесс

$$\mu(t) = \begin{cases} \mu, & \text{если } k(t) = 1, \\ 0, & \text{если } k(t) = 0. \end{cases}$$

Если подъезжающий автомобиль видит, что перекресток свободен, он проезжает его без остановки. Если же перекресток занят, автомобиль становится в очередь, при этом длина очереди не ограничена. Если водитель автомобиля со второстепенной дороги неверно оценил дорожную обстановку и не успел завершить проезд перекрестка, пока тот был свободен, а с главной дороги уже подъехал другой автомобиль, то в этом случае автомобиль со второстепенной дороги будет вынужден уступить дорогу и вернуться в очередь.

Ставится задача нахождения стационарного распределения числа автомобилей в очереди на второстепенной дороге, включая автомобиль, проезжающий перекресток, если таковой имеется.

Обозначим $i(t)$ – число транспортных средств на второстепенной дороге (включая выехавшее на перекресток) в момент времени t . Таким образом, целью исследования является получение стационарного распределения вероятностей процесса $i(t)$.

Очевидно, что случайный процесс $i(t)$ не является марковским. Но марковским является двумерный процесс $\{i(t), k(t)\}$. Обозначим его распределение вероятностей как $P_k(i, t) = P\{k(t) = k, i(t) = i\}$. Тогда составим следующую систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_0(0, t)}{\partial t} = -(\lambda + q_{01})P_0(0, t) + q_{10}P_1(0, t), \\ \frac{\partial P_1(0, t)}{\partial t} - (\lambda + q_{10})P_1(0, t) + q_{01}P_0(0, t) + \mu P_1(1, t) = 0, \\ \frac{\partial P_0(i, t)}{\partial t} - (\lambda + q_{01})P_0(i, t) + \lambda \sum_{s=1}^i P_0(i-s, t)l_s + q_{10}P_1(i+1, t) = 0, \text{ при } i > 0, \\ \frac{\partial P_1(i, t)}{\partial t} - (\lambda + q_{10} + \mu)P_1(i, t) + \lambda \sum_{s=1}^i P_1(i-s, t)l_s + q_{01}P_0(i, t) + \mu P_1(i+1, t) = 0, \text{ при } i > 0. \end{cases}$$

Обозначая через $\Pi_k(i)$ стационарные вероятности распределения случайного процесса $i(t)$ в произвольный момент времени, перейдем к стационарному режиму, считая t произвольным, а вероятностные характеристики системы $P_k(i, t)$ не зависящими от времени. Тогда получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -(\lambda + q_{01})\Pi_0(0) + q_{10}\Pi_1(0) = 0, \\ -(\lambda + q_{10})\Pi_1(0) + q_{01}\Pi_0(0) + \mu\Pi_1(1) = 0, \\ -(\lambda + q_{01})\Pi_0(i) + \lambda \sum_{s=1}^i \Pi_0(i-s)l_s + q_{10}\Pi_1(i+1) = 0, \text{ при } i > 0, \\ -(\lambda + q_{10} + \mu)\Pi_1(i) + \lambda \sum_{s=1}^i \Pi_1(i-s)l_s + q_{01}\Pi_0(i) + \mu\Pi_1(i+1) = 0, \text{ при } i > 0. \end{cases}$$

Для нахождения вероятностей $\Pi_k(i)$ к данной системе нужно добавить условие нормировки

$$\sum_{i=0}^{\infty} (\Pi_0(i) + \Pi_1(i)) = 1.$$

2. Уравнения для частных производящих функций и их решение

Введем частичные производящие функции

$$G_0(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i \Pi_0(i),$$

$$G_1(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i \Pi_1(i),$$

$$L(z) = \sum_{s=1}^{\infty} z^s l_s.$$

Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} z^i \sum_{s=1}^i \Pi_k(i-s) l_s = \sum_{s=1}^{\infty} z^s l_s \sum_{i=s}^{\infty} z^{i-s} \Pi_k(i-s) = G_k(z) L(z).$$

Тогда получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -(\lambda + q_{01})G_0(z) + \lambda G_0(z)L(z) + q_{10}G_1(z) = 0, \\ -(\lambda + q_{10})G_1(z) - \mu[G_1(z) - \Pi_1(0)] + \frac{\mu}{z}[G_1(z) - \Pi_1(0)] + \lambda G_1(z)L(z) + q_{01}G_0(z) = 0. \end{cases}$$

Выразим $G_1(z)$ из второго уравнения:

$$\begin{cases} -(\lambda + q_{01})G_0(z) + \lambda G_0(z)L(z) + q_{10}G_1(z) = 0, \\ G_1(z) = \frac{zq_{01}G_0(z) + \Pi_1(0)\mu(1-z)}{zq_{10} + z\lambda[1-L(z)] + \mu(z-1)}. \end{cases}$$

Тогда, решив данную систему, находим

$$\begin{aligned} G_0(z) &= \frac{q_{10}(1-z)\mu\Pi_1(0)}{q_{01}[\lambda z(L(z)-1) + \mu(1-z)] - [\lambda(L(z)-1)(\mu - q_{10}z + z(\lambda L(z) - \lambda - \mu))]}, \\ G_1(z) &= \frac{(1-z)(q_{01} + \lambda - \lambda L(z))\mu\Pi_1(0)}{q_{01}[\lambda z(L(z)-1) + \mu(1-z)] - [\lambda(L(z)-1)(\mu - q_{10}z + z(\lambda L(z) - \lambda - \mu))]}, \\ G(z) = G_0(z) + G_1(z) &= \frac{(1-z)(q_{01} + q_{10} + \lambda - \lambda L(z))\mu\Pi_1(0)}{q_{01}[\lambda z(L(z)-1) + \mu(1-z)] - [\lambda(L(z)-1)(\mu - q_{10}z + z(\lambda L(z) - \lambda - \mu))]} \end{aligned}$$

В данном выражении для производящей функции осталась неизвестной вероятность $\Pi_1(0)$. Найдем ее из условия нормировки $G(1) = 1$. Прямая подстановка приводит к неопределенности типа «0/0», раскрытие которой по правилу Лопиталя дает

$$\lim_{z \rightarrow 1} G(z) = - \frac{\Pi_1(0)\mu(q_{01} + q_{10} + \lambda - \lambda L'(z))}{q_{01}[-\mu + z\lambda(L'(z)-1)] - \lambda(L(z)-1)[-q_{10} - \lambda - \mu + z\lambda L'(z) + \lambda L(z)] - \lambda\mu L'(z)[-q_{10}z + \mu + \bar{z}]},$$

где $\bar{z} = z(-\lambda - \mu + z(\lambda - \mu + \lambda L(z)))$.

Учитывая, что

$$L'(z)|_{z=1} = \sum_{s=1}^{\infty} s l_s = m, \quad L(z)|_{z=1} = \sum_{s=1}^{\infty} l_s = 1,$$

получим

$$- \frac{\Pi_1(0)\mu(q_{01} + q_{10})}{q_{01}(-\mu + \lambda m) + \lambda m q_{10}} = 1.$$

Таким образом,

$$\Pi_1(0) = \frac{q_{01}}{q_{01} + q_{10}} - m \frac{\lambda}{\mu},$$

где m – среднее число заявок в пачке. Отсюда, в частности, получаем условие существования стационарного режима

$$m \frac{\lambda}{\mu} < \frac{q_{01}}{q_{01} + q_{10}}. \quad (1)$$

Таким образом, окончательно получаем следующее выражение для производящей функции числа заявок в очереди в стационарном режиме:

$$G(z) = \frac{\left(\frac{q_{01}}{q_{01} + q_{10}} - m \frac{\lambda}{\mu} \right) \mu (1-z) [q_{01} + q_{10} + \lambda - \lambda L(z)]}{q_{01} [\lambda z (L(z) - 1) + \mu (1-z)] - \lambda (L(z) - 1) [\mu - q_{10} z + z (\lambda L(z) - \lambda - \mu)]}.$$

Отсюда можно получить стационарное распределение вероятностей, применив обратное преобразование Фурье к соответствующей характеристической функции:

$$\Pi(i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jiz} G(e^{jz}) dz,$$

где $j = \sqrt{-1}$.

3. Численные примеры

Для иллюстрации того, как в разных режимах работы системы меняется характер полученного стационарного распределения, приведем несколько иллюстративных численных примеров.

Основываясь на (1), введем понятие коэффициента загрузки системы ρ :

$$\rho = m \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{q_{01} + q_{10}}{q_{01}}. \quad (2)$$

Зафиксируем $\mu = 10$, а интенсивность входящего потока λ будем вычислять из (2) на основе заданных ρ и m . Для коэффициента загрузки системы ρ будем брать три уровня значений: 0,1 (низкая загрузка), 0,5 (средняя загрузка), 0,9 (высокая загрузка). Средний размер пачки m примем равным 3 и 6. В качестве распределения размера пачки рассмотрим следующие варианты:

а) детерминированное со значением, равным 1 (ординарный входящий поток, берется для сравнения);

б) распределение с фиксированным размером пачки m ;

с) равномерное дискретное распределение от 1 до $2m - 1$;

д) геометрическое распределение с матожиданием m ;

е) смещенное на 1 распределение Пуассона с матожиданием m .

Рассмотрим два вида режима работы прибора:

– режим 1 – $q_{01} = 0,2$, $q_{10} = 0,8$, в этом режиме прибор доступен для обслуживания 20% общего времени;

– режим 2 – $q_{01} = 0,8$, $q_{10} = 0,2$, в этом режиме прибор доступен для обслуживания 80% общего времени.

На рис. 1, 2 представлены соответствующие распределения для описанных режимов работы и различных значений загрузки системы и размера пачки. На рис. 3 показано, как изменяется математическое ожидание числа заявок в системе с ростом загрузки системы. На основе проведенного численного моделирования можно заметить следующее:

1. Если размер пачки фиксирован (случай б), то в распределении вероятностей числа заявок в системе наблюдаются характерные «зубцы». Это явление можно объяснить тем, что при добавлении

заявок новой пачки к общему числу заявок в системе добавляется константа m , равная размеру пачки, а значит, вероятности значений, кратные этой величине, будут больше остальных. Такой эффект ярче проявляется в условиях средней и высокой загрузки системы ($\rho = 0,5$ и $\rho = 0,9$).

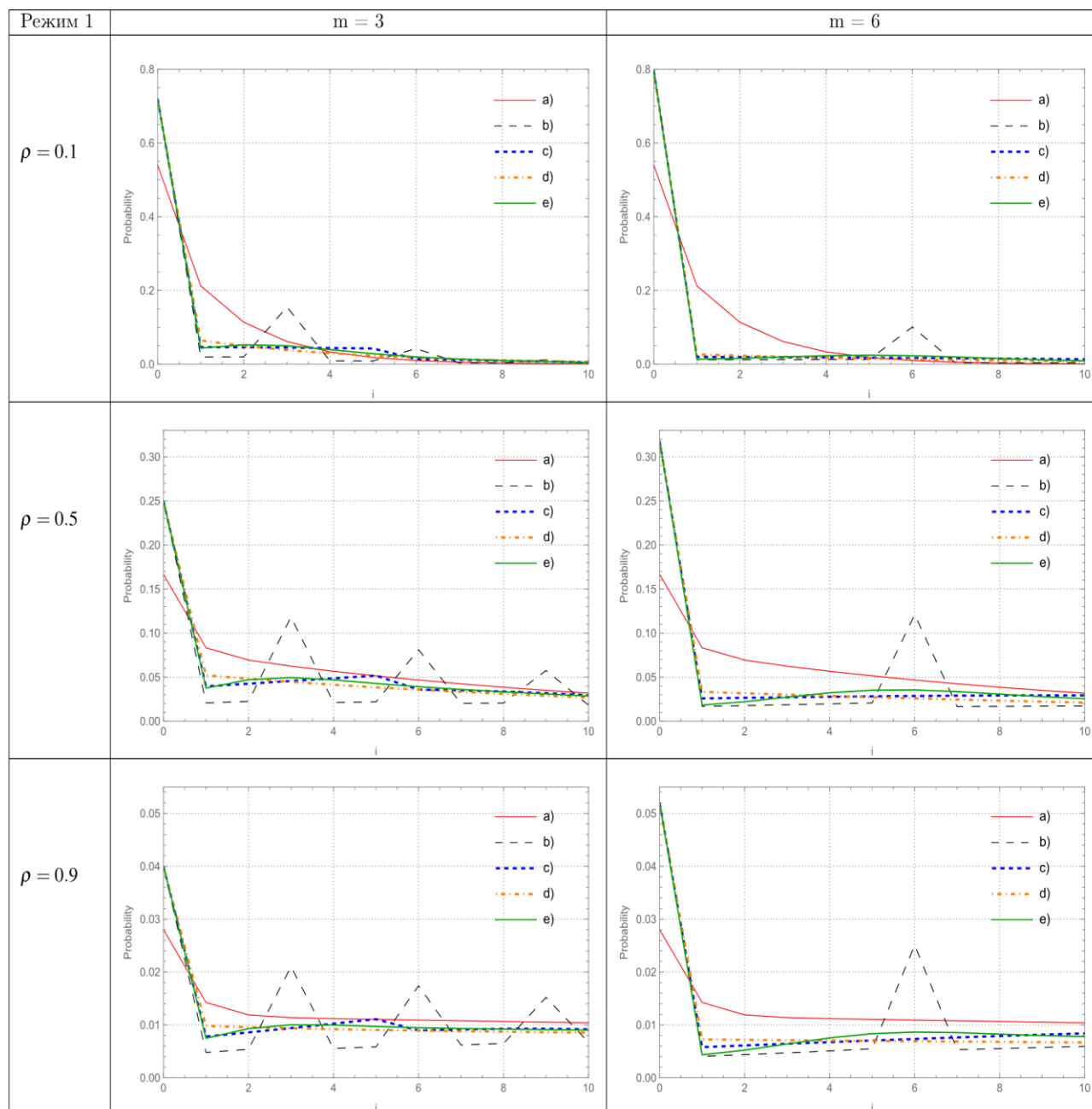


Рис. 1. Стационарные распределения вероятностей числа заявок в системе в режиме 1 работы прибора для различных значений коэффициента загрузки ρ при разных распределениях размера пачки (а–е)
 Fig. 1. Steady-state probability distributions of the number of customers in mode 1 of the server operation for various values of loading coefficient ρ and different distributions of a batch size (a–e)

2. Для некоторых типов распределений (например, равномерное, Пуассона) наблюдаются участки со сменой характера монотонности значений вероятностей числа заявок в системе, что, видимо, объясняется тем же эффектом, что и для детерминированного случая, но здесь «зубцы» полигона распределения более размыты вследствие недетерминированности размера пачки.

3. При большой загрузке распределение числа заявок в системе имеет так называемый тяжелый хвост, что иллюстрируется данными, представленными в таблице. В частности, для геометрического

распределения размера пачки ($m = 6$) даже в случае 80% доступности прибора вес хвоста для $i > 100$ (сумма всех вероятностей для $i > 100$) составляет 0,255, т.е. более четверти времени общее число заявок в системе будет превышать 100. А в случае режима 20% доступности прибора положение становится еще хуже: почти 45% общего времени число скопившихся транспортных средств будет больше 100.

4. Несмотря на то, что вероятность пустой системы для случая ординарного потока во всех случаях меньше остальных вариантов (см. рис. 1, значение при $i = 0$), среднее число заявок в системе с ординарным потоком оказывается меньше, чем в системе с групповым потоком при той же загрузке (см. рис. 3). Этот эффект только усиливается с ростом коэффициента загрузки ρ .

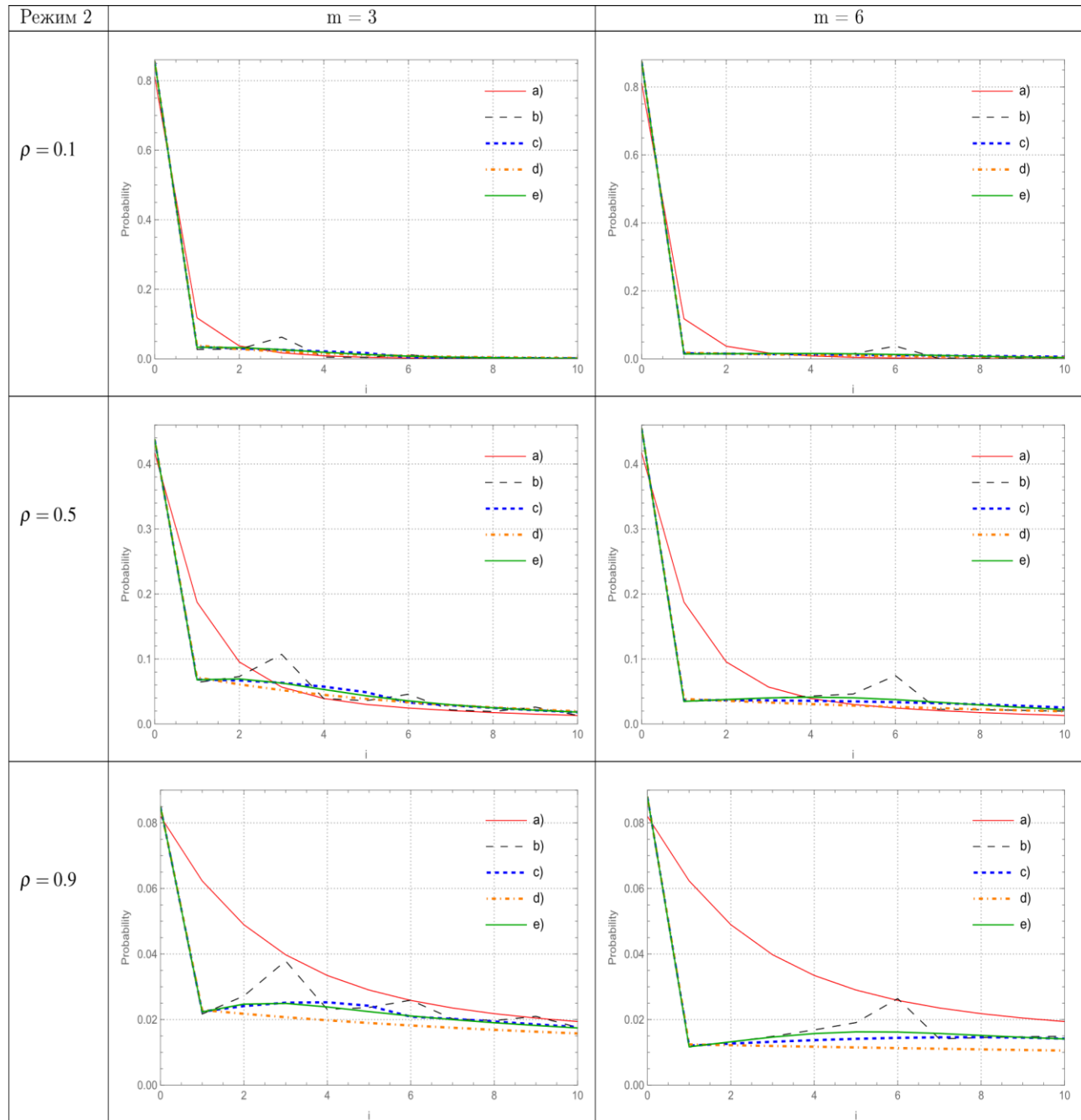


Рис. 2. Стационарные распределения вероятностей числа заявок в системе в режиме 2 работы прибора для различных значений коэффициента загрузки ρ при разных распределениях размера пачки (а–е)
 Fig. 2. Steady-state probability distributions of the number of customers in mode 2 of the server operation for various values of loading coefficient ρ and different distributions of a batch size (a–e)

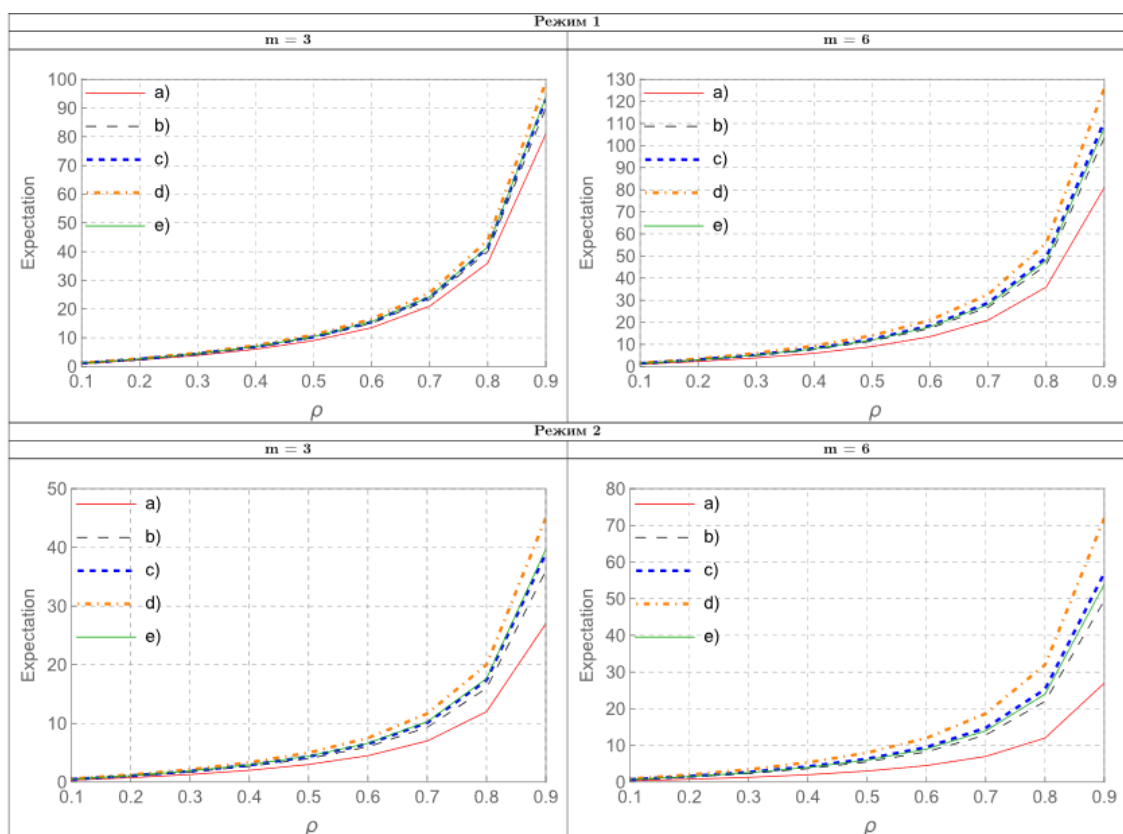


Рис. 3. Изменение математического ожидания числа заявок в системе с ростом значений коэффициента загрузки ρ
 Fig. 3. Changing of mathematical expectation of the number of customers in the system while loading coefficient ρ grows

Вес хвостов распределений для $i > 100$

Высокая нагрузка системы ($\rho = 0,9$)	$m = 3$		$m = 6$	
	Режим 1	Режим 2	Режим 1	Режим 2
Детерминированное распределение	0,287	0,038	0,287	0,038
Распределение с фиксированным размером пачки	0,328	0,076	0,378	0,144
Равномерное распределение	0,340	0,090	0,403	0,182
Геометрическое распределение	0,362	0,121	0,445	0,255
Распределение Пуассона	0,343	0,094	0,393	0,167

Заключение

В работе предложена математическая модель нерегулируемого перекрестка с примыканием однополосной второстепенной дороги к главной однополосной в виде однолинейной системы массового обслуживания с неординарным пуассоновским входящим потоком и ненадежным прибором. Особенностью рассматриваемой СМО является то, что работоспособность обслуживающего прибора определяется в виде случайного процесса (цепи Маркова с двумя состояниями), а входящий поток является неординарным. Выполнено исследование данной СМО, найдено стационарное распределение вероятностей числа заявок в системе (транспортных средств на второстепенной дороге). Полученные теоретические результаты позволяют выполнять расчеты загрузки нерегулируемого перекрестка и вычислять вероятностные характеристики числа транспортных средств, скапливающихся на второстепенной дороге.

Приведенные в работе результаты численных экспериментов позволяют представить некоторую качественную картину процессов, происходящих в соответствующих задачах реального дорожного движения. В частности, выводы 3 и 4 раздела 3 говорят о том, что если на дороге (в данном случае – второстепенной) нет условий для формирования пачек, то среднее число ожидающих автомобилей

будет ниже (при большой загрузке – значительно ниже), чем для случаев, когда имеются факторы, приводящие к формированию на дороге групп транспортных средств. Кроме того, нечасто будет скапливаться огромное число транспортных средств (например, более 100, – см. анализ хвостов распределения в выводе 3 и таблице). В случае наличия условий для формирования пачек можно порекомендовать владельцу дороги или заинтересованному лицу изменить политику дорожного движения на данном участке, например по возможности убрать регулирование на перекрестке, близко расположенном перед данным, разрешить обгон или организовать дополнительную полосу для обгона, запретить движение тихоходных транспортных средств, установить минимальное ограничение скорости и т.п.

Список источников

1. Greenberg H. An Analysis of Traffic Flow // *Operations Research*. 1959. V. 7 (1). P. 79–85.
2. Greenshields B.D. A Study of Traffic Capacity // *Highway Research Board*. 1935. V. 14. P. 448–477.
3. Tanner J.C. A theoretical analysis of delays at an uncontrolled intersection // *Biometrika*. 1962. V. 49. P. 163–170.
4. Schadschneider A., Schreckenberg M. Traffic flow models with ‘slow-to-stars’ rules // *Ann. Phys. Lpz.* 1997. V. 6. P. 541–551.
5. Castellaes F.C., Ferrari P.A., Pechersky E. A slow-to-start traffic model related to a M/M/1 queue // *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*. 2007. V. 2007 (07). Art. 07008. doi: 10.1088/1742-5468/2007/07/P07008
6. Афанасьева Л.Г., Булинская Е.В. Математические модели транспортных систем, основанные на теории очередей // *Труды Московского физико-технического института*. 2010. № 2 (4). С. 6–21.
7. Завалишин Д.С., Тимофеева Г.А. Исследование математической модели регулируемого перекрестка // *Труды Института математики и механики УрО РАН*. 2009. № 15 (4). С. 108–119
8. Семенов В.В. Математическое моделирование транспортного потока на нерегулируемом пересечении // *Математическое моделирование*. 2008. № 20 (10). С. 14–22.
9. Heidemann D., Wegmann H. Queueing at unsignalized intersections // *Transportation Research. Part B: Methodological*. 1997. V. 31 (3), P. 239–263.
10. Abhishek, Boon M., Mandjes M., Núñez-Queija R. Congestion analysis of unsignalized intersections // *International Conference on Communication Systems and Networks (COMSNETS)*. 2016. V. 8. P. 1–6. doi: 10.48550/arXiv.1802.06858
11. Abhishek, Boon M., Mandjes M. Generalized gap acceptance models for unsignalized intersections // *Math Meth Oper Res*. 2019. V. 89. P. 385–409.
12. Федоткин М.А., Зорин А.В. Стохастические модели процессов адаптивного управления конфликтными потоками неоднородных требований // *Теория вероятностей и ее применения*. 2020. № 65 (1). С. 163–164.
13. Федоткин А.М., Федоткин М.А., Кудрявцев Е.В. Динамические модели неоднородного потока транспорта на магистралях // *Автоматика и телемеханика*. 2020. № 8. С. 149–164.
14. Федоткин М.А., Кудрявцев Е.В. Управляющие системы и механизм образования транспортных пачек на магистралях с интенсивным движением // *Проблемы теоретической конференции : сб. ст. XVI Междунар. конф. (Н. Новгород, 20–25 июня 2011 г.)*. Н. Новгород : Изд-во Нижегород. гос. ун-та им. Н.И. Лобачевского, 2011. С. 503–507.

References

1. Greenberg, H. (1959) An Analysis of Traffic Flow. *Operations Research*. 7(1). pp. 79–85.
2. Greenshields, B.D. (1935) A Study of Traffic Capacity. *Highway Research Board*. 14. pp. 448–477.
3. Tanner, J.C. (1962) A theoretical analysis of delays at an uncontrolled intersection. *Biometrika*. 49. pp. 163–170.
4. Schadschneider, A. & Schreckenberg, M. (1997) Traffic flow models with ‘slow-to-stars’ rules. *Annalen der Physik*. 6. pp. 541–551.
5. Castellaes, F.C., Ferrari, P.A. & Pechersky, E. (2007) A slow-to-start traffic model related to a M/M/1 queue. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*. 07. Art. 07008. DOI: 10.1088/1742-5468/2007/07/P07008
6. Afanasyeva, L.G. & Bulinskaya, E.V. (2010) Matematicheskie modeli transportnykh sistem, osnovannye na teorii ocherey [Mathematical models of transport systems based on queueing methods]. *Trudy Moskovskogo fiziko-tekhnicheskogo instituta*. 2(4). pp. 6–21.
7. Zavalishin, D.S. & Timofeeva, G.A. (2009) Issledovanie matematicheskoy modeli reguliruемого perekrestka [A Study of a Mathematical Model of a Controlled Intersection]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN*. 15(4). pp. 108–119.
8. Semenov, V.V. (2009) Matematicheskoe modelirovanie transportnogo potoka na nereguliruемом peresechenii [Mathematical Modeling of Traffic Flow at an Uncontrolled Intersection]. *Matematicheskoe modelirovanie*. 1(5). pp. 543–550.
9. Heidemann, D. & Wegmann, H. (1997) Queueing at unsignalized intersections. *Transportation Research Part B: Methodological*. 31(3). pp. 239–263.
10. Abhishek, Boon, M., Mandjes, M. & Núñez-Queija, R. (2016) Congestion analysis of unsignalized intersections. *International Conference on Communication Systems and Networks (COMSNETS)*. vol. 8, pp. 1–6. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1802.06858>

11. Abhishek, Boon, M. & Mandjes, M. (2019) Generalized gap acceptance models for unsignalized intersections. *Mathematical Methods of Operations Research*. 89. pp. 385–409.
12. Fedotkin, M.A. & Zorin, A.V. (2020) Stokhasticheskie modeli protsessov adaptivnogo upravleniya konfliktnymi potokami neodnorodnykh trebovaniy [Stochastic Models of Adaptive Control Processes for Conflicting Flows of Heterogeneous Requests]. *Teoriya veroyatnostey i ee primeneniya*. 65(1). pp. 163–164.
13. Fedotkin, A.M., Fedotkin, M.A. & Kudryavtsev, E.V. (2020) Dinamicheskie modeli neodnorodnogo potoka transporta na magistralyakh [Dynamic Models of Heterogeneous Traffic Flow on Highways]. *Avtomatika i telemekhanika*. 8. pp. 149–164.
14. Fedotkin, M.A. & Kudryavtsev, E.V. (2011) Upravlyayushchie sistemy i mekhanizm obrazovaniya transportnykh pachek na magistralyakh s intensivnym dvizheniem [Control Systems and the Mechanism of Traffic Packet Formation on Highways with Intensive Traffic]. *Problemy teoreticheskoy konferentsii* [Problems of the Theoretical Conference]. Proc. of the 16th International Conference. Nizhny Novgorod, June 20–25, 2011. Nizhny Novgorod: N.I. Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod. pp. 503–507.

Информация об авторах:

Старовойтова Александра Владимировна – магистрант кафедры теории вероятностей и математической статистики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: starovoytova.tsu@gmail.com

Моисеев Александр Николаевич – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой программной инженерии Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: moiseev.tsu@gmail.com

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Starovoytova Alexandra V. (Master's Student at the Department of Probability Theory and Mathematical Statistics, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: starovoytova.tsu@gmail.com

Moiseev Alexander N. (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Software Engineering, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: moiseev.tsu@gmail.com

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 28.11.2024; принята к публикации 03.03.2025

Received 28.11.2024; accepted for publication 03.03.2025