ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2025 Управление, вычислительная техника и информатика № 70

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

DATA PROCESSING

Научная статья

УДК 519.2

doi: 10.17223/19988605/70/5

Оценивание параметров гиперэкспоненциального распределения

Юлия Борисовна Буркатовская[1], Сергей Эрикович Воробейчиков[2]

[1] Национальный исследовательский Томский политехнический университет, Томск, Россия

[1, 2] Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия

[1] tracey@tpu.ru

[2] sev@mail.tsu.ru

Аннотация. Рассматривается задача оценивания параметров гиперэкспоненциального распределения. Для распределения с тремя параметрами построены в явном виде оценки по методу моментов и комбинированные оценки. Получены условия применимости метода моментов и проведено его сравнение с комбинированным методом, сочетающим метод моментов и метод максимального правдоподобия. Показана возможность оценивания минимального параметра интенсивности в случае произвольного числа параметров гиперэкспоненциального распределения. Проведено численное моделирование, показывающее применимость разработанных алгоритмов оценивания.

Ключевые слова: гиперэкспоненциальное распределение; метод моментов; метод максимального правдоподобия.

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ, грант № 24-11-00191.

Для цитирования: Буркатовская Ю.Б., Воробейчиков С.Э. Оценивание параметров гиперэкспоненциального распределения // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2025. № 70. С. 52–61. doi: 10.17223/19988605/70/5

Original article

doi: 10.17223/19988605/70/5

Parameter estimation for hyperexponential distribution

Yulia B. Burkatovskaya[1], Sergey E. Vorobeychikov[2]

[1] National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation

[1, 2] National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

[1] tracey@tpu.ru

[2] sev@mail.tsu.ru

Abstract. The problem of the parameter estimation for the hyperexponential distribution is considered. The method of moments and the maximum likelihood method are used, explicit intensity estimators for a distribution with two intensity values are constructed. The conditions for the applicability of the method of moments are obtained and its comparison with a new method combining the method of moments and the maximum likelihood method is carried out. The possibility of estimating the minimum intensity parameter in the case of an arbitrary number of parameters of a hyperexponential distribution is shown. Numerical modeling shows the applicability of the developed estimation algorithms.

Keywords: hyperexponential distribution; method of moments; maximum likelihood method.

Acknowledgments**:** The study was supported by the Russian Science Foundation, grant no. 24-11-00191.

For citation**:** Burkatovskaya, Yu.B., Vorobeychikov, S.E. (2025) Parameter estimation for hyperexponential distribution. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 70. pp. 52–61. doi: 10.17223/19988605/70/5

Введение

Стохастические процессы с изменяющимися параметрами широко используются для аппроксимации реальных нелинейных процессов в различных приложениях, таких как экономика, финансы, медицина, социология, геология и т.д. С точки зрения статистики точка изменения, или разладки, – это момент времени, в котором наблюдения подчиняются одному распределению до этой точки и другому распределению после этой точки. Процессы с несколькими разладками можно определить аналогично [1]. Процессы с одной разладкой обычно используются для моделирования выхода из стабильных состояний или ошибки оборудования, тогда как процессы с несколькими разладками описывают реальные системы с несколькими состояниями, где переключения между состояниями происходят в неизвестные моменты времени. Упомянутая выше книга [1] посвящена параметрическому обнаружению точек изменения с приложениями к генетике, медицине и финансам и содержит ряд классических и недавних результатов в этой области для некоторых часто используемых распределений. В теории массового обслуживания процессы с несколькими разладками применяются для описания систем очередей с различными режимами поступления клиентов; в качестве простейшей модели можно рассмотреть процесс с двумя состояниями, соответствующими «обычному» и «пиковому» времени. Эти два состояния характеризуются разной интенсивностью наступления событий; в первом случае события происходят в целом гораздо реже, чем во втором. При этом большую роль играют модели, основанные на смеси экспоненциальных распределений.

Для оценки смесей распределений обычно используются различные модификации алгоритма EM (expectation-minimization), основанные на оценках максимального правдоподобия. Каждая итерация алгоритма состоит двух шагов. На шаге ожидания (expectation) вычисляется ожидаемое значение функции правдоподобия с использованием текущей оценки параметров. На шаге максимизации (maximization) вычисляются параметры, максимизирующие ожидаемую функцию максимального правдоподобия. Впервые алгоритм с таким названием был предложен в статье [2], хотя итерационные оценки максимального правдоподобия предлагались и ранее: например, в работе [3] они использованы для анализа марковских цепей. В дальнейшем появилось большое количество публикаций, в которых предложенный подход применялся и модифицировался для разных классов случайных процессов, в том числе и для процессов, характеризующихся смесью экспоненциальных распределений. В частности, в работе [4] алгоритм со специальными сглаживающими фильтрами применен для процессов MMPP (Markov-Modulated Poisson Process), в работах [5–7] алгоритм использован для аппроксимации широкого класса случайных процессов, наблюдаемых в дискретные моменты времени, марковским процессом (Markovian Arrival Process). Обзор различных модификаций EM-алгоритма проведен в работе [8].

Положительные стороны данных алгоритмов обусловлены тем, что в их основе лежит метод максимального правдоподобия, гарантирующий состоятельность и асимптотическую эффективность оценок. Однако в ряде работ отмечаются недостатки EM-алгоритмов. А именно, сходимость EM-алгоритма доказана при обязательном условии ограниченности логарифма функции правдоподобия. Также наличие большого числа локальных максимумов логарифма функции правдоподобия приводит к большой неустойчивости по отношению к начальному приближению и исходным данным [9]. Кроме того, итерационный характер алгоритмов приводит к большому количеству вычислений, объем которых возрастает при значительном числе параметров [10]. В связи с этим разрабатываются и альтернативные подходы к оцениванию параметров смесей распределений.

В работе [10] смесь экспоненциальных распределений используется для аппроксимации распределений с тяжелыми хвостами, которые характерны для длин файлов, времени удержания вызова, длины сцен в видеопотоках MPEG и интервалов между запросами на подключение в интернет-трафике. Авторы показывают принципиальную возможность аппроксимации распределения с тяжелыми хвостами гиперэкспоненциальным распределением и предлагают рекурсивный алгоритм подгонки. Сначала оценивается минимальная интенсивность, которая обеспечивает наибольшие значения случайной величины, а значит, вносит наибольший вклад в хвост распределения; затем это распределение вычитается из смеси распределений и оценивается следующая интенсивность. Статья [11] развивает этот подход для аппроксимации распределения Парето при оценивании средней длительности процедуры кумулятивных сумм, для которой в результате получена формула в явном виде. В работе [12] авторы используют гиперэкспоненциальное распределение для описания сенсорных сетей. Для оценивания параметров предложено два оригинальных алгоритма, минимизирующих целевую функцию. Первый алгоритм состоит из двух стадий, на первой оцениваются параметры интенсивности, на второй – вероятности появления наблюдений с данными интенсивностями. Вероятности выражаются через интенсивности, что позволяет на каждой стадии сократить в два раза число оцениваемых параметров. Второй алгоритм оценивает все параметры одновременно.

В данной работе рассматривается задача оценивания параметров гиперэкспоненциального распределения с двумя значениями интенсивности. Получены явные формулы для оценок по методу моментов. Предложены комбинированные оценки параметров, в которых в функции правдоподобия используются два первых выборочных момента. Показана также возможность оценивания минимального параметра интенсивности в общей модели гиперэкспоненциального распределения. Отметим, что этот параметр играет решающую роль при аппроксимации распределений с тяжелыми хвостами гиперэкспоненциальным распределением. Приведены результаты численного моделирования.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу оценивания параметров гиперэкспоненциального распределения. Плотность гиперэкпоненциального распределения имеет вид:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} p_i\lambda_i e^{-\lambda_i x}. \tag{1}$$

Предполагается, что параметры удовлетворяют следующим условиям:

$$p_i>0,\quad \sum_{i=1}^{n} p_i=1,\quad 0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n. \tag{2}$$

Задача состоит в построении оценок оценивания параметров $\{p_i,\lambda_i\}_{1\le i\le n}$ по выборке $\{\tau_i\}_{1\le i\le N}$ из распределения.

2. Оценки параметров для *n* = 2 по методу моментов

Рассмотрим сначала задачу оценивания параметров для случая n = 2. При этом, поскольку $p_1+p_2=1$, требуется оценить три параметра: $\{\lambda_1,\lambda_2,p\}$, где $p=p_1$. Получим явные формулы, используя метод моментов. Для этого требуется найти три первых момента случайной величины. Для сокращения записи введем следующие обозначения:

$$a=\frac{1}{\lambda_1},\ b=\frac{1}{\lambda_2}. \tag{3}$$

Общая формула для начального момента в этом случае имеет вид:

$$EX^k=k!\left(\frac{p}{\lambda_1^k}+\frac{(1-p)}{\lambda_2^k}\right)=k!\left(pa^k+(1-p)b^k\right). \tag{4}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{cases} m_1 = \sum_{k=1}^{N} \tau_k; \\ m_2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \tau_k^2; \\ m_3 = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{N} \tau_k^3. \end{cases} \qquad (5)$$

Приравнивая величины $\{m_1, m_2, m_3\}$ к их средним значениям, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} m_1 = pa + (1-p)b; \\ m_2 = pa^2 + (1-p)b^2; \\ m_3 = pa^3 + (1-p)b^3. \end{cases} \qquad (6)$$

Преобразовав систему, получаем:

$$\begin{cases} m_1 - a = (1-p)(b-a); \\ m_2 - m_1 a = (1-p)b(b-a); \\ m_3 - m_2 a = (1-p)b^2(b-a). \end{cases}$$

Разделив второе уравнение на первое и третье на второе, исключаем из системы $(1-p)$:

$$\begin{cases} \frac{m_2 - m_1 a}{m_1 - a} = b; \\ \frac{m_3 - m_2 a}{m_2 - m_1 a} = b. \end{cases}$$

Приравнивая левые части уравнений, получаем квадратное уравнение для нахождения a:

$$\begin{gathered} (m_2 - m_1 a)^2 = (m_1 - a)(m_3 - m_2 a); \\ (m_2 - m_1^2)a^2 - (m_3 - m_1 m_2)a + (m_1 m_3 - m_2^2) = 0. \end{gathered} \qquad (7)$$

Последовательно исключая из системы (6) p и a, получаем аналогично управление для нахождения b. Таким образом, оценки параметров $\{a, b\}$ являются корнями квадратного уравнения

$$(m_2 - m_1^2)x^2 - (m_3 - m_1 m_2)x + (m_1 m_3 - m_2^2) = 0. \qquad (8)$$

Учитывая обозначения (3), получаем, что оценки $\{\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2\}$ параметров $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ являются корнями квадратного уравнения

$$(m_1 m_3 - m_2^2)x^2 - (m_3 - m_1 m_2)x + (m_2 - m_1^2) = 0. \qquad (9)$$

Оценку параметра p получаем из первого уравнения системы (6):

$$\hat{p} = \frac{\hat{\lambda}_1(m_1\hat{\lambda}_2 - 1)}{\hat{\lambda}_2 - \hat{\lambda}_1}. \qquad (10)$$

Заметим, что оценки по методу моментов параметров гиперэкспоненциального распределения могут быть построены, если существуют и положительны корни квадратного уравнения (8) и оценка $\hat{p}$ в (10) также положительна.

3. Комбинированные оценки параметров для *n* = 2

Построим оценки параметров процесса (1) для $n = 2$, используя метод моментов и метод максимального правдоподобия. Сначала, используя два первых момента, выразим величины λ_1 и λ_2 через параметр p. Далее оценку параметра p найдем по методу максимального правдоподобия.

Уравнения для первых двух моментов имеют вид:

$$\begin{cases} m_1 = \dfrac{p}{\lambda_1} + \dfrac{1-p}{\lambda_2}; \\ m_2 = \dfrac{p}{\lambda_1^2} + \dfrac{1-p}{\lambda_2^2}. \end{cases} \tag{11}$$

Введем обозначения:

$$x = \frac{p}{\lambda_1},\ y = \frac{1-p}{\lambda_2};$$

с их учетом уравнения (11) примут следующий вид:

$$\begin{cases} m_1 = x + y; \\ m_2 = \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{1-p}. \end{cases} \tag{12}$$

Выразив y из первого уравнения и подставив во второе, получим квадратное уравнение для нахождения x:

$$x^2 - 2m_1 px + p\left(m_1^2 - (1-p)m_2\right) = 0. \tag{13}$$

Корни этого уравнения определяются равенствами

$$x_{1,2} = pm_1 \pm \sqrt{p(1-p)}\sqrt{m_2 - m_1^2}. \tag{14}$$

Для существования корней квадратного уравнения (14) необходимо выполнение условия

$$m_2 - m_1^2 \geq 0\,. \tag{15}$$

Выбрав в качестве оценки величины x больший корень, получим

$$\begin{gathered} x = pm_1 + \sqrt{p(1-p)}\sqrt{m_2 - m_1^2}; \\ \hat{\lambda}_1 = \frac{p}{x} = \left(m_1 + \sqrt{\frac{1-p}{p}}\sqrt{m_2 - m_1^2}\right)^{-1}; \\ y = m_1 - x = (1-p)m_1 - \sqrt{p(1-p)}\sqrt{m_2 - m_1^2}; \\ \hat{\lambda}_2 = \frac{1-p}{y} = \left(m_1 - \sqrt{\frac{p}{1-p}}\sqrt{m_2 - m_1^2}\right)^{-1}. \end{gathered} \tag{16}$$

Заметим, что $\hat{\lambda}_1 \leq \hat{\lambda}_2$. Если выбрать в качестве оценки для x меньший из корней (14), получим аналогичные формулы для случая $\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2$.

Оценка $\hat{\lambda}_2$ в (16) является положительной, если вместе с условием (15) выполняется условие

$$m_1 - \sqrt{\frac{p}{1-p}}\sqrt{m_2 - m_1^2} > 0,$$

что возможно, если

$$m_1^2 > \frac{p}{1-p}\left(m_2 - m_1^2\right),$$

откуда следует ограничение на параметр p:

$$p < \frac{m_1^2}{m_2}. \tag{17}$$

Для оценки параметра p используем метод максимального правдоподобия. Запишем логарифм функции правдоподобия:

$$\log L\left(\tau; \lambda_1, \lambda_2, p\right) = \sum_{k=1}^{N} \log\left(p\lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau_k} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau_k}\right). \tag{18}$$

Подставляя вместо параметров λ_1, λ_2 их оценки (16) и вычисляя логарифм функции правдоподобия с приемлемым шагом для $p \in \left(0; m_1^2 / m_2\right)$, получим оценку $\hat{p}$, доставляющую максимум функции (18); эту оценку затем используем в (16).

4. Оценка λ_1 для произвольного числа параметров распределения

Построим теперь оценку минимального параметра интенсивности для гиперэкспоненциального распределения с произвольным числом параметров, определяемого уравнениями (1), (2). Предлагается использовать построенные выше оценки параметров процесса с двумя интенсивностями. При этом оценка λ_1 определяется по формулам (5), (9) для метода моментов и по формулам (5), (16), (18) для комбинированной оценки.

Исследуем асимптотические (при стремлении объема наблюдений N к бесконечности) свойства оценки по методу моментов параметра λ_1. Введем обозначения

$$a_i = \frac{1}{\lambda_i}, \quad a_1 > a_2 > \ldots > a_n > 0. \tag{19}$$

При $N \to \infty$ выборочные моменты сходятся (по усиленному закону больших чисел) с вероятностью единица к соответствующим теоретическим значениям. Приравнивая три первых выборочных начальных момента теоретическим, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} m_1 = \sum_{i=1}^{n} p_i a_i; \\ m_2 = \sum_{i=1}^{n} p_i a_i^2; \\ m_3 = \sum_{i=1}^{n} p_i a_i^3. \end{cases} \tag{20}$$

Найдем коэффициенты уравнения (9):

$$m_2 - m_1^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i a_i^2 \sum_{j=1}^{n} p_j - \left(\sum_{j=1}^{n} p_j a_j \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} p_i p_j \left(a_i^2 - 2a_i a_j + a_j^2\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} p_i p_j \left(a_i - a_j\right)^2;$$

$$m_3 - m_1 m_2 = \sum_{i=1}^{n} p_i a_i^3 \sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \sum_{j=1}^{n} p_j a_j^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} p_i p_j \left(a_i^3 - a_j^2 a_i + a_j^3 - a_i^2 a_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} p_i p_j \left(a_i + a_j\right)\left(a_i - a_j\right)^2;$$

$$m_1 m_3 - m_2^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \sum_{j=1}^{n} p_j a_j^3 - \sum_{i=1}^{n} p_i a_i^2 \sum_{j=1}^{n} p_j a_j^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} p_i p_j \left(-2a_i^2 a_j^2 + a_i^3 a_j + a_i a_j^3\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} p_i p_j a_i a_j \left(a_i - a_j\right)^2.$$

Уравнение (9) принимает следующий вид:

$$\begin{gathered} F(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} p_i p_j \left(a_i - a_j\right)^2 a_i a_j f_{ij}(x) = 0, \\ f_{ij}(x) = x^2 - \left(\lambda_i + \lambda_j\right) x + \lambda_i \lambda_j = \left(x - \lambda_i\right)\left(x - \lambda_j\right). \end{gathered} \tag{21}$$

Заметим, что корнями квадратного уравнения $f_{ij}(x) = 0$ являются величины λ_1 и λ_2. При этом в силу условий $\lambda_1 < \lambda_i$ справедливы неравенства $f_{ij}(\lambda_1) \ge 0,\ f_{ij}'(\lambda_1) \le 0$. Обозначим через X меньший корень уравнения (21). Найдем величину $X - \lambda_1$ смещения оценки $\hat{\lambda}_1$. Используя приближенное равенство

$$0 = F(X) \approx F(\lambda_1) + F'(\lambda_1)\left(X - \lambda_1\right),$$

получаем

$$X - \lambda_1 = -\frac{F(\lambda_1)}{F'(\lambda_1)} = -\frac{\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} p_i p_j \left(a_i - a_j\right)^2 a_i a_j \left(\lambda_1 - \lambda_i\right)\left(\lambda_1 - \lambda_j\right)}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} p_i p_j \left(a_i - a_j\right)^2 a_i a_j \left(\lambda_1 - \lambda_i + \lambda_1 - \lambda_j\right)}.$$

Поскольку величина $X - \lambda_1 > 0$, оценка $\hat{\lambda}_1$ является асимптотически смещенной, причем смещение положительно. Величина смещения будет исследована при моделировании.

5. Результаты численного эксперимента

Для изучения свойств оценок были проведены численные эксперименты, результаты которых для $n = 2$ представлены в табл. 1. Здесь $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ – интенсивности процесса (1), $p = p_1$ – вероятность появления наблюдения с интенсивностью λ_1; через N обозначено число наблюдений. Далее в табл. 1 представлены результаты эксперимента: $\{d_1, d_2, d_p\}$ – среднеквадратические отклонения оценок от истинных значений параметров $\{\lambda_1, \lambda_2, p\}$ соответственно, K – количество реализаций, в которых не удалось построить оценки. Для каждого набора параметров генерировалось 1 000 реализаций процесса. Если условия существования оценок нарушались, соответствующая реализация не учитывалась при построении оценок.

Таблица 1

Результаты численного моделирования для n = 2

Параметры процесса			Число наблюдений	Комбинированные оценки				Оценки по методу моментов			
λ_1	λ_2	p	N	d_1	d_2	d_p	K	d_1	d_2	d_p	K
1	2	0,2	2 000	0,0539	0,2533	0,0416	1	0,0616	0,6970	0,0626	7
1	2	0,5	2 000	0,0185	0,2846	0,0381	0	0,0224	5,8567	0,0544	17
1	2	0,8	2 000	0,0235	1,2016	0,0888	20	0,0292	24,634	0,1111	247
1	4	0,2	2 000	0,0122	0,0447	0,0013	0	0,0247	0,1894	0,0043	0
1	4	0,8	2 000	0,0020	0,7153	0,0038	0	0,0067	69,520	0,0192	190
1	2	0,2	3 000	0,0367	0,0862	0,0263	0	0,0433	0,1539	0,0382	1
1	2	0,8	3 000	0,0147	1,6827	0,0627	7	0,0170	11,971	0,0780	199
1	3	0,2	3 000	0,0116	0,0260	0,0024	0	0,0203	0,0682	0,0054	0
1	3	0,5	3 000	0,0045	0,0852	0,0044	0	0,0091	0,6619	0,0121	0
1	3	0,8	3 000	0,0030	0,5943	0,0093	0	0,0080	31,696	0,0283	122
1	4	0,2	3 000	0,0076	0,0275	0,0009	0	0,0163	0,1221	0,0029	0
1	4	0,5	3 000	0,0029	0,0963	0,0017	0	0,0072	1,3881	0,0072	0
1	4	0,8	3 000	0,0014	0,5237	0,0023	0	0,0046	61,647	0,0142	124
1	2	0,2	5 000	0,0235	0,0343	0,0166	0	0,0286	0,0627	0,0244	0
1	2	0,5	5 000	0,0078	0,0809	0,0187	0	0,0105	0,7009	0,0273	0
1	2	0,8	5 000	0,0076	0,8881	0,0403	1	0,0108	8,3468	0,0581	133
1	3	0,2	5 000	0,0072	0,0145	0,0014	0	0,0132	0,0401	0,0034	0
1	3	0,5	5 000	0,0025	0,0490	0,0024	0	0,0057	0,2868	0,0077	0
1	3	0,8	5 000	0,0015	0,3540	0,0043	0	0,0036	31,621	0,0146	60
1	4	0,2	5 000	0,0044	0,0179	0,0005	0	0,0091	0,7935	0,0018	0
1	4	0,5	5 000	0,0017	0,0553	0,0010	0	0,0042	0,6718	0,0017	0
1	4	0,8	5 000	0,0009	0,3698	0,0014	0	0,0025	39,019	0,0077	74

Анализ результатов показывает, что оценки по методу моментов параметра λ_2 имеют значительное отклонение от истинного значения при величине p = 0,8. При этом количество реализаций, в которых невозможно оценить параметры по методу моментов, достигает 24%. Вычисление оценок также не проводилось, если коэффициент при x^2 в уравнении (9) оказывался по модулю меньше 0,001, поскольку это приводит к большим отклонениям оценки λ_2 от истинного значения. Оценки параметра λ_1 оказываются более устойчивыми.

Комбинированная оценка не настолько сильно зависит от значения вероятности p; число реализаций, в которых не удается построить оценки, не превышает 2%. Следует отметить, что несмотря на использование метода максимального правдоподобия, оценка свободна от недостатков ЕМ-метода, поскольку метод максимального правдоподобия используется только для оценивания вероятности p, которая принадлежит ограниченному интервалу. Максимум функции правдоподобия нетрудно найти, вычисляя значение функции на этом интервале с желаемым шагом. При этом использования итерационных методов не требуется.

Во всех случаях точность оценки параметра λ_1 оказалась выше, чем точность оценки параметра λ_2 как для комбинированных оценок, так и для метода моментов. При этом комбинированные оценки оказываются предпочтительнее оценок по методу моментов в смысле среднего квадрата отклонения от истинных значений.

В табл. 2 представлены результаты моделирования оценки минимального параметра интенсивности λ_1 для $n = 4$, параметры интенсивностей выбирались равными {1, 3, 5, 8}; в табл. 3 представлены результаты моделирования для $n = 6$, параметры интенсивностей выбирались равными {1, 3, 5, 8, 15, 20}. Таблицы 2, 3 содержат число наблюдений в реализации и Δ – теоретическое смещение оценки. Для каждой оценки представлены d – среднеквадратическое отклонение оценки от истинного значения параметра, Δ_1 – выборочное смещение оценки. Для каждого набора параметров генерировалось 1 000 реализаций процесса.

Таблица 2

Результаты численного моделирования для $n = 4$

Параметры процесса				Число наблюдений	Смещение	Комбинированные оценки		Оценки по методу моментов	
p_1	p_2	p_3	p_4	N	Δ	d	Δ_1	d	Δ_1
0,2	0,3	0,2	0,3	2 000	0,0383	0,0244	0,1144	0,0276	0,0789
0,2	0,3	0,2	0,3	3 000	0,0383	0,0185	0,1063	0,0187	0,0573
0,2	0,3	0,2	0,3	5 000	0,0383	0,0153	0,1045	0,0119	0,0541
0,4	0,3	0,2	0,1	2 000	0,0135	0,0072	0,0398	0,0135	0,0251
0,4	0,3	0,2	0,1	3 000	0,0135	0,0053	0,0403	0,0094	0,0275
0,4	0,3	0,2	0,1	5 000	0,0135	0,0036	0,0380	0,0055	0,0200

Таблица 3

Результаты численного моделирования для $n = 6$

Параметры процесса						Число наблюдений	Смещение	Комбинированные оценки		Оценки по методу моментов	
p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	N	Δ	d	Δ_1	d	Δ_1
0,2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,2	2000	0,0350	0,0265	0,1333	0,0217	0,0615
0,2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,2	3000	0,0350	0,0223	0,1310	0,0140	0,0532
0,2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,2	5000	0,0350	0,0201	0,1285	0,0104	0,0477
0,4	0,1	0,2	0,1	0,1	0,1	2000	0,0146	0,0074	0,0592	0,0101	0,0273
0,4	0,1	0,2	0,1	0,1	0,1	3000	0,0146	0,0061	0,0583	0,0071	0,0268
0,4	0,1	0,2	0,1	0,1	0,1	5000	0,0146	0,0046	0,0550	0,0042	0,0196

Анализ результатов показывает, что комбинированные оценки характеризуются меньшим среднеквадратичным отклонением, чем оценки по методу моментов; однако их смещение больше. В целом результаты показывают хорошее качество оценивания для каждого метода. Для всех реализаций процесса удалось построить оценки.

Заключение

В работе получены явные формулы для оценок по методу моментов параметров гиперэкспоненциального распределения с двумя значениями интенсивности. Предложена комбинированная оценка параметров такого распределения, использующая только два первых выборочных момента в сочетании с методом максимального правдоподобия. Установлена возможность оценивания минимального параметра интенсивности для произвольного гиперэкспоненциального распределения. Результаты моделирования показывают, что при оценивании параметров распределения с двумя значениями интенсивности оценки по методу моментов являются неустойчивыми и во многих случаях не могут быть построены. Комбинированные оценки оказываются более предпочтительными. При оценивании минимального параметра интенсивности качество комбинированных оценок и оценок по методу моментов оказывается близким.

Список источников

1. Chen J., Gupta A.K. Parametric statistical change point analysis with applications to genetics, medicine, and finance. 2nd ed. Springer Science + Business Media, LLC. 2012.
2. Dempster A.P., Laird N.M., Rubin D.B. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm // Journal of the Royal Statistical Society. Series B. 1977. V. 39 (1). P. 1–38.
3. Baum L.E., Petrie T., Soules G., Weiss N. A maximization technique occurring in the statistical analysis of probabilistic function of Markov chains // Annals of Mathematical Statistics. 1970. V. 41 (1). P. 164–171.
4. Elliott R.J., Malcolm W.P. Discrete time expectation maximization algorithms for markov modulated poisson processes // IEEE Transactions on Automatic Control. 2002. V. 53. P. 247–256.
5. Breuer L., Kume A. An EM algorithm for markovian arrival processes observed at discrete times // Measurement, Modelling, and Evaluation of Computing Systems and Dependability and Fault Tolerance. MMB&DFT / B. Müller-Clostermann, K. Echtle, E.P. Rathgeb (eds.). Berlin ; Heidelberg : Springer, 2010. P. 242–258. (Lecture Notes in Computer Science, v. 5987). doi: 10.1007/978-3-642-12104-3_19
6. Horváth G., Okamura H. A fast EM algorithm for fitting marked markovian arrival processes with a new special structure // Computer Performance Engineering. EPEW 2013 / M.S. Balsamo, W.J. Knottenbelt, A. Marin (eds.). Berlin ; Heidelberg : Springer, 2013. P. 119–133. (Lecture Notes in Computer Science; v. 8168). doi: 10.1007/978-3-642-40725-3_10
7. Bražėnas M., Horváth G., Telek M. Efficient implementations of the EM-Algorithm for transient markovian arrival processes // Analytical and Stochastic Modelling Techniques and Applications. ASMTA / S. Wittevrongel, T. Phung-Duc (eds.). Cham : Springer, 2016. P. 107–122. (Lecture Notes in Computer Science; v. 9845). doi: 10.1007/978-3-319-43904-4_8
8. Королев В.Ю. ЕМ-алгоритм, его модификации и их применение к задаче разделения смесей вероятностных распределений : теоретический обзор. М. : Изд-во ИПИ РАН, 2007.
9. Королев В.Ю., Назаров А.Л. Разделение смесей вероятностных распределений при помощи сеточных методов моментов и максимального правдоподобия // Автоматика и телемеханика. 2010. № 3. С. 98–116.
10. Feldmann A., Whitt W. Fitting mixtures of exponentials to long-tail distributions to analyze network performance models // Performance Evaluation. 1998. V. 31. P. 245–279.
11. Petcharat K., Areepong Yu., Sukparungsee S., Mititelu G. Fitting Pareto Distribution with Hyperexponential to Evaluate the ARL for CUSUM Chart // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2012. V. 77 (2). P. 233–244.
12. Singh L.N., Dattatreya G.R. Estimation of the Hyperexponential Density with Applications in Sensor Networks // International Journal of Distributed Sensor Networks. 2002. V. 3. P. 311–330.
13. Guillou A., Loisel S., Stupfler G. Estimating the parameters of a seasonal Markov-modulated Poisson process // Statistical Methodology. Elsevier, 2015. V. 26. P. 103–123.
14. Gunsta M., Knapika B., Mandjesb M., Solliea B. Parameter estimation for a discretely observed population process under Markov-modulation // Computational Statistics & Data Analysis. 2019. V. 140. P. 88–103. doi: 10.1016/j.csda.2019.06.008

References

1. Chen, J. & Gupta, A.K. (2012) *Parametric Statistical Change Point Analysis With Applications to Genetics, Medicine, and Finance.* 2nd ed. Springer Science+Business Media, LLC.
2. Dempster, A.P., Laird, N.M. & Rubin, D.B. (1977) Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B.* 39(1). pp. 1–38.
3. Baum, L. E., Petrie, T., Soules, G. & Weiss, N. (1970) A maximization technique occurring in the statistical analysis of probabilistic function of Markov chains. *Annals of Mathematical Statistics*. 41(1). pp. 164–171.
4. Elliott, R.J. & Malcolm, W.P. (2008) Discrete Time Expectation Maximization Algorithms for Markov Modulated Poisson Processes. *IEEE Transactions on Automatic Control.* 53. pp. 247–256.

5. Breuer, L. & Kume, A. (2010) An EM Algorithm for Markovian Arrival Processes Observed at Discrete Times. In: Müller-Clostermann, B., Echtle, K. & Rathgeb, E.P. (eds) *Measurement, Modelling, and Evaluation of Computing Systems and Dependability and Fault Tolerance*. *MMB&DFT*. Berlin; Heidelberg: Springer. pp. 242–258. DOI: 10.1007/978-3-642-12104-3_19
6. Horváth, G. & Okamura, H. (2013) A Fast EM Algorithm for Fitting Marked Markovian Arrival Processes with a New Special Structure. In: Balsamo, M.S., Knottenbelt, W.J. & Marin, A. (eds) *Computer Performance Engineering. EPEW 2013*. Berlin; Heidelberg: Springer. pp. 119–133. DOI: 10.1007/978-3-642-40725-3_10
7. Bražėnas, M., Horváth, G. & Telek, M. (2016) Efficient Implementations of the EM-Algorithm for Transient Markovian Arrival Processes. In: Wittevrongel, S. & Phung-Duc, T. (eds) *Analytical and Stochastic Modelling Techniques and Applications. ASMTA*. vol 9845. Springer, Cham. pp. 107–122. DOI: 10.1007/978-3-319-43904-4_8
8. Korolev, V.Yu. (2007) *EM-algoritm, ego modifikatsii i ikh primenenie k zadache razdeleniya smesey veroyatnostnykh raspredeleniy: teoreticheskiy obzor* [EM-algorithm, its modifications and their application to the problem of separation of mixtures of probability distributions. Theoretical review]. Moscow: IPI RAS.
9. Korolev, V.Yu. & Nazarov, A.L. (2010) Razdelenie smesey veroyatnostnykh raspredeleniy pri pomoshchi setochnykh metodov mo-mentov i maksimal'nogo pravdopodobiya [Separation of mixtures of probability distributions using grid methods of moments and maximum likelihood]. *Avtomatika i telemekhanika*. 3. pp. 98–116.
10. Feldmann, A. & Whitt, W. (1998) Fitting mixtures of exponentials to long-tail distributions to analyze network performance models. *Performance Evaluation*. 31. pp. 245–279.
11. Petcharat, K., Areepong, Yu., Sukparungsee, S. & Mititelu, G. (2012) Fitting Pareto Distribution with Hyperexponential to Evaluate the ARL for CUSUM Chart. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 77(2). pp. 233–244
12. Singh, L.N. & Dattatreya, G.R. (2002). Estimation of the Hyperexponential Density with Applications in Sensor Networks. *International Journal of Distributed Sensor Networks*. 3. pp. 311–330.
13. Guillou, A., Loisel, S. & Stupfler, G. (2015). Estimating the parameters of a seasonal Markov-modulated Poisson process. *Statistical Methodology*. 26. pp. 103–123.
14. Gunsta, M., Knapika, B., Mandjesb, M. & Solliea, B. (2019) Parameter estimation for a discretely observed population process under Markov-modulation. *Computational Statistics & Data Analysis*. 140. pp. 88–103. DOI: 10.1016/j.csda.2019.06.008

Информация об авторах:
Буркатовская Юлия Борисовна – доцент, кандидат физико-математических наук, доцент отделения информационных технологий инженерной школы информационных технологий и робототехники Национального исследовательского Томского политехнический университета (Томск, Россия); доцент кафедры системного анализа и математического моделирования Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: tracey@tpu.ru
Воробейчиков Сергей Эрикович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры системного анализа и математического моделирования Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: sev@mail.tsu.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:
Burkatovskaya Yulia B. (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russian Federation; National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tracey@tpu.ru
Vorobeychikov Sergey E. (Doctor Physical and Mathematical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: sev@mail.tsu.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 10.11.2024; принята к публикации 03.03.2025

Received 10.11.2024; accepted for publication 03.03.2025