

Научная статья

УДК 519.2

doi: 10.17223/19988605/70/6

Статистические свойства оценок метода измерения ценовой чувствительности PSM с учетом S^a -симметрии**Жанна Николаевна Зенкова¹, Анна Андреевна Андриевская², Никита Иванович Яковлев³**^{1,2} *Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия*³ *Tele2/Altel, Алматы, Казахстан*¹ *zhanna.zenkova@mail.tsu.ru*² *anna.andriev@mail.tsu.ru*³ *nyakovlev19@gmail.com*

Аннотация. Предлагается модификация метода PSM с использованием дополнительной информации об S^a -симметрии кривых ценовой чувствительности. Показаны несмещенность, состоятельность, асимптотическая нормальность новых оценок; доказано, что асимптотические дисперсии модифицированных оценок меньше, чем обычных, что говорит об улучшении точности метода при достаточно большом числе опрошенных. Получены доверительные интервалы для цен с учетом S^a -симметрии.

Ключевые слова: метод измерения ценовой чувствительности PSM – Price Sensitivity Meter; дополнительная информация; симметрия; асимптотическая нормальность; доверительный интервал.

Для цитирования: Зенкова Ж.Н., Андриевская А.А., Яковлев Н.И. Статистические свойства оценок метода измерения ценовой чувствительности PSM с учетом S^a -симметрии // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2025. № 70. С. 62–72. doi: 10.17223/19988605/70/6

Original article

doi: 10.17223/19988605/70/6

Statistical properties of PSM – price sensitivity meter technique with S^a -symmetry**Zhanna N. Zenkova¹, Anna A. Andrievskaya², Nikita I. Yakovlev³**^{1,2} *National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*³ *Tele2/Altel, Almaty, Kazakhstan*¹ *zhanna.zenkova@mail.tsu.ru*² *anna.andriev@mail.tsu.ru*³ *nyakovlev19@gmail.com*

Abstract. In the paper we modified Price Sensitivity Meter (PSM) technique using additional information on S^a -symmetry of price sensitivity curves. New price estimates are unbiased, consistent, asymptotically normal, their variances are smaller than those of the usual ones, so new estimators are more accurate. Confidence intervals for prices are obtained taking into account S^a -symmetry.

Keywords: Price Sensitivity Meter (PSM) technique; additional information; symmetry; asymptotic normality; confident interval.

For citation: Zenkova, Z.N., Andrievskaya, A.A., Yakovlev, N.I. (2025) Statistical properties of PSM – price sensitivity meter technique with S^a -symmetry. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 70. pp. 62–72. doi: 10.17223/19988605/70/6

Введение

Проблема установления цены на товар или услугу является фундаментальной для любого предприятия [1, 2]. Цена должна не только компенсировать понесенные предприятием затраты на производство, но и обеспечивать прибыль, она непосредственно определяет уровень спроса на товар, т.е., прежде всего, влияет на процесс принятия решения о совершении покупки [3, 4]. Именно поэтому важно, чтобы цена казалась целевому потребителю справедливой и учитывала его предпочтения [5]. В этом случае наиболее эффективными являются методы ценообразования, ориентированные на спрос. Такие методы помогают вычислить диапазоны цен, которые помогут не только найти приемлемую для целевого потребителя цену товара, но и учитывать стратегические цели фирмы [6]. Они используются для ценообразования на товары-новинки [7–9], о спросе на которые нет вообще никакой информации (например, о наблюдавшихся ранее объемах спроса при разных ценах, о реакции потребителей на маркетинговые акции, связанные с изменениями цен, и пр.). Эти методы также позволяют определить, как эффективно провести ценовую дискриминацию, и найти, по каким ценам продавать функционально один и тот же товар представителям разных целевых аудиторий. Например, стиральный порошок по составу и себестоимости может быть практически одинаков, но, будучи по-разному упакован и назван, может быть продан по разным ценам покупателям с разным уровнем дохода [10]. Именно эти разные цены помогут найти методы измерения ценовой чувствительности.

К методам ценообразования, ориентированным на спрос, относятся такие методы, как метод Штоцеля [11], метод ван Вестендорпа и метод определения ценовой чувствительности PSM (Price Sencitivity Metter) [12], метод RBR – Randomized Buying Response – ответы на вопросы о покупке по рандомизированным ценам [13], модифицированный метод ван Вестендорпа – PSM для интервально цензурированных данных [14–15]. Все эти методы основаны на опросах представителей целевой аудитории, которые могут адекватно оценить ценность определенного товара.

Так как значимость данных методов ценообразования весьма важна для осуществления качественной маркетинговой деятельности, подходы к оцениванию, а также вопросы измерения и повышения точности оценок очень актуальны. В работах Стана Липовецкого [16–18] рассматривались вопросы измерения ценовой чувствительности, в [16] были использованы системы линейных дифференциальных уравнений Чепмена–Колмогорова, которые позволили представить кривые ценовой чувствительности метода PSM как логистические функции распределения и свести задачу к оцениванию их коэффициентов с помощью регрессионных моделей. В [19] данный подход применялся для поиска ценовых значений в методе Штоцеля, точность оценивания метода Штоцеля исследовалась в [8] с помощью имитационного моделирования. В [20] анализировались статистические свойства оценок метода PSM, показаны их несмещенность, состоятельность и асимптотическая нормальность, выведена формула для асимптотических дисперсий оценок, которая позволяет судить об их точности, найдены приближенные доверительные интервалы для цен. В [21] показано, что малое число участников исследования по методу PSM негативно влияет на точность при наличии цензурирования, особенно на оценку минимально возможной цены.

В ряде работ были предприняты успешные попытки повысить точность оценивания методов за счет дополнительной информации. В [22] показано существенное влияние симметрии на повышение точности оценивания метода PSM для случая линейной зависимости кривых ценовой чувствительности; в [23, 24] привлекалась информация о знании квантилей кривых ценовой чувствительности, показано, что максимальный выигрыш дает учет медиан.

В настоящей работе рассматривалось влияние дополнительной информации об S^a -симметрии кривых ценовой чувствительности [25, 26]. На основе результатов [20] показано, что модифицированный метод дает оценки, которые являются несмещенными, состоятельными и асимптотически нормальными. Аналитически доказано, что асимптотические дисперсии новых оценок меньше, чем асимптотические дисперсии оценок, полученных стандартным методом PSM, т.е. привлечение дополнительной информации привело к увеличению точности метода. С помощью имитационного моделирования были подтверждены выводы о точности методов, показано, что сходимость к нормаль-

ному распределению наблюдается для случаев, когда число опрошенных составляет от 30 человек, при этом выигрыш в точности имеет место и для существенно меньших объемов выборок. Асимптотическая нормальность позволила найти приближенные доверительные интервалы для ценовых значений модифицированного с учетом S^a -симметрии метода PSM.

1. Метод измерения ценовой чувствительности Price Sensitivity Meter (PSM)

Для проведения исследования N целевым потребителям предварительно предлагают воспользоваться рассматриваемым товаром в течение некоторого времени, что дает им возможность объективно оценить товар и его значимость. Затем всем участникам независимо друг от друга задаются четыре вопроса [12]:

1. Ниже какого уровня цены x_1 начинают возникать подозрения о том, что товар некачественный или поддельный?
2. Какая цена x_2 является приемлемой для покупки?
3. Какая цена x_3 кажется высокой, однако вопрос о покупке еще рассматривается?
4. Начиная с какого значения цены x_4 товар кажется настолько дорогим, что вопрос о покупке даже не ставится?

В [20] исследуемые уровни цен рассматривались как случайные величины (с.в.) X_j $j = \overline{1, 4}$, с соответствующими функциями распределения (ф.р.) $F_j(x)$; результаты опроса – это четырехмерная выборка $(X_{k1}, X_{k2}, X_{k3}, X_{k4})$, $k = \overline{1, N}$. Особенности организации эксперимента обуславливают независимость выборочных элементов между собой.

Согласно методике PSM по выборочному вектору $\{X_{1j}, X_{2j}, \dots, X_{Nj}\}$ с.в. X_j $j = \overline{1, 4}$, строится эмпирическая функция распределения (э.ф.р.) $\hat{F}_j(x)$ согласно формуле [26]

$$\hat{F}_j(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N I(X_{kj} < x), \quad (1)$$

где $I(\cdot)$ – индикаторная функция. Для $i = 1, 3$ строится эмпирическая оценка функции выживания (э.ф.в.)

$$\hat{S}_i(x) = 1 - \hat{F}_i(x), \quad (2)$$

Функции (1) и (2) в классическом варианте метода PSM сглаживаются, их называют *кривыми ценовой чувствительности*. Цены определяются как абсциссы пересечения этих кривых:

- 1) $\hat{F}_2(x)$ и $\hat{S}_1(x)$ – минимально возможная цена $\hat{x}^{(21)} = \hat{x}_{\min}$, ниже которой цену продажи назначать не рекомендуется, так как мы потеряем большое количество потребителей, поскольку слишком низкая цена вызывает сомнения в качестве товара;
- 2) $\hat{F}_4(x)$ и $\hat{S}_1(x)$ – «оптимальная цена» $\hat{x}^{(41)} = \hat{x}_{\text{опт}}$, рекомендована в случае, если стратегия фирмы – увеличение объема продаж (захват большей доли рынка);
- 3) $\hat{F}_2(x)$ и $\hat{S}_3(x)$ – «ожидаемая цена», или «точка безразличия», $\hat{x}^{(23)} = \hat{x}_{\text{безр}}$;
- 4) $\hat{F}_4(x)$ и $\hat{S}_3(x)$ – максимально возможная цена $\hat{x}^{(43)} = \hat{x}_{\max}$, выше которой цену назначать не рекомендуется, так как большинство целевой аудитории не может себе позволить этот товар из-за чрезмерной дороговизны.

В [20] цены рассчитывались как пересечения не сглаженных, а ступенчатых э.ф.р. и э.ф.в. и определялись формулами

$$\hat{x}^{(ij)} = \begin{cases} \max \{x : \hat{F}_j(x) = \hat{S}_i(x)\} \\ x : \hat{S}_i(x+0) \leq \hat{F}_j(x) < \hat{S}_i(x). \end{cases}$$

При этом для $i = 1, 3$ и $j = 2, 4$ истинное значение $x^{(ij)}$ – это абсцисса точки пересечения непрерывных теоретических кривых $F_i(x)$ и $S_j(x)$, которая в общем виде может быть получена из уравнения

$$F_j(x) = 1 - F_i(x) \quad (3)$$

что позволяет определять цены как медианы

$$\hat{x}_{0,5}^{(ij)} = \hat{G}_{ij}^{-1}(0,5) = \sup \{x : \hat{G}_{ij}(x) \leq 0,5\}$$

эмпирической оценки функции распределения

$$G_{ij}(x) = (F_i(x) + F_j(x)) / 2. \quad (4)$$

В итоге, для $i = 1, 3$ и $j = 2, 4$ в качестве оценки $x^{(ij)}$ берется $(N + 1)$ -я порядковая статистика $X_{(N+1)}^{(ij)}$ в объединенной выборке объема $2N$, составленной из выборок $\{X_{ki}\}$ и $\{X_{kj}\}$, $k = \overline{1, N}$, т.е. $\hat{x}_{0,5}^{(ij)} = X_{(N+1)}^{(ij)}$. В [20] показаны асимптотическая нормальность и состоятельность оценок $\hat{x}_{0,5}^{(ij)}$. При этом

$$L\left(\sqrt{N}\left(\hat{x}_{0,5}^{(ij)} - x_{0,5}^{(ij)}\right)\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} N\left(0; v_{ij}^2\right).$$

где

$$v_{ij}^2 = F_{ij}\left(x_{0,5}^{(ij)}, x_{0,5}^{(ij)}\right) / \left(2g_{ij}^2\left(x_{0,5}^{(ij)}\right)\right), \quad (5)$$

$F_{ij}(y, z)$ – совместная ф.р. с.в. X_i и X_j , $g_{ij}(x) = (f_i(x) + f_j(x)) / 2$ – плотность ф.р. $G_{ij}(x)$, при этом для $m = \overline{1, 4}$ существуют $f_m(x)$ – плотности ф.р. $F_m(x)$ и $g_m(x_{0,5}^{(ij)}) \neq 0$.

2. Учет S^a -симметрии в методе PSM

Рассмотрим случай, когда для $k = \overline{1, 4}$ непрерывные ф.р. $F_k(x)$ обладают свойством S^a -симметрии [25, 26]:

$$F_k(x) = 1 - F_k(S_k(x)), \quad (6)$$

где для $k = \overline{1, 4}$ $S_k(x)$ – непрерывные, монотонно убывающие функции, такие, что $S_k(\alpha_k) = \alpha_k$, $(S_k)^{-1}(x) = S_k(x)$, где $(S_k)^{-1}(x)$ – обратная к $S_k(x)$ функция, $F_k(\alpha_k) = 0,5$. При $S_k(x) = 2\alpha_k - x$ будем иметь обычную симметрию относительно центров α_k .

Для $k = \overline{1, 4}$ оценка ф.р. $F_k(x)$ с учетом свойства (6) строится по следующей формуле [25, 26]:

$$\hat{F}_k^S(x) = \frac{\hat{F}_k(x) + 1 - \hat{F}_k(S_k(x))}{2}. \quad (7)$$

Подставив оценки (7) в (4), получим

$$\hat{G}_{ij}^S(x) = \frac{\hat{F}_i(x) + \hat{F}_j(x) + 2 - \hat{F}_i(S_i(x)) - \hat{F}_j(S_j(x))}{4}, \quad (8)$$

следовательно, для $i = 1, 3$ и $j = 2, 4$ в качестве оценки $x^{(ij)}$ с учётом S^a -симметрии можно взять медиану $G_{ij}^S(x)$, т.е. $(2N + 1)$ -ю порядковую статистику $X_{(2N+1)}^{S(ij)}$ в объединенной выборке объема $4N$, составленной из выборок $\{X_{ki}\}$, $\{X_{kj}\}$ и симметризованных выборок $\{S_i(X_{ki})\}$ и $\{S_j(X_{kj})\}$, $k = \overline{1, N}$, т.е. $\hat{x}_{0,5}^{S(ij)} = X_{(2N+1)}^{S(ij)}$.

Как и $\hat{x}_{0,5}^{(ij)}$, оценки $\hat{x}_{0,5}^{S(ij)}$ являются несмещенными, состоятельными и асимптотически нормальными, при этом

$$L\left(\sqrt{N}\left(\hat{x}_{0,5}^{S(ij)} - x_{0,5}^{S(ij)}\right)\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} N\left(0; v_{ij}^{S^2}\right), \quad (9)$$

где

$$v_{ij}^{s2} = \frac{2 \left\{ 1 - F_i(\min\{t, S_i(t)\}) - F_j(\min\{t, S_j(t)\}) + F_{ij}(t, t) + F_{ij}(S_i(t), S_j(t)) - F_{ij}(t, S_j(t)) - F_{ij}(S_i(t), t) \right\}}{\left(f_i(t) + f_j(t) - f_i(S_i(t)) \cdot (S_i)'(t) - f_j(S_i(t)) \cdot (S_j)'(t) \right)^2}. \quad (10)$$

Покажем это. Рассмотрим $\text{Var } \hat{G}_{ij}^s(x) = \sigma_{ij}^2(x) / N$. Используя свойство (6), получим

$$\sigma_{ij}^2(x) = \frac{1}{16} \left(\text{Var } \hat{F}_i(x) + \text{Var } \hat{F}_j(x) + 2 \text{cov} \{ \hat{F}_i(x), \hat{F}_j(x) \} - 2 \text{cov} \{ \hat{F}_i(x), \hat{F}_i(S_i(x)) \} - 2 \text{cov} \{ \hat{F}_j(x), \hat{F}_j(S_j(x)) \} + \right. \\ \left. + \text{Var } \hat{F}_i(S_i(x)) + \text{Var } \hat{F}_j(S_j(x)) - 2 \text{cov} \{ \hat{F}_i(x), \hat{F}_j(S_j(x)) \} - 2 \text{cov} \{ \hat{F}_j(x), \hat{F}_i(S_i(x)) \} + 2 \text{cov} \{ \hat{F}_i(S_i(x)), \hat{F}_j(S_j(x)) \} \right).$$

Так как для $k = \overline{1, 4}$

$$\text{cov} \{ \hat{F}_k(x), \hat{F}_k(S_k(x)) \} = E \{ \hat{F}_k(x) \hat{F}_k(S_k(x)) \} - F(x)F(S_k(x)),$$

рассмотрим

$$E \{ \hat{F}_k(x) \hat{F}_k(S_k(x)) \} = E \left\{ \frac{1}{N^2} \sum_{s=1}^N \sum_{l=1}^N I(X_{sk} < x) \cdot I(X_{lk} < S_k(x)) \right\} = \\ = \frac{1}{N^2} \sum_{s \neq l}^N E \{ C(X_{sk} < x) \cdot C(X_{lk} < S_k(x)) \} + \frac{1}{N^2} \sum_{s=1}^N E \{ I(X_{sk} < x) \cdot I(X_{sk} < S_k(x)) \} = \\ = \left(1 - \frac{1}{N} \right) F_k(x)F_k(S_k(x)) + \frac{F_k(\min(x, S_k(x)))}{N}.$$

Откуда следует, что для $k = \overline{1, 4}$

$$\text{cov} \{ \hat{F}_k(x), \hat{F}_k(S_k(x)) \} = \frac{1}{N} (F_k(\min(x, S_k(x))) - F_k(x)F_k(S_k(x))).$$

Аналогично для $i = 1, 3$ и $j = 2, 4$ получим

$$\text{cov} \{ \hat{F}_i(x), \hat{F}_j(S_j(x)) \} = \frac{1}{N} (F_{ij}(x, S_j(x)) - F_i(x)F_j(S_j(x))).$$

Таким образом,

$$\text{Var } \hat{G}_{ij}^s(x) = \frac{1}{16N} \left(F_i(x)(1 - F_i(x)) + F_j(x)(1 - F_j(x)) + 2F_{ij}(x, x) - 2F_i(x)F_j(x) - 2F_i(\min(x, S_i(x))) + \right. \\ \left. + 2F_i(x)F_i(S_i(x)) - 2F_j(\min(x, S_j(x))) + 2F_j(x)F_j(S_j(x)) - 2F_{ij}(x, S_j(x)) + 2F_i(x)F_j(S_j(x)) + \right. \\ \left. + F_i(S_i(x))(1 - F_i(S_i(x))) + F_j(S_j(x))(1 - F_j(S_j(x))) - 2F_{ij}(S_i(x), x) + 2F_i(S_i(x))F_j(x) + \right. \\ \left. + 2F_{ij}(S_i(x), S_j(x)) - 2F_i(S_i(x))F_j(S_j(x)) \right).$$

С учетом свойства (6) получим

$$\text{Var } \hat{G}_{ij}^s(x) = \frac{1}{8N} \left(2F_i(x)(1 - F_i(x)) + 2F_j(x)(1 - F_j(x)) + F_{ij}(x, x) - F_i(\min(x, S_i(x))) - F_j(\min(x, S_j(x))) \right. \\ \left. + 2F_i(x) + 2F_j(x) - 1 - 4F_i(x)F_j(x) - F_{ij}(S_i(x), x) - F_{ij}(x, S_j(x)) + F_{ij}(S_i(x), S_j(x)) \right).$$

Таким образом,

$$\text{Var } \hat{G}_{ij}^s(x) = \frac{1}{8N} \left(2F_i(x)(1 - F_i(x)) + 2F_j(x)(1 - F_j(x)) - (1 - 2F_i(x))(1 - 2F_j(x)) - F_i(\min(x, S_i(x))) - \right. \\ \left. - F_j(\min(x, S_j(x))) + F_{ij}(x, x) - F_{ij}(x, S_j(x)) - F_{ij}(S_i(x), x) + F_{ij}(S_i(x), S_j(x)) \right).$$

Обозначим истинное значение цены $x^{(ij)}$ как t . Тогда, согласно [20], асимптотическая дисперсия с.в. $\sqrt{N} \hat{x}_{0.5}^{s(ij)}$ определяется как

$$v_{ij}^{s2} = \frac{\sigma_{ij}^{s2}(t)}{\left((G_{ij}^s)'(t) \right)^2},$$

тогда

$$\left(G_{ij}^s(t)\right)' = \frac{1}{16} \left(f_i(t) + f_j(t) - f_i(S_i(t)) \cdot (S_i)'(t) - f_j(S_j(t)) \cdot (S_j)'(t) \right)^2,$$

Так как в точке t кривые ценовой чувствительности пересекаются, т.е., $F_i(t) = 1 - F_j(t)$, будем иметь следующее:

$$\text{Var } \hat{G}_{ij}^s(t) = \frac{1}{8N} (1 - F_i(\min(t, S_i(t))) - F_j(\min(t, S_j(t))) + F_{ij}(t, t) - F_{ij}(S_i(t), t) - F_{ij}(t, S_j(t)) + F_{ij}(S_i(t), S_j(t))).$$

В итоге

$$v_{ij}^{s2} = \frac{2 \left\{ 1 - F_i(\min\{t, S_i(t)\}) - F_j(\min\{t, S_j(t)\}) + F_{ij}(t, t) - F_{ij}(t, S_j(t)) - F_{ij}(S_i(t), t) + F_{ij}(S_i(t), S_j(t)) \right\}}{\left(f_i(t) + f_j(t) - f_i(S_i(t)) \cdot (S_i)'(t) - f_j(S_j(t)) \cdot (S_j)'(t) \right)^2}. \quad (11)$$

Сравним полученное значение с v_{ij}^2 – асимптотической дисперсией немодифицированной оценки с.в. $\sqrt{N} \hat{x}_{0.5}^{(ij)}$. Так как для всех $k = \overline{1, 4}$ функции $S_k(x)$ по определению убывают, то их производные отрицательные, следовательно, знаменатель v_{ij}^s заведомо больше, чем у v_{ij}^{s2} . Осталось сравнить числители оценок. Учитывая (3), т.е. что $F_i(t) + F_j(t) = 1$, получим, что для числителя v_{ij}^{s2} верно следующее:

$$1 - F_i(\max\{t, S_i(t)\}) - F_j(\max\{t, S_j(t)\}) = F_i(t) - F_i(\max\{t, S_i(t)\}) + F_j(t) - F_j(\max\{t, S_j(t)\}) \leq 0.$$

Далее рассмотрим $P(t) = F_{ij}(S_i(t), S_j(t)) - F_{ij}(t, S_j(t)) - F_{ij}(S_i(t), t)$. Здесь возможны следующие варианты:

- 1) если для $k = i$ или j $S_k(t) \leq \alpha_k \leq t$, то очевидно, что $P(t) \leq 0$, так как всегда верно одно из двух:

$$F_{ij}(S_i(t), S_j(t)) \leq F_{ij}(t, S_j(t)) \text{ или } F_{ij}(S_i(t), S_j(t)) \leq F_{ij}(S_i(t), t);$$

- 2) если для $k = i$ и j $t \leq \alpha_k \leq S_k(t)$, то воспользуемся особенностями рассматриваемого метода ценообразования, для которого одно из значений цены всегда больше другого, например, $X_i < X_j$. Тогда искомая цена – медиана объединенных симметризованных и исходных выборок, а истинное значение цены $t = x^{(ij)}$ всегда находится между медианами, т.е. $\alpha_i \leq t \leq \alpha_j$. Следовательно, случай $t \leq \alpha_k \leq S_k(t)$ в принципе невозможен, его вероятность нулевая. Более того, в данной модели возможна реализация только такого случая, когда $S_i(t) \leq \alpha_i \leq t$ и $t \leq \alpha_j \leq S_j(t)$, что позволяет упростить формулу (11):

$$v_{ij}^{s2} = \frac{2 \left\{ F_i(t) - F_j(t) + F_{ij}(t, t) - F_{ij}(t, S_j(t)) - F_{ij}(S_i(t), t) + F_{ij}(S_i(t), S_j(t)) \right\}}{\left(f_i(t) + f_j(t) - f_i(S_i(t)) \cdot (S_i)'(t) - f_j(S_j(t)) \cdot (S_j)'(t) \right)^2}.$$

Таким образом, аналитически удалось доказать, что привлечение информации о симметрии кривых ценовой чувствительности позволяет повысить точность метода ценообразования PSM для достаточно больших N .

В качестве иллюстрации рассмотрим простейший случай, когда с.в. X_i, X_j распределены равномерно в $(0, 100)$ и $(50, 150)$ соответственно, и рассматриваются только пары $X_i < X_j$. Тогда

$$F_{ij}(x, y) = \begin{cases} 0, & x < y < 50, y > x; \\ \frac{x}{100} \cdot \frac{y-50}{100}, & x \in (0, 100), y \in (50, 150); \\ \frac{y-50}{100}, & x \geq 100, y \in (100, 150); \\ \frac{x}{100}, & x < 100, y \geq 150; \\ 1, & x \geq 100, y \geq 150, \end{cases}$$

искомое значение цены $t = \frac{50+100}{2} = 75$. Следовательно, $v_{ij}^2 = \frac{2 \cdot 75 \cdot 25}{100 \cdot 100 \cdot 0,02^2} = 937$. При этом

$S_i(t) = 2 \cdot 50 - 75 = 25$, $S_j(t) = 2 \cdot 100 - 75 = 125$. Тогда

$$v_{ij}^{S2} = \frac{2\{F_i(75) - F_j(75) + F_{ij}(75, 75) + F_{ij}(25, 125) - F_{ij}(75, 125) - F_{ij}(25, 75)\}}{(0,02 + 0,01 + 0,01)^2} =$$

$$= \frac{2\{0,75 - 0,25 + 2 \cdot 0,75 \cdot 0,25 - 0,75 \cdot 0,75 - 0,25 \cdot 0,25\}}{(0,02 + 0,01 + 0,01)^2} = 312,5,$$

то есть получили практически трехкратный выигрыш. На рис. 1 приведены графики переменных v_{ij}^2 и v_{ij}^{S2} для $F_i(x) = R_{(0,100)}(x)$ и $F_j(x) = R_{(50,150)}(x)$ в зависимости от разных объемов выборок N при $M = 10^5$. Заметим, что моделирование подтверждает верность расчета формул для асимптотических дисперсий, при этом также стоит отметить, что наблюдается достаточно высокая скорость сходимости: для достижения хорошей точности достаточно опросить 30 человек, хотя даже и при меньшем числе опрошенных наблюдается существенный выигрыш.

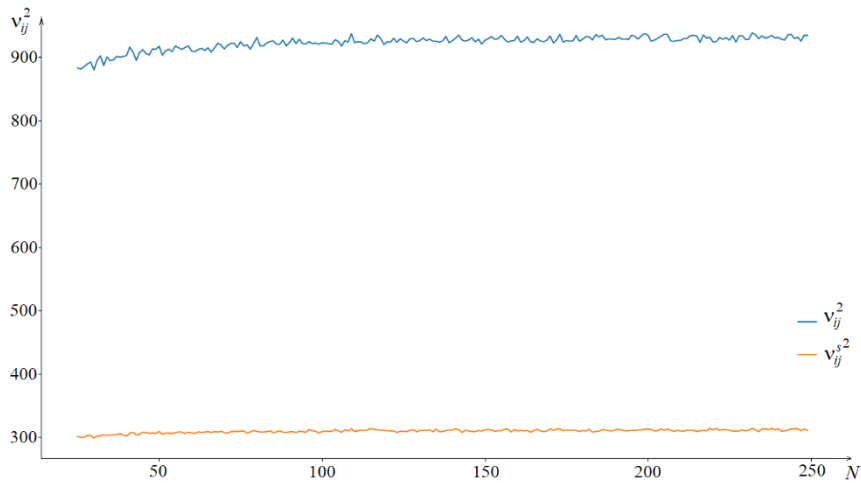


Рис. 1. Графики переменных v_{ij}^2 и v_{ij}^{S2} для $F_i(x) = R_{(0,100)}(x)$ и $F_j(x) = R_{(50,150)}(x)$

Fig. 1 Graphs of variables v_{ij}^2 and v_{ij}^{S2} for $F_i(x) = R_{(0,100)}(x)$ and $F_j(x) = R_{(50,150)}(x)$

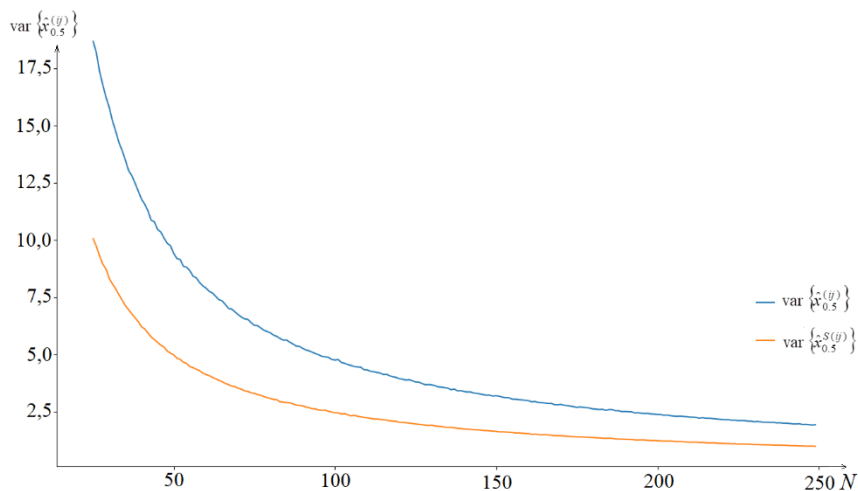


Рис. 2. Графики дисперсий $\text{var}\{\hat{z}_{0.5}^{(ij)}\}$ и $\text{var}\{\hat{z}_{0.5}^{S(ij)}\}$ для $F_i(x) = N_{(50,20^2)}(x)$ и $F_j(x) = R_{(20,100)}(x)$

Fig. 2. Variance graphs $\text{var}\{\hat{z}_{0.5}^{(ij)}\}$ и $\text{var}\{\hat{z}_{0.5}^{S(ij)}\}$ for $F_i(x) = N_{(50,20^2)}(x)$ and $F_j(x) = R_{(20,100)}(x)$

На рис. 2 приведены графики дисперсий $\text{var}\{\hat{x}_{0.5}^{(ij)}\}$ и $\text{var}\{\hat{x}_{0.5}^{S(ij)}\}$ для нормального с параметрами 50 и 400 $F_i(x) = N_{(50,20^2)}(x)$ и равномерного в (20, 100) $F_j(x) = R_{(20,100)}(x)$ распределений, на рис. 3 – для нормальных распределений $F_i(x) = N_{(50,20^2)}(x)$ и $F_j(x) = N_{(100,20^2)}(x)$ в зависимости от N при $M = 10^5$. В обоих случаях наблюдается значительный выигрыш в точности, даже в асимптотике выигрыш практически двукратный.

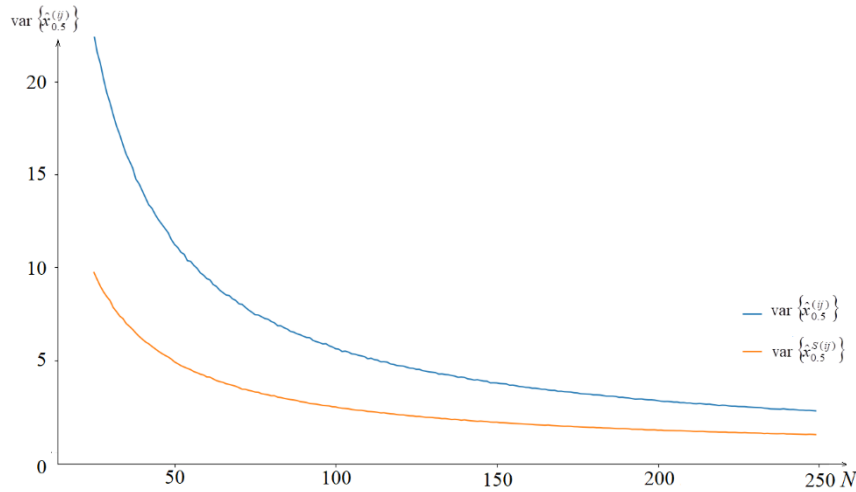


Рис. 3. Графики дисперсий $\text{var}\{\hat{x}_{0.5}^{(ij)}\}$ и $\text{var}\{\hat{x}_{0.5}^{S(ij)}\}$ для $F_i(x) = N_{(50,20^2)}(x)$ и $F_j(x) = N_{(100,20^2)}(x)$

Fig. 3. Variance graphs $\text{var}\{\hat{x}_{0.5}^{(ij)}\}$ и $\text{var}\{\hat{x}_{0.5}^{S(ij)}\}$ for $F_i(x) = N_{(50,20^2)}(x)$ and $F_j(x) = N_{(100,20^2)}(x)$

Также с помощью имитационного моделирования была подтверждена асимптотическая нормальность оценок для разных видов кривых ценовой чувствительности как с учетом, так и без учета их симметрии. При этом сходимость к нормальному распределению наблюдалась во всех рассмотренных случаях для $N \geq 30$. Следовательно, пользуясь асимптотической нормальностью, для достаточно больших N можно построить приближенные доверительные интервалы для ценовых значений с заданной доверительной вероятностью $0 < \gamma < 1$:

$$X_{(2N+1)}^{S(ij)} - \frac{z_{(1+\gamma)/2} \cdot \hat{v}_{ij}^S}{\sqrt{N}} \leq x_{0.5}^{S(ij)} \leq X_{(2N+1)}^{S(ij)} + \frac{z_{(1+\gamma)/2} \cdot \hat{v}_{ij}^S}{\sqrt{N}}, \quad (12)$$

где $z_{(1+\gamma)/2}$ – квантиль уровня $(1+\gamma)/2$ стандартного нормального распределения, $\hat{v}_{ij}^S$ – выборочная оценка v_{ij}^S .

Заключение

В работе найдены оценки ценовых значений метода измерения ценовой чувствительности PSM для случая привлечения дополнительной информации об S^α -симметрии кривых ценовой чувствительности, показаны асимптотическая нормальность и состоятельность оценок, построены приближенные доверительные интервалы для истинных значений цен. Аналитически показано, что в асимптотике точность модифицированного метода выше, чем классического. С помощью имитационного моделирования рост точности оценивания был также подтвержден для разных видов кривых ценовой чувствительности и для любого количества опрошенных, при этом нормальность наблюдалась для объемов выборок, не меньших 30.

Таким образом, дополнительная информация об S^α -симметрии кривых ценовой чувствительности позволяет получить более качественные оценки уровней цен в методе ценообразования PSM, ориентированном на спрос, даже при достаточно небольшом числе участников исследования.

Список источников

1. Simon H. Confessions of the Pricing Man: How Price Affects Everything. Springer, 2015. 236 p.
2. Нюренбергер Л.Б., Краковецкая И.В., Далибожко А.И. Функционирование МСП сферы услуг в условиях санкционного давления: вызовы и перспективы развития // Исследование проблем экономики и финансов. 2023. № 2. С. 1–7. doi: 10.31279/2782-6414-2023-2-7
3. Kotler P., Armstrong G. Principles of Marketing. Prentice-Hall, 2016. 398 p.
4. Albari A., Safitri I. The Influence of Product Price on Consumers' Purchasing // Decisions' Review of Integrative Business and Economics Research. 2018. V. 7 (2). P. 328–336.
5. Baker R.J. Implementing Value Pricing: A Radical Business Model for Professional Firms. Wiley, 2011. 400 p.
6. Nagle T.T., Müller G., Gruyaert E. The Strategy and Tactics of Pricing: A Guide to Growing More Profitably. Routledge, 2023. 360 p.
7. Chhabra S. Determining the Optimal Price Point: Using Van Westendorp's Price Sensitivity Meter // Managing in Recovering Markets. New Delhi : Springer. 2015. P. 8–20. (Springer Proceedings in Business and Economics).
8. Andrievskaya A.A., Zenkova Z.N. The Use of Stoezel Method in Pricing of New Bio-Energy Drink // Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы VII Междунар. молодежной науч. конф. Томск : Изд. Дом ТГУ, 2019. С. 328–332.
9. Zenkova Zh.N., Cыбульникова Н.Р. Исследование цены спроса на продукцию ЗАО «Натуральное мыло» методом Штоцеля по цензурированным данным // Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы IV Междунар. молодежной науч. конф. Томск, 20–21 мая 2016 г. Томск : Изд. Дом ТГУ, 2016. С. 62–65.
10. Docters R.G., Barzelay M., Hanson J.G., Nguyen C. Contextual Pricing: The Death of List Price and the New Market Reality. McGraw Hill, 2011. 256 p.
11. Stoezel J. Psychological / Sociological Aspects of Price // Pricing Research. Princeton, NJ : Brandon Systems Press, 1970. P. 70–74.
12. Westendorp P.H. NSS – Price Sensitivity Meter (PSM) – A New Approach to Consumer Perception of Prices // Venice Congress Main Sessions, European Marketing Research Society (ESOMAR). Amsterdam, 1976. P. 139–167.
13. Коржов М.М., Кузин Д.А. Сравнительный анализ и практическое применение методов ценообразования с ориентацией на спрос // Новости маркетинга. 2007. № 4. С. 9–17.
14. Zenkova Zh.N., Krakovetskaya I.V. Непараметрическая оценка Тёрнбулла для интервально-цензурированных данных в маркетинговом исследовании спроса на биоэнергетические напитки // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 3 (24). С. 6–69.
15. Zenkova Zh.N., Krakovetskaya I.V. Моделирование по неполным данным в логистике и маркетинге // Логистические системы в глобальной экономике. 2013. № 3 (1). С. 98–105.
16. Lipovetsky S. Van Westendorp Price Sensitivity in Statistical Modeling // International Journal of Operations and Quantitative Management. 2006. V. 12 (2). P. 141–156.
17. Lipovetsky S., Magnan S., Polzi A.Z. Pricing Models in Marketing Research // Intelligent Information Management. 2011. V. 3. P. 167–174.
18. Lipovetsky S. Statistics in Marketing Research: A Brief Review on Special Methods and Applications // Model Assisted Statistics and Applications. 2022. V. 17 (3). P. 213–216.
19. Андриевская А.А., Zenkova Zh.N. Подход Липовецкого к модификации метода ценообразования Штоцеля // Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы VII Междунар. молодежной науч. конф. Томск : Изд. Дом ТГУ, 2019. С. 125–130.
20. Дмитриев Ю.Г., Zenkova Zh.N., Zenkov A.G. Статистические свойства оценок метода измерения ценовой чувствительности PSM // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2019. № 47. С. 30–40. doi: 10.17223/19988605/47/4
21. Журко Е.С., Zenkova Zh.N. Метод ценообразования PSM для случая цензурированных выборок малого объема // Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы IV Междунар. молодежной науч. конф. Томск, 20–21 мая 2016 г. Томск : Изд. Дом ТГУ, 2016. С. 47–51.
22. Zenkova Zh.N., Cыбульникова Н.Р. Статистические свойства оценок ценовых значений метода ценовой чувствительности PSM для линейно зависимых наблюдений с учетом симметрии // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2021. № 56. С. 59–67.
23. Журко Е.С., Zenkova Zh.N. Метод ценообразования PSM для цензурированных данных с учетом квантиля // Наука. Технологии. Производство. 2015. № 13. С. 13–16.
24. Журко Е.С., Zenkova Zh.N. Влияние априорной информации на результаты метода ценообразования на товар-новинку PSM // Актуальные проблемы и перспективы развития государственной статистики в современных условиях : сб. материалов III Междунар. науч.-практ. конф. Саратов, 5–7 декабря 2016 г. Саратов : Саратовстат, 2017. Т. 2. С. 66–68.
25. Zenkova Zh.N. Учет информации об S_{α} -равноплечной симметрии при обработке цензурированных данных // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 2 (15). С. 32–45.
26. Дмитриев Ю.Г., Устинов Ю.К. Статистическое оценивание распределений вероятностей с использованием дополнительной информации. Томск : Изд-во ТГУ, 1988. 194 с.
27. Боровков А.А. Математическая статистика. Новосибирск : Наука, 1997. 772 с.

References

1. Simon, H. (2015) *Confessions of the Pricing Man: How Price Affects Everything*. Springer.
2. Nyurenberger, L.B., Krakovetskaya, I.V. & Dalibozhko, A.I. (2023) Funktsionirovanie MSP sfery uslug v usloviyakh sanktsionnogo davleniya: vyzovy i perspektivy razvitiya [Functioning of SMEs in service industry under sanction pressure: Challenges and Prospects for Development]. *Issledovanie problem ekonomiki i finansov*. 2. pp. 1–7. DOI: 10.31279/2782-6414-2023-2-7
3. Kotler, P. & Armstrong, G. (2016) *Principles of Marketing*. Prentice-Hall.
4. Albari, A. & Safitri, I. (2018) The influence of product price on consumers' purchasing. *Decisions' Review of Integrative Business and Economics Research*. 7(2). pp. 328–336.
5. Baker, R.J. (2011) *Implementing Value Pricing: A Radical Business Model for Professional Firms*. Wiley.
6. Nagle, T.T., Müller, G. & Gruyaert, E. (2023) *The Strategy and Tactics of Pricing: A Guide to Growing More Profitably*. Routledge.
7. Chhabra, S. (2015) Determining the optimal price point: using Van Westendorp's price sensitivity meter. In: *Managing in Recovering Markets. Springer Proceedings in Business and Economics*. New Delhi: Springer. pp. 8–20.
8. Andrievskaya, A.A. & Zenkova, Z.N. (2019) The use of Stotzel method in pricing of new bio-energy drink. *Matematicheskoe i programnoe obespechenie informatsionnykh, tekhnicheskikh i ekonomicheskikh sistem* [Mathematical and Software Support for Information, Technical and Economic Systems]. Proc. of the 7th International Conference. Tomsk: TSU. pp. 328–332.
9. Zenkova, Z.N. & Tsybulnikova, N.R. (2016) Issledovanie tseny sprosa na produktsiyu ZAO "Natural'noe mylo" metodom Shtotselya po tsenzurirovannym dannym [Demand price for the products of ZAO Natural'noe mylo using the Stotzel method based on censored data]. *Matematicheskoe i programnoe obespechenie informatsionnykh, tekhnicheskikh i ekonomicheskikh sistem* [Mathematical and Software Support for Information, Technical and Economic Systems]. Proc. of the Fourth Conference. Tomsk: TSU. pp. 62–65.
10. Docters, R.G., Barzelay, M., Hanson, J.G. & Nguyen, C. (2011) *Contextual Pricing: The Death of List Price and the New Market Reality*. McGraw Hill.
11. Stotzel, J. (1970) Psychological/ Sociological Aspects of Price. In: *Pricing Research*. Princeton, NJ: Brandon Systems Press. pp. 70–74.
12. Westendorp, P.H. (1976) NSS – Price sensitivity meter (PSM) – a new approach to consumer perception of prices. In: *Venice Congress Main Sessions, European Marketing Research Society (ESOMAR)*. Amsterdam. pp. 139–167.
13. Korzhov, M.M. & Kuzin, D.A. (2007) Sravnitel'nyy analiz i prakticheskoe primeneniye metodov tsenoobrazovaniya s orientatsiey na spros [Comparative Analysis and Practical Application of Demand-Driven Pricing Methods]. *Novosti marketinga*. 4. pp. 9–17.
14. Zenkova, Z.N. & Krakovetskaya, I.V. (2013) Nonparametric Turnbull estimator for interval-censored data in the marketing research of the demand of bio-energy drinks. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(24). pp. 64–69.
15. Zenkova, Z.N. & Krakovetskaya, I.V. (2013) Modelirovaniye po nepolnym dannym v logistike i marketinge [Modeling with incomplete data in logistics and marketing]. *Logisticheskie sistemy v global'noy ekonomike*. 3(1). pp. 98–105.
16. Lipovetsky, S. (2006) Van Westendorp Price sensitivity in statistical modeling. *International Journal of Operations and Quantitative Management*. 12(2). pp. 141–156.
17. Lipovetsky, S., Magnan, S. & Polzi, A.Z. (2011) Pricing models in marketing research. *Intelligent Information Management*. 3. pp. 167–174.
18. Lipovetsky, S. (2022) Statistics in marketing research: a brief review on special methods and applications. *Model Assisted Statistics and Applications*. 17(3). pp. 213–216.
19. Andrievskaya, A.A. & Zenkova, Z.N. (2019) Podkhod Lipovetskogo k modifikatsii metoda tsenoobrazovaniya Shtotselya [Lipovetsky's approach in modification of Stotzel pricing method]. *Matematicheskoe i programnoe obespechenie informatsionnykh, tekhnicheskikh i ekonomicheskikh sistem* [Mathematical and Software Support for Information, Technical and Economic Systems]. Proc. of the 7th International Conference. Tomsk: TSU. pp. 125–130.
20. Dmitriev, Yu.G., Zenkova, Z.N. & Zenkov, A.G. (2019) Statistical properties of price sensitivity meter results. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 47. pp. 30–40. DOI: 10.17223/19988605/47/4
21. Zhurko, E.S. & Zenkova, Z.N. (2016) Metod tsenoobrazovaniya PSM dlya sluchaya tsenzurirovannykh vyborok malogo ob'ema [PSM Pricing Method for Small Censored Samples]. *Matematicheskoe i programnoe obespechenie informatsionnykh, tekhnicheskikh i ekonomicheskikh sistem* [Mathematical and Software Support for Information, Technical and Economic Systems]. Proc. of the 4th International Conference. Tomsk: TSU. pp. 47–51.
22. Zenkova, Z.N. & Tsybulnikova, N.R. (2021) Statistical properties of price sensitivity meter results for linear relationship between observations with symmetry. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 56. pp. 59–67. DOI: 10.17223/19988605/56/7
23. Zhurko, E.S. & Zenkova, Z.N. (2015) Metod tsenoobrazovaniya PSM dlya tsenzurirovannykh dannyykh s uchedom kvantilya [PSM pricing method with quantile]. *Nauka. Tekhnologii. Proizvodstvo*. 13. pp. 13–16.
24. Zhurko, E.S. & Zenkova, Z.N. (2017) Vliyanie apriornoy informatsii na rezul'taty metoda tsenoobrazovaniya na tovarnovinku PSM [The influence of a priori information on PSM pricing method for a new product]. In: *Aktual'nye problemy i perspektivy razvitiya gosudarstvennoy statistiki v sovremennykh usloviyakh* [Topical problems and prospects for the development of state statistics in modern conditions]. Vol. 2. Saratov: Saratovstat. pp. 66–68.

25. Zenkova, Z.N. (2011) Processing censored data with $S_{\square}$ -symmetry. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2(15). pp. 32–45.
26. Dmitriev, Yu.G. & Ustinov, Yu.K. (1988) *Statisticheskoe otsenivanie raspredeleniy veroyatnostey s ispol'zovaniem dopolnitel'noy informatsii* [Statistical Estimation of Probability Distributions Using Additional Information]. Tomsk: TSU.
27. Borovkov, A.A. (1997) *Matematicheskaya statistika* [Mathematical Statistics]. Novosibirsk: Nauka.

Информация об авторах:

Зенкова Жанна Николаевна – доцент, кандидат физико-математических наук, MBA, доцент кафедры системного анализа и математического моделирования Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: zhanna.zenkova@mail.tsu.ru

Андриевская Анна Андреевна – ассистент кафедры системного анализа и математического моделирования Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: anna.andriev@mail.tsu.ru

Яковлев Никита Иванович – ведущий аналитик данных, Tele2/Altel (Алматы, Казахстан). E-mail: nyakovlev19@gmail.com

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authors:

Zenkova Zhanna N. (Candidate Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, MBA; Department of Systems Analysis and Mathematical Modeling, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: zhanna.zenkova@mail.tsu.ru

Andrievskaya Anna A. (Teaching Assistant, Department of Systems Analysis and Mathematical Modeling, Institute of Applied Mathematics and Computer Science, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation)
E-mail: anna.andriev@mail.tsu.ru

Yakovlev Nikita I. (Senior Data Analyst, Tele2/Altel, Almaty, Kazakhstan) E-mail: nyakovlev19@gmail.com

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 31.10.2024; принята к публикации 03.03.2025

Received 31.10.2024; accepted for publication 03.03.2025