

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/94/12

## Решение неосесимметричной задачи термоупругости для трансверсально-изотропных тел вращения

Дмитрий Алексеевич Иванычев

*Липецкий государственный технический университет, Липецк, Россия, Lsivdmal@mail.ru*

**Аннотация.** Представлен метод определения термоупругого состояния конечного анизотропного тела вращения. Задана температура как функция цилиндрических координат, определяющая температуру в любой точке тела. Задача состоит в определении температурных деформаций и напряжений. Метод решения заключается в разложении искомого термомеханического состояния в ряд Фурье по элементам ортонормированного базиса пространства внутренних состояний. В качестве базисных элементов выступают частные решения пространственной неосесимметричной задачи термоупругости для трансверсально-изотропной среды. Приведено решение задачи для кругового цилиндра, находящегося под действием температурного поля, изменяющегося по закону косинуса угловой координаты.

**Ключевые слова:** термоупругость, трансверсально-изотропные материалы, пространство состояний, неосесимметричная деформация

**Для цитирования:** Иванычев Д.А. Решение неосесимметричной задачи термоупругости для трансверсально-изотропных тел вращения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 94. С. 149–162. doi: 10.17223/19988621/94/12

Original article

## Solution to the non-axisymmetric thermoelastic problem for transversely isotropic bodies of rotation

Dmitriy A. Ivanychev

*Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russian Federation, Lsivdmal@mail.ru*

**Abstract.** This paper presents a method for determining the stress-strain state of transversely isotropic bodies of rotation in a steady temperature field varying according to the cyclic law of cosine and sine in a cylindrical coordinate system.

The problem is solved in terms of the definitions of the boundary conditions method. This method is based on the space of internal states, which includes displacements, deformations, stresses, and temperature functions. Using the method of integral superpositions, the relation between the spatial stress-strain state of an elastic transversely isotropic body of rotation and some auxiliary two-dimensional states is determined. The auxiliary states

are presented as a general solution to the plane thermoelastostatic problem for a transversely isotropic material. This general solution is used to construct the basis of internal states. After orthogonalization of the basis, the desired state is expanded into a Fourier series with identical coefficients in the form of quadratures. The problem of the theory of thermoelasticity for a transversally isotropic circular cylinder in a temperature field specified according to a harmonic law is solved.

**Keywords:** thermoelasticity, transversely isotropic materials, state space, non-axisymmetric deformation

**For citation:** Ivanychev, D.A. (2025) Solution to the non-axisymmetric thermoelastic problem for transversely isotropic bodies of rotation. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 94. pp. 149–162. doi: 10.17223/19988621/94/12

## Введение

Решению задач термоупругости для тел из анизотропных материалов с той или иной симметрией упругих свойств посвящено множество публикаций. Например, в работе [1] исследуются задачи термомеханики для неоднородных анизотропных сред. Предлагаемый подход решения задачи предполагает разбиение на подзадачи структурного и параметрического синтеза, каждая из которых решается разными методами. В работе [2] рассмотрена плоская стационарная задача Дирихле, когда на границе тела заданы перемещения и температура. Задача сводится к системе интегральных уравнений, и если граница принадлежит классу Ляпунова, то система разрешима по Фредгольму. В работе [3] рассмотрена осесимметричная задача по определению напряжений в полом цилиндрическом пуансоне при горячем деформировании заготовок. Построению матриц Грина трехмерной теории термоупругости посвящена работа [4]. Представлены интегральный и полиномиальный подходы формирования матриц Грина как часть гранично-элементного моделирования, а также подход на основе двойных рядов Фурье. Ряд работ посвящен исследованию задач термоупругости для слоистых анизотропных материалов; например, в работе [5] представлена неклассическая модель связанной задачи термоупругого деформирования слоистых анизотропных оболочек и пластин. В пространстве изображений по Лапласу строится пространственный функционал, который с учетом допущений удалось свести к двумерному и вывести из него корректные дифференциальные уравнения и связанные краевые условия. В работе [6] представлен метод отсчетных поверхностей для анализа стационарных задач термоупругости для слоистых анизотропных пластин, подвергающихся термической нагрузке. В работе [7] методом граничных элементов рассматривается трехмерная линейная математическая теория термоупругости. Выписаны граничные интегральные уравнения и гранично-элементная схема их решения. В [8] исследуется влияние скачкообразного изменения температуры на напряженное состояние многосвязной анизотропной бесконечной пластинки. Приближенные решения получены численными методами. В работе [9] рассмотрены ортотропные разносопротивляющиеся пластины, обладающие к тому же цилиндрической анизотропией. Рассмотрен термоупругий осесимметричный изгиб кольцевой пластины. Приведены система сложных неоднородных уравнений и результаты их исследования с помощью метода конечных разностей.

В работе [10] с помощью метода граничных состояний для транслопных тел вращения решены осесимметричные задачи термоупругости, когда полученное термоупругое поле не зависит от угловой координаты. В настоящей же работе предложенная методика обобщается на класс пространственных неосесимметричных задач термомеханики.

### 1. Постановка задачи

Рассматривается тело вращения из трансверсально-изотропного материала (рис. 1). Объемные и поверхностные силы отсутствуют; граница тела свободна от защемлений. Пусть в результате некоторого температурного воздействия во всем теле установилось поле температур как функция цилиндрических координат  $T = f(r, \theta, z)$ , определяющая температуру в любой точке тела. При условии, что дополнительные источники тепла (как внешние, так и внутренние) отсутствуют, температура не изменяется со временем.

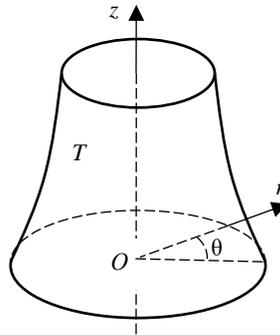


Рис. 1. Трансверсально-изотропное тело вращения  
 Fig. 1. Transversely isotropic body of rotation

Задача состоит в определении напряженно-деформированного состояния, возникающего в теле в результате воздействия данного поля температур.

### 2. Определяющие соотношения

В теории упругости в цилиндрической системе координат между перемещениями  $u, v, w$ , деформациями  $\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z, \gamma_{r\theta}, \gamma_{zr}, \gamma_{z\theta}$ , напряжениями  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{r\theta}, \tau_{zr}, \tau_{z\theta}$ , а также между техническими  $E_z, E_r, \nu_z, \nu_r, G_r, G_z$  и термомеханическими  $k_z, k_r, \alpha_z, \alpha_r$  константами материала имеют место следующие дифференциальные и линейные зависимости (объемные силы отсутствуют) [11]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{zr}}{r} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Соотношения Коши:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}; \\ \gamma_{zr} &= \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; \quad \gamma_{z\theta} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}.\end{aligned}\quad (2)$$

Уравнения совместности деформаций [12]:

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta}) &= 0; \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \varepsilon_{z\theta}}{\partial \theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zr}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial z}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial z} &= 0; \\ -\frac{\partial}{\partial r} (\frac{1}{r} \frac{\partial (r \varepsilon_{z\theta})}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial r} (\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zr}}{\partial \theta}) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zr}}{\partial \theta \partial z} &= 0; \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial z^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{z\theta}}{\partial \theta \partial z} - \frac{2}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zr}}{\partial z} &= 0; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{zr}}{\partial \theta \partial z} + r \frac{\partial}{\partial r} (\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{z\theta}}{\partial z}) - \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial r} (\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial \theta}) &= 0; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zr}}{\partial r \partial z} &= 0.\end{aligned}\quad (3)$$

Обобщенный закон Гука [11]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{E_r} (\sigma_r - \nu_r \sigma_\theta) - \frac{\nu_z}{E_z} \sigma_z + \alpha_r T; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E_z} [\sigma_z - \nu_z (\sigma_r + \sigma_\theta)] + \alpha_z T; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E_r} (\sigma_\theta - \nu_r \sigma_r) - \frac{\nu_z}{E_z} \sigma_z + \alpha_r T; \\ \gamma_{zr} &= \frac{1}{G_z} \tau_{zr}; \quad \gamma_{z\theta} = \frac{1}{G_z} \tau_{z\theta}; \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{G_r} \tau_{r\theta} = \frac{2(1+\nu_r)}{E_r} \tau_{r\theta}.\end{aligned}\quad (4)$$

Уравнение теплопроводности [11]:

$$\frac{k_r}{k_z} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0.\quad (5)$$

### 3. Общее решение задачи

В работе [11] представлено общее решение пространственной краевой задачи статики в виде тригонометрических рядов, в которых в качестве коэффициентов выступают некоторые плоские вспомогательные состояния  $\mathbf{u}^{pl} = \{u_y^{pl}, u_\eta^{pl}, u_z^{pl}\}$ .

Компоненты вектора перемещения этого решения имеют вид:

$$u_n = \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^\pi (u_y^{pl} + u_\eta^{pl}) \cos[(n-1)\beta] d\beta + \int_0^\pi (u_y^{pl} - u_\eta^{pl}) \cos[(n+1)\beta] d\beta \right);$$

$$v_n = \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^\pi (u_y^{pl} + u_\eta^{pl}) \cos[(n-1)\beta] d\beta - \int_0^\pi (u_y^{pl} - u_\eta^{pl}) \cos[(n+1)\beta] d\beta \right); \quad (6)$$

$$w_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u_z^{pl} \cos(n\beta) d\beta; \quad y = r \cos(\beta).$$

Перемещения выражаются рядами

$$u = \sum_{n=a}^b [u_n \cos(n\theta) + u_n \sin(n\theta)];$$

$$v = \sum_{n=a}^b [-v_n \sin(n\theta) + v_n \cos(n\theta)]; \quad (7)$$

$$w = \sum_{n=a}^b [w_n \cos(n\theta) + w_n \sin(n\theta)]; \quad a = 1; \quad b = \infty.$$

Формулы (7) дают компоненты вектора перемещения пространственного неосесимметричного состояния тела. Выражения для напряжений и деформаций пространственного состояния не приведены, однако их можно вычислить с помощью соотношений теории упругости (2) и (4).

Решение (7) вполне пригодно и для решения пространственной термоупругой задачи, если в качестве плоских вспомогательных состояний взять решения плоских задач термоупругости. Пусть тело подвергается действию температуры, изменение которой происходит неравномерно по объему тела. Двумерная задача термоупругости, частные решения которой могут использоваться в качестве плоских вспомогательных состояний в выражениях (6), определена следующими выражениями [11].

Уравнение теплопроводности:

$$\left( k_z \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_r \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) T^{pl}(z, y) = 0,$$

в котором

$$T^{pl} = \frac{g_0}{E_z} \operatorname{Re}[\dot{\varphi}_0(\zeta_0)]; \quad \zeta_0 = z / \gamma_0 + iy; \quad \gamma_0 = \sqrt{k_z / z_r}. \quad (8)$$

Перемещения и напряжения, соответствующие температурному полю [11]:

$$\begin{aligned} u_z^{pl} &= \operatorname{Re}[p_0 \dot{\varphi}_0(\zeta_0)]; \quad u_y^{pl} = \operatorname{Re}[iq_0 \dot{\varphi}_0(\zeta_0)]; \quad u_\eta^{pl} = 0; \\ \sigma_z^{pl} &= -\operatorname{Re}[\gamma_0^2 \dot{\varphi}_0(\zeta_0)]; \quad \sigma_y^{pl} = \operatorname{Re}[\dot{\varphi}_0(\zeta_0)]; \\ \sigma_{zy}^{pl} &= -\operatorname{Re}[\gamma_0 \dot{\varphi}_0(\zeta_0)]; \quad \sigma_\eta^{pl} = \operatorname{Re}[(1 - \varepsilon_0) \dot{\varphi}_0(\zeta_0)], \end{aligned} \quad (9)$$

где  $p_0, q_0, \varepsilon_0$  – константы, зависящие от технических констант материала и коэффициентов температурного расширения  $\alpha_z$  и  $\alpha_r$ ;  $k_z$  и  $k_r$  – коэффициенты теплопроводности в направлении координатных осей;  $\dot{\varphi}_0(\zeta_0)$  – комплексная функция переменной  $\zeta_0$ .

В задаче термоупругости для трансверсально-изотропной среды у плоских вспомогательных состояний депланации не происходит. Переход к пространственным состояниям для тел вращения осуществляется в соответствии с зависимостями (6) и (7).

#### 4. Метод решения задачи

Совокупность компонент вектора перемещения, компонент тензоров деформаций и напряжений, а также функция температуры определяют некоторое термоупругое внутренне состояние среды  $\xi_k = \{u_i^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)}, \sigma_{ij}^{(k)}, T^{(k)}\}$ . Совокупность таких состояний можно организовать в базис конечномерного пространства внутренних состояний [13]

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k, \dots\}.$$

Базис пространства  $\Xi$  можно сконструировать, придавая функции  $\varphi_0$  в (8), (9) последовательно следующие значения:

$$\varphi_0 = \zeta_0^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

тем самым построить набор плоских вспомогательных термоупругих состояний. Затем через интегральные операторы (6) и тригонометрические ряды (7) построить уже множество пространственных состояний для трансверсально-изотропной среды. Это множество и определит базис пространства  $\Xi$ .

Далее базисные элементы пространства внутренних состояний необходимо ортонормировать. На этом этапе вводится геометрия области тела  $V(r, \theta, z)$ . Процесс ортонормирования осуществляется по разработанному рекурсивно-матричному алгоритму ортогонализации [14], в котором перекрестные скалярные произведения вычисляются по формуле

$$(\xi_i, \xi_j) = \int_V T^{(i)} T^{(j)} dV.$$

После построения ортонормированного базиса вычисляются коэффициенты Фурье

$$c_k = \int_V T^{(k)} T dV, \quad (10)$$

где  $T^{(k)}$  – температура в базисном элементе  $\xi_k$ ,  $T$  – заданная температура.

Решение термоупругой задачи есть ряд Фурье

$$\xi_0 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k,$$

или

$$u_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_i^{(k)}; \quad \varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_{ij}^{(k)}; \quad \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_{ij}^{(k)}; \quad T = \sum_{k=1}^{\infty} c_k T^{(k)}. \quad (11)$$

#### 5. Решение задачи

Рассмотрим круговой в плане цилиндр из гипотетического трансверсально-изотропного материала, по свойствам схожего с алевролитом [15]. Так как задача решается в безразмерном виде, то упругие и термомеханические характеристики материала, область тела и заданная функция температуры подлежат процедуре безразмеривания, описание которой проведено в работе [16]. После процедуры безразмеривания параметров задачи упругие характеристики материала:  $E_z = 6.21$ ;  $E_r = 5.68$ ;  $G_r = 2.29$ ,  $G_z = 2.55$ ;  $\nu_z = 0.22$ ;  $\nu_r = 0.24$ ; область цилиндра  $V = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -2 \leq z \leq 2\}$ ; коэффициенты теплопроводности по

осям координат [17]:  $k_z = 1.6$ ,  $k_r = 6.5$ ; коэффициенты температурного расширения [18]:  $\alpha_z = 6.7$ ,  $\alpha_r = 8.6$ . Поле температур зададим функцией  $T = rz^4 \cos \theta$ .

При построении базиса внутренних состояний рекомендации, описанные в работах [19] и [20], пригодны и для построения такового в задаче термоупругости. Так как заданная температура зависит только от косинуса, то базис пространства внутренних состояний будем формировать из левых частей выражений (7):

$$u = \sum_{n=a}^b [u_n \cos(n\theta)]; \quad v = \sum_{n=a}^b [-v_n \sin(n\theta)]; \quad w = \sum_{n=a}^b [w_n \cos(n\theta)], \quad (12)$$

причем так как в заданном поле температур при угловой координате  $n=1$ , то в выражениях (12)  $a=b=1$ .

После построения базиса внутренних состояний по соотношениям (12) проводится ортонормирование его элементов, которое включает в себя исключение линейно зависимых элементов, а также элементов, для которых  $T=0$ . Функции температуры в ортонормированных базисных элементах представлены в табл. 1 (показано 4 элемента).

Таблица 1

Функции температуры в ортонормированных базисных элементах

Элементы	$T$
$\xi_1$	$0.564 r \cos \theta$
$\xi_2$	$0.488 rz \cos \theta$
$\xi_3$	$(-0.611 - 0.029 r^3 + 0.473 rz^2) \cos \theta$
$\xi_4$	$(-1.061 rz - 0.086 r^3 z + 0.473 rz^3) \cos \theta$

Для решения задачи потребовался базис внутренних состояний из 50 элементов. Коэффициенты Фурье (10)

$$c_k = \{5.6718; 0; 7.2467; 0; 2.1447; 0; -0.0778; 0; -0.11246; 0; -0,0871 \dots\}.$$

Решение формируется рядами (11).

Хоть и косвенно, но исследовать полученные ряды на сходимость возможно, используя «насыщение» (рис. 2) суммы Бесселя (левая часть неравенства Бесселя).

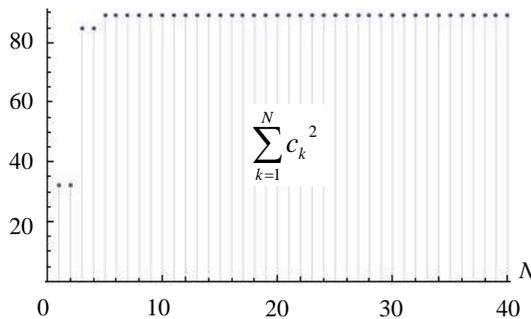
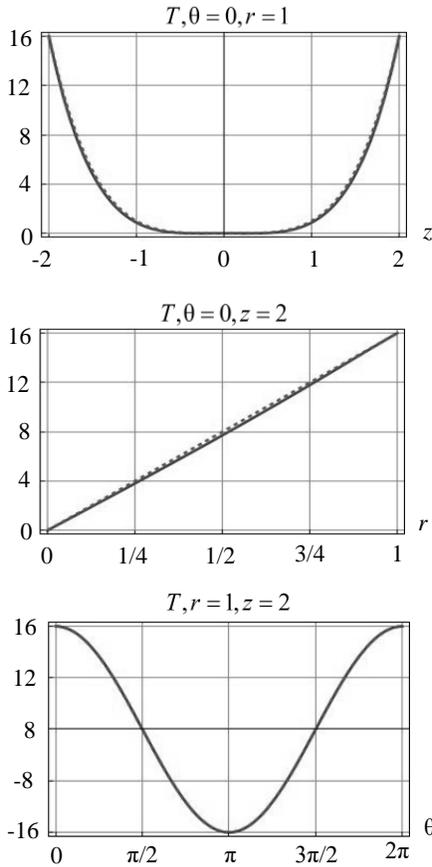


Рис. 2. Сумма Бесселя  
Fig. 2. Bessel sum

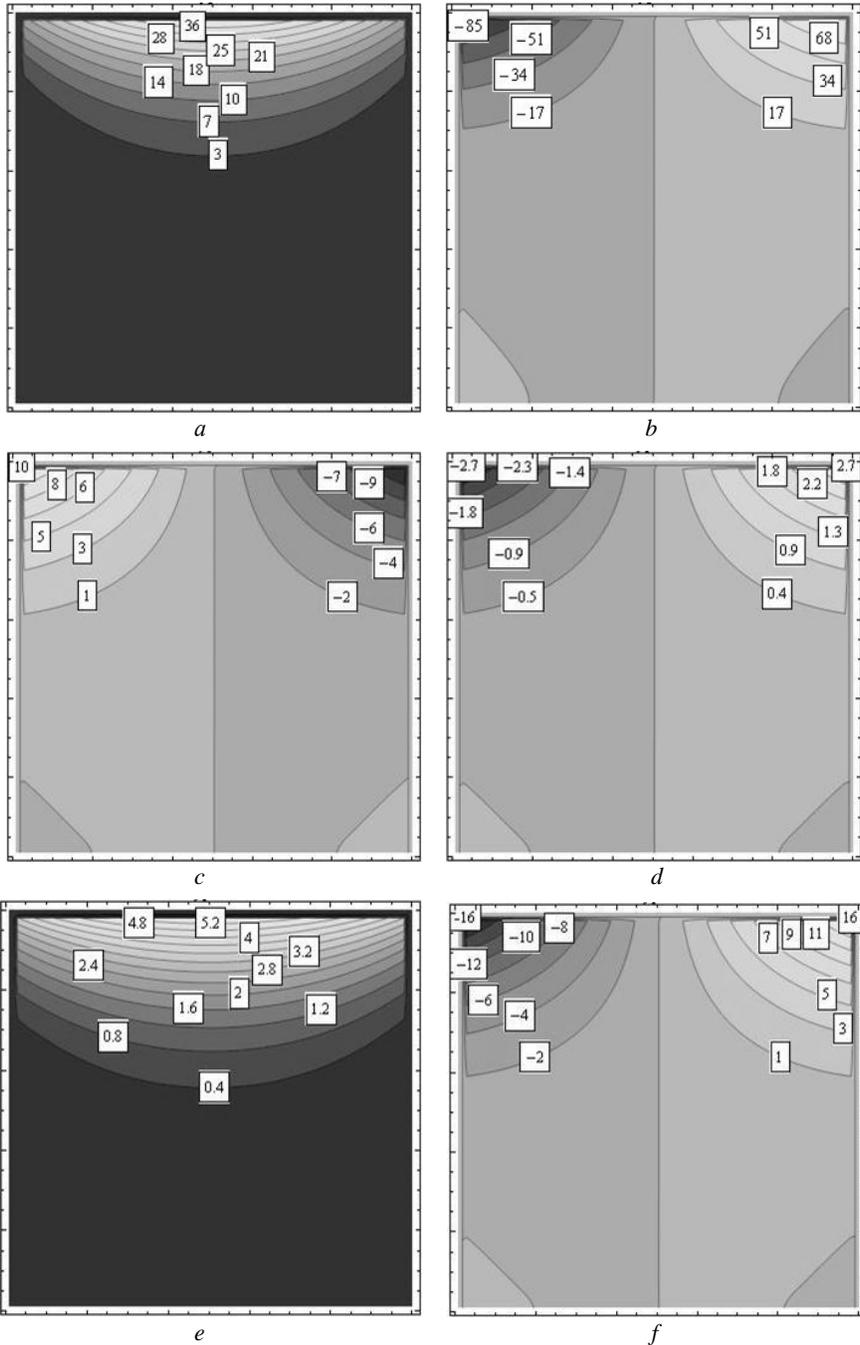
Также оценка точности осуществляется верификацией заданной функции температуры с полученной в результате решения. На рис. 3 приведено сравнение функций температур на границе тела. Заданная функция – штриховая линия; восстановленная – сплошная линия.



**Рис. 3.** Верификация решения  
**Fig. 3.** Solution verification

Анализ полученного решения показал, что максимальная относительная погрешность составила 3.6% (средний график, координаты точки  $r = 0.5, \theta = 0, z = 2$ ). Точность решения задачи повышается при увеличении числа используемых элементов базиса внутренних состояний.

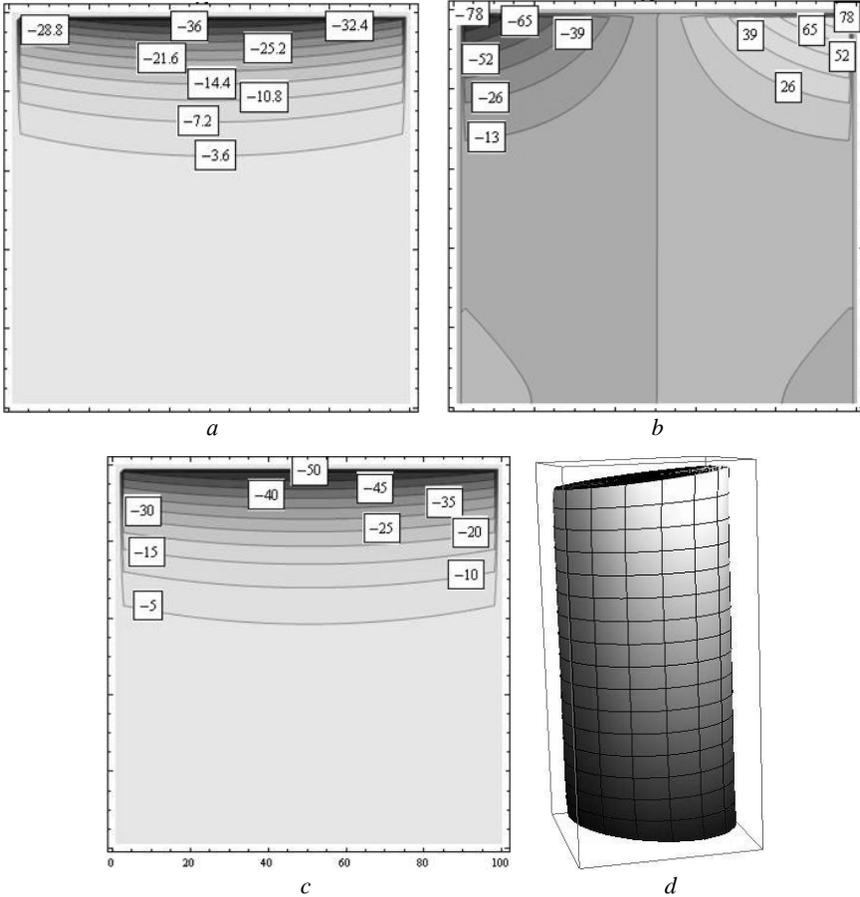
Компоненты термоупругого поля показаны на рис. 4. в виде изолиний. В силу симметрии компонент напряженно-деформированного состояния (НДС) относительно плоскости  $z = 0$  показано меридианное сечение с  $\theta = 0$  и  $0 \leq z \leq 2$ . Значения на графике указаны в масштабе с масштабным коэффициентом  $k$ , т.е истинное значение показанной характеристики НДС равно значению на графике, умноженному на  $k$ . Все характеристики показаны для меридианного сечения с угловой координатой  $\theta = 0$ .



**Рис. 4.** Изолинии: *a* – перемещение  $u$ ,  $\kappa = 1$ , *b* – перемещение  $w$ ,  $\kappa = 1$ , *c* – напряжение  $\sigma_{rr}$ ,  $\kappa = 10^2$ , *d* – напряжение  $\sigma_{zz}$ ,  $\kappa = 10^2$ , *e* – напряжение  $\tau_{rz}$ ,  $\kappa = 10^2$ , *f* – температура  $T$ ,  $\kappa = 1$

**Fig. 4.** Isolines of (a) displacement  $u$ ,  $\kappa = 1$ , (b) displacement  $w$ ,  $\kappa = 1$ , (c) stress  $\sigma_{rr}$ ,  $\kappa = 10^2$ , (d) stress  $\sigma_{zz}$ ,  $\kappa = 10^2$ , (e) stress  $\tau_{rz}$ ,  $\kappa = 10^2$ , and (f) temperature  $T$ ,  $\kappa = 1$

Компоненты упругого состояния  $\nu$ ,  $\tau_{r\theta}$ ,  $\tau_{z\theta}$  зависят от  $\sin \theta$ , поэтому их изолинии представим в сечении с  $\theta = \pi/2$  (рис. 5). На рис 5,  $d$  представлен контур деформированного состояния тела.



**Рис. 5.** Изолинии:  $a$  – перемещение  $\nu$ ,  $\kappa = 1$ ,  $b$  – напряжение  $\sigma_\theta$ ,  $\kappa = 1$ ,  $c$  – напряжение  $\sigma_{z\theta}$ ,  $\kappa = 10$ ,  $d$  – контур деформированного состояния тела  
**Fig. 5.** Isolines of (a) displacement  $\nu$ ,  $\kappa = 1$ , (b) stress  $\sigma_\theta$ ,  $\kappa = 1$ , and (c) stress  $\sigma_{z\theta}$ ,  $\kappa = 10$ ; (d) outline of the body under deformed conditions

Полученные компоненты термоупругого поля строго удовлетворяют соотношениям (1)–(5).

### Заключение

Аналитический метод построения пространственных неосесимметричных термоупругих полей заключается в следующем. На основе общего решения, дающего температурные деформации и напряжения двумерного состояния трансверсально-изотропного тела, строится конечное множество плоских вспомогательных состо-

яний. Используя решение, представляющее собой, по сути, разложение пространственного состояния в тригонометрический ряд по плоским вспомогательным состояниям, осуществляется переход к множеству пространственных неосесимметричных состояний. Это множество определяет пространство внутренних состояний в аппарате метода граничных состояний. Далее осуществляется ортонормирование этого базиса и исключение линейно зависимых элементов, а также элементов, для которых температура равна нулю, после чего искомые компоненты термоупругого поля определяются через ряды Фурье с одинаковыми коэффициентами. Коэффициенты рядов представляют собой скалярные произведения поля заданных температур и элементов поля температур в базисных элементах пространства внутренних состояний. Компоненты термоупругого поля зависят от всех трех координат и носят неосесимметричный характер.

Предложенная методика непригодна для многосвязных тел, так как при выводе формул общего решения (7) применялось интегрирование по пути, не выходящему за пределы области тела.

Предложенная методика, однако, не является общей для любого класса рассматриваемых областей (односвязных и многосвязных) и вида заданной функции.

Если заданную функцию, описывающую температурное поле внутри тела, возможно разложить в тригонометрический ряд по косинусам или синусам, то, не исключая принципа независимости действия сил, данная методика вполне применима для тех случаев, когда заданная функция температуры не носит циклического характера.

#### Список источников

1. Ломазов В.А., Ломазова В.И. Построение математической модели при решении задач термомеханики // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4 (4). С. 1582–1584.
2. Бодан Ю.А. Задача Дирихле в двумерной стационарной анизотропной термоупругости // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки. 2010. № 5 (21). С. 64–71.
3. Фатеев В.И. Термоупругие напряжения в полой осесимметричной водоохлаждаемой пуансоне горячего деформирования // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2009. № 1-1. С. 98–104.
4. Пазин В.П. Сравнительный анализ подходов к построению матрицы Грина трехмерной теории термоупругости // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2014. № 4 (1). С. 250–253.
5. Андреев А.Н. Математическая модель термоупругого деформирования слоистых композитных оболочек и пластин // Известия Алтайского государственного университета. 2014. № 1 (81). С. 19–21.
6. Kulikov G.M., Mamontov A.A. Three-dimensional thermoelastic analysis of laminated anisotropic plates // Вестник Тамбовского государственного технического университета. 2013. Т. 19, № 4. С. 853–863.
7. Ратаушко Я.Ю. Анализ термоупругой динамики трехмерных тел методом граничных элементов // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4 (4). С. 1736–1737.
8. Глушанков Е.С. Приближенное решение задачи термоупругости для многосвязной анизотропной пластинки при скачках температуры на контурах // Журнал теоретической и прикладной механики. 2022. № 3 (80). С. 3–13. doi: 10.24412/0136-4545-2022-3-5-13

9. Самсоненко Г.И., Трещев А.А. Термоупругий изгиб кольцевых пластин средней толщины из ортотропных разносопротивляющихся материалов // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2012. Вып. 1. С. 238–244.
10. Иванов Д.А. Решение задач термоупругости для анизотропных тел вращения // Труды МАИ. 2019. № 106. С. 1–19.
11. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости (применение методов теории функций комплексного переменного). М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1978. 464 с.
12. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Госиздат техн.-теор. лит., 1955. 491 с.
13. Пеньков В.Б., Пеньков В.В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики // Дальневосточный математический журнал. 2001. Т. 2, № 2. С. 115–137.
14. Саталкина Л.В. Наращивание базиса пространства состояний при жестких ограничениях к энергоемкости вычислений // Сборник тезисов докладов научной конференции студентов и аспирантов Липецкого государственного технического университета. Липецк : Изд-во ЛГТУ, 2007. С. 130–131.
15. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. 2-е изд. М.: Наука, 1977. 416 с.
16. Левина Л.В., Новикова О.С., Пеньков В.Б. Полнопараметрическое решение задачи теории упругости односвязного ограниченного тела // Вестник Липецкого государственного технического университета. 2016. № 2 (28). С. 16–24.
17. Юдин В.А., Королёв А.В., Афанаскин И.В., Вольпин С.Г. Теплоемкость и теплопроводность пород и флюидов баженовской свиты – исходные данные для численного моделирования тепловых способов разработки. М.: ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, 2015. 22 с.
18. Физические свойства горных пород и полезных ископаемых (петрофизика) : справочник геофизика / под ред. Н.Б. Дортман. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Недра, 1984. 455 с.
19. Иванов Д.А. Решение неосесимметричной задачи эластостатики для трансверсально-изотропного тела вращения // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2022. № 2 (101). С. 4–21. doi: 10.18698/1812-3368-2022-2-4-21
20. Иванов Д.А., Левина Л.В. Определение неосесимметричных упругих полей в анизотропных телах вращения, вызванных действием объемных сил // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2022. № 4 (103). С. 22–38. doi: 10.18698/1812-3368-2022-4-22-38

## References

1. Lomazov V.A., Lomazova V.I. (2011) Postroenie matematicheskoy modeli pri reshenii zadach termomekhaniki [Construction of a mathematical model for solving problems of thermomechanics]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo – Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*. 4(4). pp. 1582–1584.
2. Bogdan Yu.A. (2010) Zadacha Dirikhle v dvumernoy stacionarnoy anizotropnoy teormouprugosti [Dirichlet problem in two-dimensional stationary anisotropic thermoelasticity]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki – Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 5(21). pp. 64–71.
3. Fateev V.I. (2009) Termouprugie napryazheniya v polom osesimmetrichnom vodookhlazhdaemom puansone goryachego deformirovaniya [Thermoelastic stresses in a hollow axisymmetric water-cooled punch of hot deformation]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskoe nauki – Izvestiya Tula State University. Technical Sciences*. 1-1. pp. 98–104.
4. Pazin V.P. (2014) Ssravnitel'nyy analiz podkhodov k postroeniyu matritsy Grina trekhmernoy teorii termouprugosti [Comparative analysis of approaches to constructing the Green's matrix of the three-dimensional theory of thermoelasticity]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo – Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*. 4(1). pp. 250–253.

5. Andreev A.N. (2014) Matematicheskaya model' termouprugogo deformirovaniya sloistnykh kompozitnykh obolochek i plastin [Mathematical model of thermoelastic deformation of layered composite shells and plates]. *Izvestiya Altayskogo gosudarstvennogo universiteta – Izvestiya of Altai State University*. 1(81). pp. 19–21.
6. Kulikov G.M., Mamontov A.A. (2013) Three-dimensional thermoelastic analysis of laminated anisotropic plates. *Transactions TSTU*. 19(4). pp. 853–863.
7. Rataushko Ya.Yu. (2011) Analiz termouprugoy dinamiki trekhmernykh tel metodom granichnykh elementov [Analysis of thermoelastic dynamics of three-dimensional bodies using the boundary element method]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo – Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*. 4(4). pp. 1736–1737.
8. Glushankov E.S. (2022) Priblizhennoe reshenie zadachi termouprugosti dlya mnogosvyaznoy anizotropnoy plastinki pri skachkakh temperatury na konturakh [Approximate solution of the thermoelasticity problem for a multiply connected anisotropic plate with temperature jumps on the contours]. *Zhurnal teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki – Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 3(80). pp. 3–13. doi: 10.24412/0136-4545-2022-3-5-13
9. Samsonenko G.I., Treshchov A.A. (2012) Termouprugiy izgib kol'tsevykh plastin sredney tolshchiny iz ortotropnykh raznosoprotivlyayushchikhsya materialov [Thermoelastic bending of medium-thick annular plates made of orthotropic materials of different resistance]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki – Izvestiya Tula State University. Technical Sciences*. 1. pp. 238–244.
10. Ivanychev D.A. (2019) Reshenie zadach termouprugosti dlya anizotropnykh tel vrashcheniya [Solution of thermoelasticity problems for anisotropic bodies of rotation]. *Trudy MAI*. 106. pp. 1–19.
11. Aleksandrov A.Ya., Solov'yov Yu.I. (1978) *Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti (primeneniye metodov teorii funktsii kompleksnogo peremennogo)* [Spatial problems of the theory of elasticity (application of methods of the theory of functions of a complex variable)]. Moscow: Nauka.
12. Lur'e A.I. (1955) *Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti* [Spatial problems of the theory of elasticity]. Moscow: Gosizdat tekhniko-teoreticheskoy literatury.
13. Penkov V.B., Penkov V.V. (2001) Metod granichnykh sostoyaniy dlya resheniya zadach lineynoy mekhaniki [The method of boundary states for solving problems of linear mechanics]. *Dal'nevostochnyy matematicheskiy zhurnal – Far Eastern Mathematical Journal*. 2(2). pp. 115–137.
14. Satalkina L.V. (2007) Narashchivanie bazisa prostranstva sostoyanii pri zhestkikh ogranicheniyakh k energiyomkosti vychisleniy [Expansion of the basis of the state space with severe limitations on the energy consumption of computations]. *Sbornik tezisov dokladov nauchnoy konferentsii studentov i aspirantov Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – The Collected Abstracts of the Reports on the Scientific Conference for Students and Post-graduates of Lipetsk State Technical University*. pp. 130–131.
15. Lekhnitskiy S.G. (1977) *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela* [Theory of elasticity of an anisotropic body]. Moscow: Nauka.
16. Levina L.V., Novikova O.S., Penkov V.B. (2016) Polnparametricheskoe reshenie zadachi teorii uprugosti odnosvyaznogo ogranichennogo tela [Full-parameter solution of the problem of the theory of elasticity of a simply connected bounded body]. *Vestnik LGTU – Vestnik LSTU*. 2 (28). pp. 16–24.
17. Yudin V.A., Korolyov A.V., Afanaskin I.V., Vol'pin S.G. (2015) *Teployomkost' i teploprovodnost' porod i flyuidov Bazhenovskoy svity – iskhodnye dannye dlya chislennogo modelirovaniya teplovykh sposobov razrabotki* [Heat capacity and thermal conductivity of rocks and fluids of the Bazhenov formation – initial data for numerical modeling of thermal development methods]. Moscow: FGU FNTS NIISI RAN.
18. Ed. by Dortman N.B. (1984) *Fizicheskie svoystva gornykh porod i poleznykh iskopaemykh (petrofizika). Spravochnik geofizika* [Physical properties of rocks and minerals (petrophysics). Handbook of geophysical exploration]. Moscow: Nedra.

19. Ivanychev D.A. (2022) Reshenie neosesimmetrichnoy zadachi elastostatiki dlya transversal'no-izotropnogo tela vrashcheniya [Solution of a non-axisymmetric elastostatics problem for a transversely isotropic body of rotation]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennyye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences.* 2(101). pp. 4–21. doi: 10.18698/1812-3368-2022-2-4-21
20. Ivanychev D.A., Levina L.V. (2022) Opredeleniye neosesimmetrichnykh uprugikh poley v anizotropnykh telakh vrashcheniya, vyzvannykh deystviyem ob'yemnykh sil [Determination of non-axisymmetric elastic fields in anisotropic bodies of rotation caused by the action of body forces]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennyye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences.* 3(103). pp. 22–38. doi: 10.18698/1812-3368-2022-4-22-38

**Сведения об авторе:**

**Иванычев Дмитрий Алексеевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей механики Липецкого государственного технического университета (Липецк, Россия). E-mail: Lsivdmal@mail.ru

**Information about the author:**

**Ivanychev Dmitriy A.** (Candidate of Physics and Mathematics, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russian Federation). E-mail: Lsivdmal@mail.ru

*Статья поступила в редакцию 16.04.2024; принята к публикации 10.04.2025*

*The article was submitted 16.04.2024; accepted for publication 10.04.2025*