ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2025 Математика и механика № 94

Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Научная статья
УДК 517.54 MSC: 30C20, 30C30
doi: 10.17223/19988621/94/2

Управляющая функция уравнения Левнера, генерирующая разрез, выходящий из нулевого угла

Махер Кармуши[1], Иван Александрович Колесников[2], Юлия Анатольевна Лобода[3]

[1, 2, 3] Томский государственный университет, Томск, Россия
[1] maherkarmoushi1996@gmail.com
[2] ia.kolesnikov@mail.ru
[3] ysenchurova@yandex.ru

Аннотация. Строится семейство отображений $f = f(z,\tau)$, $\tau \in [0,\tau_0]$. При фиксированном τ отображение *f* переводит полуплоскость на полосу с разрезом (длина разреза зависит от параметра τ) вдоль луча γ, уходящего на бесконечность. Разрез образует нулевые углы с границей полосы. Получено разложение управляющей функции λ(τ) уравнения Лёвнера в точке τ = 0, τ > 0, генерирующей такое семейство областей. Сформулирована гипотеза о поведении управляющей функции, генерирующей разрез, выходящий из нулевого угла некоторой односвязной области вдоль дуги окружности. Гипотеза проверена на одном частном случае.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение Левнера, конформное отображение, интеграл Кристоффеля–Шварца, акцессорные параметры

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2025-1728/2)»

Для цитирования: Кармуши М., Колесников И.А., Лобода Ю.А. Управляющая функция уравнения Левнера, генерирующая разрез, выходящий из нулевого угла // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 94. С. 24–32. doi: 10.17223/19988621/94/2

Original article

The driving function of the Loewner equation generating slit, emanating from a zero corner

Maher Karmushi[1], Ivan A. Kolesnikov[2], Yulia A. Loboda[3]

[1, 2, 3] Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation
[1] maherkarmoushi1996@gmail.com
[2] ia.kolesnikov@mail.ru
[3] ysenchurova@yandex.ru

Abstract. It is well known that if the driving function λ of the Loewner equation generates a quasislit not tangential to the boundary, then λ is Hölder continuous with an exponent 1/2. For a tangential slit, the behavior of the driving function is more complicated. It is known that for a tangential slit in the half-plane emanating from the real axis along a circular arc the driving function λ is Hölder continuous with an exponent $1/3$. The paper constructs a family of mappings $f = f(z,\tau)$, $\tau \in [0,\tau_0]$. For a fixed τ, the mapping *f* takes the half-plane onto a strip with a slit (the length of the slit depends on τ) along a ray, emanating from infinity. The slit forms two zero angles with the strip's boundary. The expansion of the driving function λ(τ) at the point τ = 0, τ > 0, is obtained, which generates such family of domains. A mapping of the half-plane onto a half-strip with slit emanating from infinity is constructed under the assumption that the driving function has the same form as for the strip. The following conjecture is proposed: if λ generates in a simply connected domain *D* a slit along a circular arc starting from a corner of the domain *D* with a zero interior angle, then the function λ expands into the series $\lambda(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \tau^{\frac{k}{2}}$.

Keywords: the Loewner differential equation, conformal mapping, the Schwarz–Christoffel integral, accessory parameters

Acknowledgments: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russia (agreement No. 075-02-2025-1728/2).

For citation: Karmushi, M., Kolesnikov, I.A., Loboda, Yu.A. (2025) The driving function of the Loewner equation generating slit, emanating from a zero corner. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 94. pp. 24–32. doi: 10.17223/19988621/94/2

Введение

Пусть $\gamma = \gamma(\tau)$, $\tau \in [0,\tau_0]$, – простая кривая. Кривая $\gamma(\tau)$ при $\tau \in (0,\tau_0]$ находится в верхней полуплоскости $\Pi^+ = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w > 0\}$, $\gamma(0) \in \mathbb{R}$. Согласно теореме Римана, для фиксированного τ существует конформное отображение $z = g(w,\tau)$, переводящее область $\Pi^+ \setminus \gamma[0,\tau_0]$ на верхнюю полуплоскость Π^+ *z*-плоскости, имеющее на бесконечности разложение

$$g(w,\tau) = w + \frac{c(\tau)}{w} + O\left(\frac{1}{w^2}\right). \tag{1}$$

Здесь $c(\tau)$ – возрастающая функция. Можно выбрать такую параметризацию кривой γ, при которой $c(\tau) = \tau$. Такую параметризацию называют стандартной.

Конформное отображение *g*, нормированное условием (1) с $c(\tau) = \tau$, удовлетворяет уравнению Левнера

$$\frac{\partial g(w,\tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{g(w) - \lambda(\tau)} \tag{2}$$

с начальным условием $g(w,0) = w$. Здесь $\lambda(\tau)$ – образ точки $\gamma(\tau)$ при отображении *g*. Функция $\lambda(\tau)$ непрерывная и вещественнозначная.

Обратное отображение $f(z,\tau)=g^{-1}(z,\tau)$ переводит полуплоскость Π^+ на $\Pi^+\setminus\gamma[0,\tau_0]$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial f(z,\tau)}{\partial\tau}+\frac{1}{z-\lambda(\tau)}\frac{\partial f(z,\tau)}{\partial z}=0 \qquad (3)$$

с начальным условием $f(z,0)=z$.

Уравнения (2) и (3) имеют место, если вместо $\Pi^+\setminus\gamma[0,\tau_0]$ взять односвязную область D с исключенной кривой γ. Действительно, пусть семейство отображений $f=f(z,\tau)$ при фиксированном τ переводит полуплоскость Π^+ на семейство односвязных областей $\Delta(\tau)=D\setminus\gamma(\tau)$, где γ – простая кривая, начинающаяся на границе ∂D. Семейство f нормировано таким образом, что композиция $\omega(z,\tau)=f^{-1}(f(z,\tau),0)$ раскладывается на бесконечности в ряд $\omega(z,\tau)=z-\frac{\tau}{z}+\frac{c_2(\tau)}{z^2}+\ldots$ Тогда отображение ω удовлетворяет уравнению (3), но из правила дифференцирования композиции следует, что *f* также удовлетворяет уравнению (3).

С другой стороны, уравнение Левнера (2) имеет решение для всякой непрерывной вещественнозначной функции $\lambda(\tau)$. Функция $\lambda(\tau)$ называется управляющей функцией уравнения Левнера. Это решение $g=g(w,\tau)$ порождает семейство вложенных областей $\Delta(\tau)$. Известно, что для непрерывной функции $\lambda(\tau)$ семейство $\Delta(\tau)$ не всегда представляет собой плоскость с разрезом.

Уравнения (2) и (3) называются хордовыми уравнениями Левнера (уравнениями Левнера для полуплоскости). К. Левнер основал параметрический метод, введя радиальное уравнение (для единичного круга) [1]. Классическая теория Левнера описана, например, в [2, 3]. В последнее время возрос интерес к исследованию взаимосвязи между геометрией разреза γ и поведением управляющей функции $\lambda(\tau)$.

В работе [4] для радиального уравнения Левнера и в [5] для хордового показано, что если γ – квазиразрез, не касательный к границе, то управляющая функция $\lambda(\tau)$ удовлетворяет условию Гёльдера $|\lambda(\tau)-\lambda(\sigma)|\le C|\tau-\sigma|^{\frac{1}{2}}$, $\forall\ \ \tau,\sigma\in[0,\tau_0]$, с показателем 1/2. Напротив, если управляющая функция $\lambda(\tau)$ непрерывна по Гёльдеру с показателем 1/2 и $C<4$, то γ – квазиразрез, подходящий к границе не по касательной.

Для касательного разреза поведение управляющей функции отличается. Так, например, дуга окружности

$$\Gamma(\tau)=\left\{w=i+e^{is(\tau)}:-\frac{\pi}{2}\le s(\tau)\le\frac{\pi}{2}\right\},\ s(0)=-\frac{\pi}{2},$$

образующая нулевой угол с положительной частью вещественной оси и угол π с отрицательной частью вещественной оси, генерируется [6] управляющей функцией $\lambda(\tau)$ непрерывной по Гёльдеру с показателем 1/3:

$$\lambda(\tau) = C\tau^{\frac{1}{3}} + o\left(\tau^{\frac{1}{3}}\right), \; C > 0 .$$

Результат в [7] показывает, что такое же разложение управляющей функции $\lambda(\tau)$ справедливо для случая разреза $\varphi(\Gamma(\tau))$, где $\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$, $a_1 > 0$, $a_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. В [8, 9] изучается управляющая функция $\lambda(\tau)$, генерирующая разрез в полуплоскости, имеющий касание с вещественной осью некоторого порядка. Порядок касания разреза γ связан с показателем непрерывности Гёльдера управляющей функции $\lambda(\tau)$.

В первой части статьи строится семейство отображений полуплоскости Π^+ на горизонтальную полосу с разрезом вдоль луча переменной длины. Разрез образует два нулевых угла с границей полосы. Показано, что управляющая функция, соответствующая этому случаю, является непрерывной по Гёльдеру с показателем 1/2. Во второй части на одном частном случае проверяется гипотеза, что управляющая функция, генерирующая разрез в некоторой односвязной области, выходящий из угла нулевого раствора, также является непрерывной по Гёльдеру с показателем 1/2.

1. Семейство отображений

Рассмотрим семейство областей $\Delta_0(t)$, представляющее собой горизонтальную полосу $\{w : 0 < \operatorname{Im} w < H\}$ с разрезом по лучу $\{w : \operatorname{Re} w \ge t, \operatorname{Im} w = h\}$, $0 < h < H$, $T \le t \le +\infty$. Концевую точку разреза $t + ih$ обозначим через $\Lambda(t)$.

Найдем семейство отображений $f = f(z,t)$, $f : \Pi^+ \times [T, +\infty] \to \Delta_0(t)$. Обозначим прообразы вершин многоугольника $\Delta_0(t)$ через $b(t)$, $\lambda(t)$, $a(t)$ и $c(t)$, где $f(\lambda(t),t) = \Lambda(t)$, $b(t) < \lambda(t) < a(t) < c(t)$, $T \le t < +\infty$. Пусть $c(t) = \infty$, $a(+\infty) = b(+\infty) = \lambda(+\infty) = 0$.

Отображение $f = f(z,t)$ при фиксированном t переводит верхнюю полуплоскость Π^+ на многоугольник $\Delta_0(t)$ и может быть записано с помощью интеграла Кристоффеля–Шварца в виде:

$$f(z,t) = c_1(t) \int_{z_0}^{z} \frac{\zeta - \lambda(t)}{(\zeta - b(t))(\zeta - a(t))} d\zeta + c_2(t). \tag{4}$$

Покажем, что $c_1(t) = -\dfrac{H}{\pi}$. Рассмотрим композицию $h(\zeta,t) = \xi\big(f(z(\zeta),t)\big)$, где $z(\zeta) = -\dfrac{1}{\zeta}$, $\xi(w) = e^{\frac{\pi}{H}w}$. Функция $h = h(\zeta,t)$ при фиксированном t переводит верхнюю половину δ-окрестности начала координат на верхнюю половину окрестности начала координат, причем интервал $(-\delta,\delta)$ переходит в интервал на вещественной оси. Согласно принципу симметрии Римана–Шварца, отображение h

можно продолжить аналитически на полную окрестность начала координат как голоморфное однолистное отображение. Таким образом, отображение $h = h(\zeta, t)$ в окрестности начала координат имеет разложение

$$\xi\Big(f\big(z(\zeta),t\big)\Big) = \gamma_1(t)\zeta + \gamma_2(t)\zeta^2 + \ldots,\ \gamma_1 \neq 0 .$$

Отсюда получаем, что отображение *f* раскладывается на бесконечности в ряд

$$f(z,t) = -\frac{H}{\pi}\ln z + \tilde{\gamma}_0(t) + \frac{\tilde{\gamma}_1(t)}{z} + \ldots$$

Здесь выбрана ветвь логарифма $\ln z = \ln|z| + i\arg z$, для которой $-\pi < \arg z < \pi$. Сравнивая это разложение с разложением *f* на бесконечности, полученным с помощью (4)

$$f(z,t) = c_1(t)\left(\ln z + \tilde{\gamma}_0(t) + \frac{a(t)+b(t)-\lambda(t)}{z} + \ldots\right), \tag{5}$$

находим, что $c_1(t) = -\dfrac{H}{\pi}$.

Можно нормировать отображения семейства *f*, потребовав, чтобы в (5)

$$\tilde{\gamma}_0(t) = -i\pi + A,\ A \in \mathbb{R},\ \dot{A} = 0, \tag{6}$$

$$a(t) + b(t) - \lambda(t) = 0 . \tag{7}$$

Действительно, $\operatorname{Re} f(-r,t) = 0$ для всех $r > 0$, поэтому $\operatorname{Im}\tilde{\gamma}_0(t) = -\pi$. Композиция $f(qz+p,t)$, $q > 0$, $p \in \mathbb{R}$, переводит полуплоскость Π^+ на область $\Delta_0(t)$ и раскладывается на бесконечности в ряд

$$f(z,t) = -\frac{H}{\pi}\left(\ln z + \tilde{\gamma}_0(t) + \ln q + \frac{p + a(t)+b(t)-\lambda(t)}{qz} + \ldots\right).$$

Видим, что q и p можно выбрать так, чтобы в этом разложении коэффициент при z^{-1} равнялся нулю и свободный член равнялся $-A\dfrac{H}{\pi} + iH$.

Интегрируя (4), с учетом (6) получим

$$f(z,t) = -\frac{H}{\pi}\left(\frac{\lambda(t)-b(t)}{a(t)-b(t)}\ln\big(b(t)-z\big) + \frac{a(t)-\lambda(t)}{a(t)-b(t)}\ln\big(a(t)-z\big) + A\right). \tag{8}$$

Найдем параметры *a*, *b* и λ, используя условие $f\big(\lambda(t),t\big) = t + ih$. Отделим в этом равенстве вещественную и мнимую части. Учитывая, что $b - \lambda < 0$, $a - \lambda > 0$, и выбирая ветвь логарифма, для которой $\lim\limits_{z\to\lambda,\, z\in\Pi^+} \ln(b - z) = \ln|\lambda - b| - i\pi$, получим

$$-\frac{H}{\pi}\left(\frac{\lambda - b}{a - b}\ln|\lambda - b| + \frac{a-\lambda}{a-b}\ln|a-\lambda| + A\right) = t, \tag{9}$$

$$H\frac{\lambda - b}{a - b} = h . \tag{10}$$

Решая систему уравнений (7), (9), (10), будем иметь

$$a(t) = \left(\frac{H}{h} - 1\right)^{\frac{h}{H}-1} e^{-t\frac{\pi}{H} - A},\quad b(t) = -\left(\frac{H}{h} - 1\right)a(t),\quad \lambda(t) = a(t) + b(t). \tag{11}$$

Отображение (8) теперь примет вид:

$$f(z,t) = -\frac{1}{\pi}\Big(h\ln\big(b(t)-z\big)+(H-h)\ln\big(a(t)-z\big)+AH\Big).$$

Дифференцируя это равенство по t и по z, используя (11), получим

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = -\frac{\pi}{H}\left(\frac{H}{h}-1\right)^{\frac{2h}{H}-1} e^{-2t\frac{\pi}{H}} \frac{1}{\lambda(t)-z}\frac{\partial f(z,t)}{\partial z}. \tag{12}$$

Перейдем к стандартной параметризации. Семейство $\tilde{f} = \tilde{f}(z,\tau) = f\big(z,t(\tau)\big)$, $\tau=\tau(t)$, $t\in[T,+\infty]$, удовлетворяет (3), $t(0)=+\infty$. Сравнивая (3) и (12), находим

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{\pi}{H}\left(\frac{H}{h}-1\right)^{\frac{2h}{H}-1} e^{-t\frac{2\pi}{H}-2A}.$$

Проинтегрировав это равенство с начальным условием $\tau(+\infty)=0$, получим

$$\tau = \frac{1}{2}\left(\frac{H}{h}-1\right)^{\frac{2h}{H}-1} e^{-2t\frac{\pi}{H}-2A}. \tag{13}$$

Перейдем в (11) к параметру τ, получим

$$\begin{gathered}\tilde{a}(\tau) = a\big(t(\tau)\big) = \sqrt{2\tau\frac{h}{H-h}},\\ \tilde{b}(\tau) = b\big(t(\tau)\big) = -\sqrt{2\tau\frac{H-h}{h}},\end{gathered} \tag{14}$$

$$\tilde{\lambda}(\tau) = \lambda\big(t(\tau)\big) = \frac{2h-H}{\sqrt{h(H-h)}}\sqrt{2\tau}. \tag{15}$$

Подытожим результаты в следующей теореме.

Теорема. *Семейство отображений* $\tilde{f} = \tilde{f}(z,\tau) = f\big(z,t(\tau)\big)$, $\tau\in[0,\tau_0]$, *переводящее при фиксированном* τ *верхнюю полуплоскость на область* $\tilde{\Delta}_0(\tau) = \{w : 0<\operatorname{Im} w<H\}\setminus\{w:\operatorname{Re} w\ge t(\tau), \operatorname{Im} w = h\}$, $0<h<H$, *имеющее на бесконечности разложение* $\tilde{f}(z,\tau) = -\dfrac{H}{\pi}\left(\ln z + A - i\pi + \ln q + \dfrac{\gamma_2(\tau)}{z^2}+\ldots\right)$, *имеет вид:*

$$\tilde{f}(z,\tau) = -\frac{1}{\pi}\Big(h\ln\big(\tilde{b}(\tau)-z\big)+(H-h)\ln\big(\tilde{a}(\tau)-z\big)+AH\Big),$$

где $\tilde{a}$ *и* $\tilde{b}$ *определяются из* (14), *и* $\tau=\tau(t)$ *определяется из* (13).

Кроме того, семейство $\tilde{f}$ *удовлетворяет уравнению Левнера*

$$\frac{\partial \tilde{f}(z,\tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{\tilde{\lambda}(\tau)-z}\frac{\partial \tilde{f}(z,\tau)}{\partial z}$$

с начальным условием $\tilde{f}(z,0) = -\dfrac{H}{\pi}(\ln z + A + i\pi)$ *и управляющей функцией, определяемой по формуле* (15).

Заметим, что рассмотренный пример эквивалентен случаю, когда разрез вдоль дуги окружности $\Gamma(\tau)=\left\{w=ri+re^{is(\tau)}:-\frac{\pi}{2}\le s(\tau)\le\frac{\pi}{2}\right\}$, $r>1$, $s(0)=-\frac{\pi}{2}$, генерируется в области $\Pi^+\setminus\{z:|z-i|<1\}$.

2. Численный эксперимент

Рассмотрим семейство областей

$\Delta(\tau)=\{w\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}w>0, 0<\operatorname{Im}w<\pi\}\setminus\{w\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}w\ge t(\tau), \operatorname{Im}w=1\}$, $0\le\tau\le\tau_0$.

Концевую точку разреза обозначим через $\Lambda=\Lambda(\tau)$.

Рассмотрим семейство отображений $f=f(z,\tau)$, $f:\Pi^+\times[0,\tau_0]\to\Delta(\tau)$. Зафиксируем τ и обозначим прообразы вершин многоугольника $\Delta(\tau)$ при отображении f через $b(\tau)$, $\lambda(\tau)$, $a(\tau)$, $d(\tau)$ и $c(\tau)$, где $f(\lambda(\tau),\tau)=\Lambda(\tau)$, $b(\tau)<\lambda(\tau)<a(\tau)<d(\tau)<c(\tau)$, $0<\tau\le\tau_0$. Пусть $c(\tau)=\infty$, т.е. $f(\infty,\tau)=0$, и $a(0)=b(0)=\lambda(0)=0$, $d(0)=1$.

Отображение $f=f(z,\tau)$, $\tau\in[0,\tau_0]$, можно записать с помощью формулы Кристоффеля–Шварца

$$f(z,\tau)=c_1(\tau)\int_\infty^z\frac{\lambda(\tau)-\zeta}{(d(\tau)-\zeta)^{\frac{1}{2}}(b(\tau)-\zeta)(a(\tau)-\zeta)}d\zeta. \tag{16}$$

Отображение $f=f(z,0)$ имеет вид:

$$f(z,0)=-c_1(0)\int_\infty^z\frac{1}{\zeta(1-\zeta)^{\frac{1}{2}}}d\zeta=c_1(0)\left(i\pi-2\operatorname{arctg}\sqrt{1-z}\right).$$

Из условия $f(1,0)=i\pi$ находим $c_1(0)=1$.

Функция $f'(z,0)$ на бесконечности раскладывается в ряд

$$f'(z,0)=i\left(z^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}z^{-\frac{5}{2}}+\ldots\right).$$

Функция $f'(z,\tau)$ на бесконечности раскладывается в ряд

$$f'(z,\tau)=c_1(\tau)i\left(z^{-\frac{3}{2}}+\left(a(\tau)+b(\tau)+\frac{1}{2}d(\tau)-\lambda(\tau)\right)z^{-\frac{5}{2}}+\ldots\right).$$

Нормируем отображения семейства *f*, полагая $c_1(\tau)=1$ и

$$a(t)+b(t)+\frac{1}{2}d(\tau)-\lambda(t)=\frac{1}{2}. \tag{17}$$

Из условия $\operatorname{Im}\left(f(b+r)-f(b-r)\right)=-h$, $0<r<\lambda-b$, найдем

$$\lambda(\tau)-b(\tau)=\frac{h}{\pi}\left(a(\tau)-b(\tau)\right)\sqrt{d(\tau)-b(\tau)}. \tag{18}$$

Параметры *a*, *b*, *d* и λ удовлетворяют [2] системе дифференциальных уравнений

$$\dot{a}(\tau)=\frac{1}{a(\tau)-\lambda(\tau)},\quad \dot{b}(\tau)=\frac{1}{b(\tau)-\lambda(\tau)},\quad \dot{d}(\tau)=\frac{1}{d(\tau)-\lambda(\tau)}. \qquad (19)$$

Положим, что параметры *a*, *b*, *d* и λ раскладываются в ряды

$$\lambda(\tau(x))=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k x^k,\ \ a(\tau(x))=\sum_{k=1}^{\infty}a_k x^k,\ \ b(\tau(x))=\sum_{k=1}^{\infty}b_k x^k,\ \ d(\tau(x))=1+\sum_{k=1}^{\infty}d_k x^k,$$

где $x=\tau^{\frac{1}{2}}$. Подставляя эти ряды в систему (17), (19), получим единственное решение, удовлетворяющее условиям $b(\tau(x))<\lambda(\tau(x))<a(\tau(x))<d(\tau(x))$. Найдем $\lambda_k=\lambda_k(\lambda_1)$, $k=2,3,\dots$, $a_k=a_k(\lambda_1)$, $b_k=b_k(\lambda_1)$, $d_k=d_k(\lambda_1)$, $k=1,2,\dots$ Таким образом, из системы (17), (19) можно найти все коэффициенты рядов, кроме λ_1. Коэффициент λ_1 можно найти, подставив эти ряды в (18). Пусть t = 3, т.е. разрез в полуполосе $\{w\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}w>0, 0<\operatorname{Im}w<\pi\}$ проходит по лучу $\{w\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}w\ge 3, \operatorname{Im}w=1\}$.

Найдем приближенное значение параметра $x=\tau^{\frac{1}{2}}\approx 0.133876$ по формуле (13). Вычисляя первые десять коэффициентов рядов при $x=0.133876,$ получаем

$$b(x)=-0.262913\dots,\ \lambda(x)=-0.119622\dots,\ a(x)=0.135082\dots,\ d(x)=1.01642\dots$$

Значение отображения (16) в точке $\lambda(x)$ с найденными параметрами $b(x)$, $\lambda(x)$, $a(x)$, $d(x)$ отличается от значения $3+i$ на 10^{-6}.

На основании рассмотренных примеров можно сформулировать следующую гипотезу.

Гипотеза. *В односвязной области D разрез вдоль дуги окружности, выходящей из угла нулевого раствора, генерируется функцией* λ, *имеющей разложение* $\lambda(\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\tau^{\frac{k}{2}}$.

Список источников

1. *Löwner K.* Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises // Math. Ann. 1923. V. 89. P. 103–121. doi: 10.1007/BF01448091
2. *Александров И.А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976. 344 с.
3. *Duren P.L.* Univalent functions. New York: Springer-Verlag, 1983. 382 p.
4. *Marshall D.E., Rohde S.* The Loewner differential equation and slit mappings // J. Amer. Math. Soc. 2005. V. 18 (4). P. 763–778. doi: 10.1090/S0894-0347-05-00492-3
5. *Lind J.* A sharp condition for the Loewner equation to generate slits // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 2005. V. 30 (1). P. 143–158.
6. *Prokhorov D., Vasil'ev A.* Singular and tangent slit solutions to the Löwner equation // Anal. Math. Phys. 2009. P. 455–463. doi: 10.1007/978-3-7643-9906-1_23
7. *Wu H.-H., Jiang Y.-P., Dong X.-H.* Perturbation of the tangential slit by conformal maps // J. Math. Anal. Appl. 2018. V. 464 (2). P. 1107–1118. doi: 10.1016/j.jmaa.2018.04.042
8. *Lau K.S., Wu H.H.* On tangential slit solution of the Loewner equation // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 2016. V. 41. P. 681–691. doi: 10.5186/aasfm.2016.4142
9. *Prokhorov D.* Parametric Characteristics of High-Order Tangential Loewner's Slits // Lobachevskii J Math. 2018. V. 39. P. 818–825. doi: 10.1134/S199508021806015X

References

1. Löwner K. (1923) Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. *Mathematische Annalen*. 89. pp. 103–121. DOI: 10.1007/BF01448091.
2. Aleksandrov I.A. (1976) *Parametricheskiye prodolzheniya v teorii odnolistnykh funktsiy* [Parametric continuations in the theory of univalent functions]. Moscow: Nauka.
3. Duren P.L. (1983) Univalent functions. New York: Springer-Verlag.
4. Marshall D.E., Rohde S. (2005) The Loewner differential equation and slit mappings. *Journal of the American Mathematical Society*. 18(4). pp. 763–778. DOI: 10.1090/S0894-0347-05-00492-3.
5. Lind J. (2005) A sharp condition for the Loewner equation to generate slits. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica*. 30(1). pp. 143–158.
6. Prokhorov D., Vasil'ev A. (2009) Singular and tangent slit solutions to the Löwner equation. *Analysis and Mathematical Physics*. pp. 455–463. DOI: 10.1007/978-3-7643-9906-1_23
7. Wu H.-H., Jiang Y.-P., Dong X.-H. (2018) Perturbation of the tangential slit by conformal maps. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 464 (2). pp. 1107–1118. DOI: 10.1016/j.jmaa.2018.04.042.
8. Lau K.S., Wu H.H. (2016) On tangential slit solution of the Loewner equation. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica*. 41. pp. 681–691. DOI: 10.5186/aasfm.2016.4142.
9. Prokhorov D. (2018) Parametric Characteristics of high-order tangential Loewner's slits. *Lobachevskii Journal of Mathematics.* 39. pp. 818–825. DOI: 10.1134/S199508021806015X.

***Сведения об авторах*:**

Кармуши Махер – аспирант Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: maherkarmoushi1996@gmail.com

Колесников Иван Александрович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета; доцент кафедры математического анализа и теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ia.kolesnikov@mail.ru

Лобода Юлия Анатольевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ysenchurova@yandex.ru

***Information about the authors*:**

Karmushi Maher (PhD Student, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation) E-mail: maherkarmoushi1996@gmail.com

Kolesnikov Ivan A. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ia.kolesnikov@mail.ru

Loboda Yulia A. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ysenchurova@yandex.ru

The article was submitted 16.03.2025; accepted for publication 10.04.2025

Статья поступила в редакцию 16.03.2025; принята к публикации 10.04.2025