ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2025 Управление, вычислительная техника и информатика № 71
Tomsk State University Journal of Control and Computer Science

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

CONTROL OF DYNAMICAL SYSTEMS

Научная статья
УДК 681.5:517
doi: 10.17223/19988605/71/1

Формулы обращения квадратных матриц, разбитых на прямоугольные блоки, и их применение в модальном управлении

Николай Евгеньевич Зубов[1], Алексей Владимирович Лапин[2], Владимир Николаевич Рябченко[3]

[1, 2, 3] Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
[1] nik.zubov@gmail.com
[2] AlexeyPoeme@yandex.ru
[3] ryabchenko.vn@mail.ru

Аннотация. Получены новые формулы обращения квадратных матриц, разбитых по строкам или столбцам на прямоугольные блоки. Наряду с формулами Фробениуса, где диагональные блоки являются квадратными, новые формулы, построенные с помощью матричных аннуляторов, позволяют упростить обращение блочной матрицы большой размерности, заменяя его обращением двух матриц меньшей размерности. Формулы пригодны для обращения матриц, записанных как в числовом (вещественном или комплексном), так и в аналитическом (символьном) виде. Для определенного широкого класса линейных стационарных динамических систем с использованием новых формул блочного обращения получены компактные аналитические алгоритмы вычисления матриц обратной связи при решении задач управления и оценки компонент вектора состояния. Эти алгоритмы являются упрощением обобщенных формул Басса–Гура и Аккермана в прямом и дуальном вариантах. Приведены примеры обращения матриц, разбитых на прямоугольные блоки: числовой матрицы с комплексными элементами, а также символьной матрицы. Решена задача модального управления пространственным движением самолета с использованием предложенного упрощения обобщенной формулы Аккермана, за счет удобной параметризации, не влияющей на расположение полюсов, выполнено обнуление требуемых компонент матрицы регулятора.

Ключевые слова: блочная матрица; прямоугольный блок; блочное обращение, матричный аннулятор; модальное управление; обобщенная формула Басса–Гура; обобщенная формула Аккермана.

Для цитирования: Зубов Н.Е., Лапин А.В., Рябченко В.Н. Формулы обращения квадратных матриц, разбитых на прямоугольные блоки, и их применение в модальном управлении // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2025. № 71. С. 4–16. doi: 10.17223/19988605/71/1

Original article
doi: 10.17223/19988605/71/1

Formulas for inverting square matrices divided into rectangular blocks and their application in modal control

Nikolay E. Zubov[1], Alexey V. Lapin[2], Vladimir N. Ryabchenko[3]

[1, 2, 3] Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
[1] nik.zubov@gmail.com
[2] AlexeyPoeme@yandex.ru
[3] ryabchenko.vn@mail.ru

Abstract. New formulas for inverting square matrices divided into rectangular blocks by rows or columns are obtained. Along with Frobenius formulas, where diagonal blocks are square, the new formulas constructed using matrix zero divisors make it possible to simplify inverting a block matrix of large dimensions by inverting two matrices of smaller dimensions. The formulas are applicable for inverting matrices written both in numerical (real or complex) and analytical (symbolic) form. For a certain wide class of linear time-invariant dynamic systems, compact analytical algorithms for calculating feedback matrices at solving control problems and evaluating components of the state vector are obtained using new formulas of block inversion. These algorithms are to simplify the generalized formulas of Bass – Gura and Ackermann both in direct and in dual versions. Examples of inverting some matrices divided into rectangular blocks are given for both a numerical matrix with complex-valued elements and a symbolic matrix. The problem of modal control of an aircraft spatial motion is solved using the proposed simplification of the generalized Ackermann formula and zeroing the required components of the controller matrix due to convenient parameterization, which does not affect the poles location.

Keywords: block matrix; rectangular block; block inversion; matrix zero divisor; modal control; generalized Bass–Gura formula; generalized Ackermann formula.

***For citation*:** Zubov, N.E., Lapin, A.V., Ryabchenko, V.N. (2025) Formulas for inverting square matrices divided into rectangular blocks and their application in modal control. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 71. pp. 4–16. doi: 10.17223/19988605/71/1

Введение

Математический аппарат блочного представления квадратных матриц [1] находит широкое применение в прикладных научно-технических задачах для линейных стационарных систем (ЛСС), например в задачах управления [2], наблюдения [3], мониторинга [4] и реконфигурации [5]. Наиболее успешно используется разбиение на квадратные блоки [6]. Для таких блочных матриц используются формулы обращения Фробениуса [7]. Однако возникает потребность в разбиении квадратной матрицы на прямоугольные блоки и нахождении обратной матрицы при таком разбиении [8, 9]. Известные подходы в этом направлении существенно ограничены. Так, например, в [10. С. 148] приведена формула, позволяющая обратить квадратную матрицу $\mathbf{A} \in \Re^{n \times n}$, где $\Re = \mathbb{R}$ (вещественные числа) или $\Re = \mathbb{C}$ (комплексные числа), если эта матрица разбита на прямоугольные блоки следующим образом:

$$\mathbf{A} = \left[\mathbf{A}_1 \;\vdots\; \mathbf{A}_2\right], \quad \mathbf{A}_1 \in \Re^{n \times n_1}, \quad \mathbf{A}_2 \in \Re^{n \times n_2}, \quad n = n_1 + n_2. \tag{1}$$

При условии, что выполняется равенство

$$\mathbf{A}_1^{\mathrm{T}} \mathbf{A}_2 = \mathbf{0}_{n_1 \times n_2}, \tag{2}$$

где $\mathbf{0}_{n_1 \times n_2}$ – нулевая матрица размерности $n_1 \times n_2$, имеет место формула обращения [10]

$$\mathbf{A}^{-1} = \left[\mathbf{A}_1 \;\vdots\; \mathbf{A}_2\right]^{-1} = \begin{bmatrix} \left(\mathbf{A}_1^* \mathbf{A}_1\right)^{-1} \mathbf{A}_1^* \\ \left(\mathbf{A}_2^* \mathbf{A}_2\right)^{-1} \mathbf{A}_2^* \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Здесь верхним индексом * обозначена операция эрмитова сопряжения [11] для случая $\Re = \mathbb{C}$. При $\Re = \mathbb{R}$ формулу (3) можно упростить до следующей:

$$\mathbf{A}^{-1} = \left[\mathbf{A}_1 \;\vdots\; \mathbf{A}_2\right]^{-1} = \begin{bmatrix} \left(\mathbf{A}_1^{\mathrm{T}} \mathbf{A}_1\right)^{-1} \mathbf{A}_1^{\mathrm{T}} \\ \left(\mathbf{A}_2^{\mathrm{T}} \mathbf{A}_2\right)^{-1} \mathbf{A}_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}.$$

Формулы обращения матрицы (1), сходные по структуре формуле (3), были получены на основе приведения к каноническому базису сначала в [12], а затем (через два года) в [13]. В настоящей работе представлена универсальная формула обращения матрицы (1), также подобная по структуре формуле (3), но полученная на основе техники аннуляторов (делителей нуля).

1. Теоретический результат

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть задана квадратная неособенная матрица* $\mathbf{A} \in \Re^{n \times n}$*, разбитая горизонтально на прямоугольные блоки* (1)

$$\mathbf{A} = \left[\mathbf{A}_1 \;\vdots\; \mathbf{A}_2\right], \quad \mathbf{A}_1 \in \Re^{n\times n_1}, \quad \mathbf{A}_2 \in \Re^{n\times n_2}, \quad n = n_1 + n_2,$$

и для каждого из блоков найдены левые аннуляторы максимального ранга (АМР) [14]*, т.е. любые матрицы* $\overline{\mathbf{A}_1}^L$ *и* $\overline{\mathbf{A}_2}^L$*, удовлетворяющие условиям*

$$\overline{\mathbf{A}_1}^L \mathbf{A}_1 = \mathbf{0}_{n_2\times n_1}, \quad \operatorname{rank}\overline{\mathbf{A}_1}^L = n_2; \tag{4}$$

$$\overline{\mathbf{A}_2}^L \mathbf{A}_2 = \mathbf{0}_{n_1\times n_2}, \quad \operatorname{rank}\overline{\mathbf{A}_2}^L = n_1. \tag{5}$$

Тогда формула для обратной матрицы имеет вид:

$$\mathbf{A}^{-1} = \left[\mathbf{A}_1 \;\vdots\; \mathbf{A}_2\right]^{-1} = \begin{bmatrix} \left(\overline{\mathbf{A}_2}^L \mathbf{A}_1\right)^{-1} \overline{\mathbf{A}_2}^L \\ \left(\overline{\mathbf{A}_1}^L \mathbf{A}_2\right)^{-1} \overline{\mathbf{A}_1}^L \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Доказательство. Докажем обратимость произведений $\overline{\mathbf{A}_2}^L \mathbf{A}_1$ и $\overline{\mathbf{A}_1}^L \mathbf{A}_2$. Предположим, что матрица $\overline{\mathbf{A}_2}^L \mathbf{A}_1$ вырожденная, т.е. у нее найдется линейно зависимая комбинация строк:

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \overline{\mathbf{A}_2}^L \mathbf{A}_1 = \mathbf{0}_{1\times n_1},$$

где $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \in \Re^{1\times n_1}$ – ненулевой вектор. Тогда вектор $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \overline{\mathbf{A}_2}^L$ окажется левым аннулятором матрицы **A**, поскольку

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \overline{\mathbf{A}_2}^L \underbrace{\left[\mathbf{A}_1 \;\vdots\; \mathbf{A}_2\right]}_{\mathbf{A}} = \left[\mathbf{0}_{1\times n_1} \;\vdots\; \mathbf{0}_{1\times n_2}\right] = \mathbf{0}_{1\times n}.$$

Но у квадратной неособенной матрицы **A** не может быть аннуляторов. Полученное противоречие доказывает обратимость матрицы $\overline{\mathbf{A}_2}^L \mathbf{A}_1$. Аналогично доказывается обратимость матрицы $\overline{\mathbf{A}_1}^L \mathbf{A}_2$.

Далее для доказательства теоремы в силу невырожденности матрицы **A** достаточно показать, что независимо от конкретного выбора левых АМР $\overline{\mathbf{A}_1}^L$ и $\overline{\mathbf{A}_2}^L$ выполняется тождество [14]

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n, \tag{7}$$

где $\mathbf{I}_n$ – единичная матрица порядка n.

Общие выражения $\boldsymbol{\Omega}_{L1}\overline{\mathbf{A}_1}^L$ и $\boldsymbol{\Omega}_{L2}\overline{\mathbf{A}_2}^L$ для левых АМР, удовлетворяющих условиям (4) и (5) соответственно, записываются через произвольные квадратные неособенные матрицы $\boldsymbol{\Omega}_{L1}$ и $\boldsymbol{\Omega}_{L2}$ подходящей размерности [14].

Выполним умножение матриц (6) и (1):

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left(\boldsymbol{\Omega}_{L2}\overline{\mathbf{A}_2}^L \mathbf{A}_1\right)^{-1} \boldsymbol{\Omega}_{L2}\overline{\mathbf{A}_2}^L \\ \left(\boldsymbol{\Omega}_{L1}\overline{\mathbf{A}_1}^L \mathbf{A}_2\right)^{-1} \boldsymbol{\Omega}_{L1}\overline{\mathbf{A}_1}^L \end{bmatrix} \left[\mathbf{A}_1 \;\vdots\; \mathbf{A}_2\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\overline{\mathbf{A}_2}^L \mathbf{A}_1\right)^{-1} \overline{\mathbf{A}_2}^L \mathbf{A}_1 & \vdots & \left(\overline{\mathbf{A}_2}^L \mathbf{A}_1\right)^{-1} \overline{\mathbf{A}_2}^L \mathbf{A}_2 \\ \left(\overline{\mathbf{A}_1}^L \mathbf{A}_2\right)^{-1} \overline{\mathbf{A}_1}^L \mathbf{A}_1 & \vdots & \left(\overline{\mathbf{A}_1}^L \mathbf{A}_2\right)^{-1} \overline{\mathbf{A}_1}^L \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_1} & \vdots & \mathbf{0}_{n_1\times n_2} \\ \mathbf{0}_{n_2\times n_1} & \vdots & \mathbf{I}_{n_2} \end{bmatrix} = \mathbf{I}_n.$$

При формировании нулевых блоков учтены свойства (4) и (5) левых АМР. Таким образом, тождество (7) доказано. *Доказательство завершено.*

В силу симметрии справедливо также другое утверждение.

Теорема 2. *Пусть задана квадратная неособенная матрица* $\mathbf{B} \in \Re^{n\times n}$*, разбитая вертикально на прямоугольные блоки*

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 \in \Re^{n_1\times n}, \quad \mathbf{B}_2 \in \Re^{n_2\times n}, \quad n = n_1 + n_2,$$

и для каждого из блоков найдены правые АМР [15], *т.е. любые матрицы* $\overline{\mathbf{B}_1}^R$ *и* $\overline{\mathbf{B}_2}^R$, *удовлетворяющие условиям*

$$\mathbf{B}_1\overline{\mathbf{B}_1}^R = \mathbf{0}_{n_1\times n_2}, \quad \operatorname{rank}\overline{\mathbf{B}_1}^R = n_2;$$

$$\mathbf{B}_2\overline{\mathbf{B}_2}^R = \mathbf{0}_{n_2\times n_1}, \quad \operatorname{rank}\overline{\mathbf{B}_2}^R = n_1.$$

Тогда формула для обратной матрицы имеет вид:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix}\mathbf{B}_1\\ \mathbf{B}_2\end{bmatrix}^{-1} = \left[\overline{\mathbf{B}_2}^R\left(\mathbf{B}_1\overline{\mathbf{B}_2}^R\right)^{-1} \;\vdots\; \overline{\mathbf{B}_1}^R\left(\mathbf{B}_2\overline{\mathbf{B}_1}^R\right)^{-1}\right]. \tag{8}$$

2. Применение блочного обращения в модальном управлении

Обращение матриц, состоящих из двух и более прямоугольных блоков, используется в обобщенных формулах Басса–Гура [8] и Аккермана [9]. При этом теорема 1 и формула (6) актуальны для прямого варианта (задачи модального управления) [16], а теорема 2 и формула (8) – для дуального варианта (задачи модального наблюдения) [17].

В качестве применения рассмотрим использование блочного обращение (6) и (8) для модификации (упрощения) обобщенных формул Аккермана [9].

Пусть задана ЛСС с матрицами состояния $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ и управления $\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{n\times m}$, для которой справедливы равенства:

$$n = 2m, \quad \det\underbrace{\left[\mathbf{B} \;\vdots\; \mathbf{AB}\right]}_{\mathbf{U}} \neq 0.$$

Требуется определить матрицу регулятора $\mathbf{K}\in\mathbb{R}^{m\times n}$, обеспечивающую матрице замкнутой ЛСС «объект–регулятор» $\mathbf{A}-\mathbf{BK}$ желаемый характеристический полином $p_B^*(\lambda)$.

Обобщенная формула Аккермана [9] для расчета матрицы регулятора в рассматриваемой задаче имеет вид:

$$\mathbf{K} = \left[\mathbf{P}_{B2} \;\vdots\; \mathbf{P}_{B1} \;\vdots\; \mathbf{I}_m\right]\begin{bmatrix}\mathbf{C}_B\\ \mathbf{C}_B\mathbf{A}\\ \mathbf{C}_B\mathbf{A}^2\end{bmatrix}, \tag{9}$$

где блоки $\mathbf{P}_{B1}\in\mathbb{R}^{m\times m}$ и $\mathbf{P}_{B2}\in\mathbb{R}^{m\times m}$ таковы, что

$$\det\left(\lambda^2\mathbf{I}_m + \lambda\mathbf{P}_{B1} + \mathbf{P}_{B2}\right) = p_B^*(\lambda). \tag{10}$$

В формуле (9) используется *только нижняя блочная строка*

$$\mathbf{C}_B = \left[\mathbf{0}_{m\times m} \;\vdots\; \mathbf{I}_m\right]\mathbf{U}^{-1} = \left(\overline{\mathbf{B}}^L\mathbf{AB}\right)^{-1}\overline{\mathbf{B}}^L \tag{11}$$

обратной матрицы управляемости $\mathbf{U}^{-1}$, записанной согласно формуле (6):

$$\mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix}\left(\overline{\mathbf{AB}}^L\mathbf{B}\right)^{-1}\overline{\mathbf{AB}}^L\\ \left(\overline{\mathbf{B}}^L\mathbf{AB}\right)^{-1}\overline{\mathbf{B}}^L\end{bmatrix}.$$

Поэтому нет необходимости полностью рассчитывать обратную матрицу $\mathbf{U}^{-1}$ порядка *n*. Достаточно обратить матрицу вдвое меньшего порядка *m*:

$$\mathbf{B}_1 = \overline{\mathbf{B}}^L\mathbf{AB}. \tag{12}$$

Пусть, кроме того, используется преобразование подобия [18]:

$$\mathbf{P}_{B1} = \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{P}_{B1}^*\mathbf{B}_1, \quad \mathbf{P}_{B2} = \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{P}_{B2}^*\mathbf{B}_1.$$

Тогда формула (9) для расчета регулятора после подстановки матрицы (11) с учетом обозначения (12) упрощается и принимает вид:

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}_1^{-1}\left[\mathbf{P}_{B2}^* \;\vdots\; \mathbf{P}_{B1}^* \;\vdots\; \mathbf{I}_m\right]\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{B}}^L \\ \overline{\mathbf{B}}^L\mathbf{A} \\ \overline{\mathbf{B}}^L\mathbf{A}^2 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

а в силу тождества (10) остается справедливым равенство полиномов

$$\det\left(\lambda^2\mathbf{I}_m + \lambda\mathbf{P}_{B1}^* + \mathbf{P}_{B2}^*\right) = p_B^*\left(\lambda\right). \tag{14}$$

Модификация обобщенной дуальной формулы Аккермана. Пусть задана ЛСС с матрицами состояния $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и наблюдения $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{l\times n}$, для которой справедливы равенства

$$n = 2l, \quad \det\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \neq 0.$$

Требуется определить матрицу наблюдателя $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n\times l}$, обеспечивающую матрице замкнутой ЛСС «объект–наблюдатель» $\mathbf{A} - \mathbf{LC}$ желаемый характеристический полином $p_C^*\left(\lambda\right)$.

Обобщенная дуальная формула Аккермана [9] для расчета матрицы наблюдателя в рассматриваемой задаче имеет вид:

$$\mathbf{L} = \left[\mathbf{B}_C \;\vdots\; \mathbf{AB}_C \;\vdots\; \mathbf{A}^2\mathbf{B}_C\right]\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{C2} \\ \mathbf{P}_{C1} \\ \mathbf{I}_l \end{bmatrix}, \tag{15}$$

где блоки $\mathbf{P}_{C1} \in \mathbb{R}^{l\times l}$ и $\mathbf{P}_{C2} \in \mathbb{R}^{l\times l}$ таковы, что

$$\det\left(\lambda^2\mathbf{I}_l + \lambda\mathbf{P}_{C1} + \mathbf{P}_{C2}\right) = p_C^*\left(\lambda\right). \tag{16}$$

В формуле (15) используется *только правый блочный столбец*

$$\mathbf{B}_C = \mathbf{N}^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{l\times l} \\ \mathbf{I}_l \end{bmatrix} = \overline{\mathbf{C}}^R\left(\mathbf{CA}\overline{\mathbf{C}}^R\right)^{-1} \tag{17}$$

обратной матрицы наблюдаемости $\mathbf{N}^{-1}$, записанной согласно формуле (8):

$$\mathbf{N}^{-1} = \left[\overline{\mathbf{CA}}^R\left(\mathbf{C}\overline{\mathbf{CA}}^R\right)^{-1} \;\vdots\; \overline{\mathbf{C}}^R\left(\mathbf{CA}\overline{\mathbf{C}}^R\right)^{-1}\right].$$

Поэтому нет необходимости полностью рассчитывать обратную матрицу $\mathbf{N}^{-1}$ порядка n. Достаточно обратить матрицу вдвое меньшего порядка l:

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{CA}\overline{\mathbf{C}}^R. \tag{18}$$

Пусть, кроме того, используется преобразование подобия [12]

$$\mathbf{P}_{C1} = \mathbf{C}_1\mathbf{P}_{C1}^*\mathbf{C}_1^{-1}, \quad \mathbf{P}_{C2} = \mathbf{C}_1\mathbf{P}_{C2}^*\mathbf{C}_1^{-1}.$$

Тогда формула (15) для расчета наблюдателя после подстановки матрицы (17) с учетом обозначения (18) упрощается и принимает вид:

$$\mathbf{L} = \left[\overline{\mathbf{C}}^R \;\vdots\; \mathbf{A}\overline{\mathbf{C}}^R \;\vdots\; \mathbf{A}^2\overline{\mathbf{C}}^R\right]\begin{bmatrix} \mathbf{P}_{C2}^* \\ \mathbf{P}_{C1}^* \\ \mathbf{I}_l \end{bmatrix}\mathbf{C}_1^{-1},$$

а в силу тождества (16) остается справедливым равенство полиномов

$$\det\left(\lambda^2\mathbf{I}_l + \lambda\mathbf{P}_{C1}^* + \mathbf{P}_{C2}^*\right) = p_C^*\left(\lambda\right).$$

3. Числовой пример блочного обращения.

Требуется обратить числовую комплексную матрицу

$$\mathbf{A}=\left[\mathbf{A}_1 \;\vdots\; \mathbf{A}_2\right]=\left[\begin{array}{c:c:c:c} i & 2 & -3 & 4i \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1+i & 2 & i-3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right],\quad i^2=-1. \tag{19}$$

Выполним обращение матрицы (19) по формуле (6). Для этого первоначально вычислим левые АМР $\overline{\mathbf{A}_1}^L$ и $\overline{\mathbf{A}_2}^L$, воспользовавшись, например, функцией null [19] программы MATLAB. Получим

$$\overline{\mathbf{A}_1}^L=\left[\begin{array}{c:c:c:c} -46{,}15+19{,}23i & -19{,}23-46{,}15i & 65{,}38+26{,}92i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

$$\overline{\mathbf{A}_2}^L=\left[\begin{array}{c:c:c:c} -15{,}19+32{,}78i & 51{,}83+33{,}02i & 64{,}29+23{,}19i & 15{,}01+4{,}55i \\ 1{,}1+14{,}68i & -33{,}42+3{,}85i & -0{,}29-10{,}26i & 92{,}43+2i \end{array}\right].$$

Подставив полученные АМР в формулу (6), окончательно будем иметь

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix} \left(\overline{\mathbf{A}_2}^L\mathbf{A}_1\right)^{-1}\overline{\mathbf{A}_2}^L \\ \left(\overline{\mathbf{A}_1}^L\mathbf{A}_2\right)^{-1}\overline{\mathbf{A}_1}^L \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c:c:c:c} -1{,}6-2{,}2i & 2{,}2-0{,}6i & -0{,}6+2{,}8i & -10{,}4+4{,}2i \\ 0{,}4+1{,}3i & -0{,}8-0{,}1i & 0{,}9-1{,}2i & 5{,}1-0{,}3i \\ 0{,}4-0{,}2i & 0{,}2+0{,}4i & -0{,}6-0{,}2i & -0{,}4-1{,}8i \\ -0{,}4+0{,}2i & -0{,}2-0{,}4i & 0{,}6+0{,}2i & 1{,}4+1{,}8i \end{array}\right]. \tag{20}$$

С помощью непосредственных вычислений можно убедиться, что матрица (20) действительно является обратной к матрице (19).

4. Аналитический пример блочного обращения

Требуется обратить символьную матрицу

$$\mathbf{A}=\left[\mathbf{A}_1 \;\vdots\; \mathbf{A}_2\right]=\left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c} 0 & 0 & 0 & 1 & a_{15} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 1 & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 1 & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{array}\right]. \tag{21}$$

Введем обозначения

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{14}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{a}_{24}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c:c} a_{15} & 0 \\ a_{25} & a_{26} \end{array}\right],\quad \mathbf{A}_{34}=\left[\begin{array}{c:c} 1 & a_{36} \\ a_{45} & a_{46} \end{array}\right],\quad \mathbf{a}_{43}=\begin{bmatrix} a_{54} \\ a_{64} \end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_{44}=\left[\begin{array}{c:c} a_{55} & a_{56} \\ a_{65} & a_{66} \end{array}\right] \tag{22}$$

и запишем матрицу (21) в блочном виде:

$$\mathbf{A}=\left[\mathbf{A}_1 \;\vdots\; \mathbf{A}_2\right], \tag{23}$$

где

$$\mathbf{A}_1=\left[\begin{array}{c:c} 0 & \mathbf{0}_{1\times 2} \\ 1 & \mathbf{0}_{1\times 2} \\ \mathbf{0}_{2\times 1} & \mathbf{0}_{2\times 2} \\ \mathbf{0}_{2\times 1} & \mathbf{I}_2 \end{array}\right],\quad \mathbf{A}_2=\left[\begin{array}{c:c} 1 & \mathbf{a}_{14}^{\mathrm{T}} \\ a_{24} & \mathbf{a}_{24}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0}_{2\times 1} & \mathbf{A}_{34} \\ \mathbf{a}_{43} & \mathbf{A}_{44} \end{array}\right]. \tag{24}$$

Определитель матрицы (23) равен $\det\mathbf{A}=-\det\mathbf{A}_{34}$.

При выполнении условия

$$\det\mathbf{A}_{34}\neq 0 \tag{25}$$

блочная матрица (23) обратима, а блоки $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ имеют полный ранг 3.

В силу условия (25) квадратные блочные матрицы

$$\bar{\mathbf{A}}_1 = \left[\begin{array}{c:c} 1 & \mathbf{0}_{1\times 2} \\ \mathbf{0}_{2\times 1} & \mathbf{I}_2 \end{array}\right], \quad \bar{\mathbf{A}}_2 = \left[\begin{array}{c:c} 1 & \mathbf{a}_{14}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0}_{2\times 1} & \mathbf{A}_{34} \end{array}\right] \tag{26}$$

являются неособенными. Поэтому левые АМР для матриц (24) соответственно могут быть записаны в виде:

$$\overline{\mathbf{A}_1}^L = \left[\begin{array}{c:c:c:c} 1 & 0 & \mathbf{0}_{1\times 2} & \mathbf{0}_{1\times 2} \\ \mathbf{0}_{2\times 1} & \mathbf{0}_{2\times 1} & \mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_{2\times 2} \end{array}\right], \quad \overline{\mathbf{A}_2}^L = \left[\begin{array}{c:c:c:c} -a_{22} & 1 & \left(a_{24}\mathbf{a}_{14}^{\mathrm{T}} - \mathbf{a}_{24}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{A}_{34}^{-1} & \mathbf{0}_{1\times 2} \\ -\mathbf{a}_{43} & 0 & \left(\mathbf{a}_{43}\mathbf{a}_{14}^{\mathrm{T}} - \mathbf{A}_{44}\right)\mathbf{A}_{34}^{-1} & \mathbf{I}_2 \end{array}\right]. \tag{27}$$

Для обращения блочной матрицы (23) порядка 6 по формуле (6) достаточно обратить матрицы (26) меньшего порядка 3:

$$\overline{\mathbf{A}_2}^L \mathbf{A}_1 = \bar{\mathbf{A}}_1, \quad \overline{\mathbf{A}_1}^L \mathbf{A}_2 = \bar{\mathbf{A}}_2.$$

Обратим эти блочно-треугольные матрицы по формулам Фробениуса [7]:

$$\bar{\mathbf{A}}_1^{-1} = \left[\begin{array}{c:c} 1 & \mathbf{0}_{1\times 2} \\ \mathbf{0}_{2\times 1} & \mathbf{I}_2 \end{array}\right], \quad \bar{\mathbf{A}}_2^{-1} = \left[\begin{array}{c:c} 1 & -\mathbf{a}_{14}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{34}^{-1} \\ \mathbf{0}_{2\times 1} & \mathbf{A}_{34}^{-1} \end{array}\right]. \tag{28}$$

Используя результаты (27), (28) и формулу (6), запишем искомую обратную матрицу в блочном виде:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\overline{\mathbf{A}_2}^L \\ \bar{\mathbf{A}}_2^{-1}\overline{\mathbf{A}_1}^L \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c:c:c} -a_{24} & 1 & \left(a_{24}\mathbf{a}_{14}^{\mathrm{T}} - \mathbf{a}_{24}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{A}_{34}^{-1} & \mathbf{0}_{1\times 2} \\ -\mathbf{a}_{43} & \mathbf{0}_{2\times 1} & \left(\mathbf{a}_{43}\mathbf{a}_{14}^{\mathrm{T}} - \mathbf{A}_{44}\right)\mathbf{A}_{34}^{-1} & \mathbf{I}_2 \\ 1 & 0 & -\mathbf{a}_{14}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{34}^{-1} & \mathbf{0}_{1\times 2} \\ \mathbf{0}_{2\times 1} & \mathbf{0}_{2\times 1} & \mathbf{A}_{34}^{-1} & \mathbf{0}_{2\times 2} \end{array}\right]. \tag{29}$$

Подставив в матрицу (29) блоки (22), получим результат в скалярном виде:

$$\mathbf{A}^{-1} = \left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c} -a_{24} & 1 & -\bar{a}_{25}/\tilde{a}_{46} & -\bar{a}_{26}/\tilde{a}_{46} & 0 & 0 \\ -a_{54} & 0 & -\bar{a}_{55}/\tilde{a}_{46} & -\bar{a}_{56}/\tilde{a}_{46} & 1 & 0 \\ -a_{64} & 0 & -\bar{a}_{65}/\tilde{a}_{46} & -\bar{a}_{66}/\tilde{a}_{46} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -a_{15}\,a_{46}/\tilde{a}_{46} & a_{15}\,a_{36}/\tilde{a}_{46} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{46}/\tilde{a}_{46} & -a_{36}/\tilde{a}_{46} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{45}/\tilde{a}_{46} & 1/\tilde{a}_{46} & 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{30}$$

Здесь $\tilde{a}_{46} = a_{46} - a_{36}a_{45}$, а для номеров i = 2, 5, 6 введены обозначения

$$\tilde{a}_{i5} = a_{i5} - a_{15}a_{i4}, \quad \bar{a}_{i5} = \tilde{a}_{i5}a_{46} - a_{i6}a_{45}, \quad \bar{a}_{i6} = a_{i6} - a_{36}\tilde{a}_{i5}.$$

Выполним проверку прямого произведения матриц (21) и (30):

$$\mathbf{AA}^{-1} = \left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c} 0 & 0 & 0 & 1 & a_{15} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 1 & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 1 & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c} -a_{24} & 1 & -\bar{a}_{25}/\tilde{a}_{46} & -\bar{a}_{26}/\tilde{a}_{46} & 0 & 0 \\ -a_{54} & 0 & -\bar{a}_{55}/\tilde{a}_{46} & -\bar{a}_{56}/\tilde{a}_{46} & 1 & 0 \\ -a_{64} & 0 & -\bar{a}_{65}/\tilde{a}_{46} & -\bar{a}_{66}/\tilde{a}_{46} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -a_{15}\,a_{46}/\tilde{a}_{46} & a_{15}\,a_{36}/\tilde{a}_{46} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{46}/\tilde{a}_{46} & -a_{36}/\tilde{a}_{46} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{45}/\tilde{a}_{46} & 1/\tilde{a}_{46} & 0 & 0 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \left(\tilde{a}_{25}a_{46} - a_{26}a_{45} - \bar{a}_{25}\right)/\tilde{a}_{46} & \left(a_{26} - a_{36}\tilde{a}_{25} - \bar{a}_{26}\right)/\tilde{a}_{46} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\tilde{a}_{55}a_{46} - a_{56}a_{45} - \bar{a}_{55}\right)/\tilde{a}_{46} & \left(a_{56} - a_{36}\tilde{a}_{55} - \bar{a}_{56}\right)/\tilde{a}_{46} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\tilde{a}_{65}a_{46} - a_{66}a_{45} - \bar{a}_{65}\right)/\tilde{a}_{46} & \left(a_{66} - a_{36}\tilde{a}_{65} - \bar{a}_{66}\right)/\tilde{a}_{46} & 0 & 1 \end{array}\right] = \mathbf{I}_6.$$

Выполним проверку обратного произведения матриц (30) и (21):

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c} -a_{24} & 1 & -\bar{a}_{25}/\tilde{a}_{46} & -\bar{a}_{26}/\tilde{a}_{46} & 0 & 0\\ -a_{54} & 0 & -\bar{a}_{55}/\tilde{a}_{46} & -\bar{a}_{56}/\tilde{a}_{46} & 1 & 0\\ -a_{64} & 0 & -\bar{a}_{65}/\tilde{a}_{46} & -\bar{a}_{66}/\tilde{a}_{46} & 0 & 1\\ 1 & 0 & -a_{15}\,a_{46}/\tilde{a}_{46} & a_{15}\,a_{36}/\tilde{a}_{46} & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_{46}/\tilde{a}_{46} & -a_{36}/\tilde{a}_{46} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -a_{45}/\tilde{a}_{46} & 1/\tilde{a}_{46} & 0 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c} 0 & 0 & 0 & 1 & a_{15} & 0\\ 1 & 0 & 0 & a_{24} & a_{25} & a_{26}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{36}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45} & a_{46}\\ 0 & 1 & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56}\\ 0 & 0 & 1 & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{array}\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c} 1 & 0 & 0 & 0 & \tilde{a}_{25}-\left(\bar{a}_{25}+\bar{a}_{26}a_{45}\right)/\tilde{a}_{46} & a_{26}-\left(a_{36}\bar{a}_{25}+a_{46}\bar{a}_{26}\right)/\tilde{a}_{46}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \tilde{a}_{55}-\left(\bar{a}_{55}+\bar{a}_{56}a_{45}\right)/\tilde{a}_{46} & a_{56}-\left(a_{36}\bar{a}_{55}+a_{46}\bar{a}_{56}\right)/\tilde{a}_{46}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \tilde{a}_{65}-\left(\bar{a}_{65}+\bar{a}_{66}a_{45}\right)/\tilde{a}_{46} & a_{66}-\left(a_{36}\bar{a}_{65}+a_{46}\bar{a}_{66}\right)/\tilde{a}_{46}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{15}-a_{15}\left(a_{46}-a_{36}a_{45}\right)/\tilde{a}_{46} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]=\mathbf{I}_6.$$

Проверка подтверждает правильность определения обратной матрицы.

5. Пример аналитического синтеза регулятора для ЛСС

Рассмотрим непрерывную $(t\in\mathbb{R})$ ЛСС шестого порядка $\mathbf{x}(t)\in\mathbb{R}^6$ с тремя управляющими входами $\mathbf{u}(t)\in\mathbb{R}^3$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{\gamma}(t)\\ \dot{\beta}(t)\\ \dot{\alpha}(t)\\ \dot{\omega}_x(t)\\ \dot{\omega}_y(t)\\ \dot{\omega}_z(t)\end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}(t)}=\underbrace{\left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c} 0 & 0 & 0 & 1 & a_{15} & 0\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & 0\\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 1\\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46}\\ 0 & a_{52} & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56}\\ 0 & 0 & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{array}\right]}_{\mathbf{A}}\underbrace{\begin{bmatrix}\gamma(t)\\ \beta(t)\\ \alpha(t)\\ \omega_x(t)\\ \omega_y(t)\\ \omega_z(t)\end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t)}+\underbrace{\left[\begin{array}{c:c:c} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ b_{41} & 0 & 0\\ 0 & b_{52} & b_{53}\\ 0 & b_{62} & b_{63} \end{array}\right]}_{\mathbf{B}}\underbrace{\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}}_{\mathbf{u}(t)},\qquad(31)$$

которая представляет собой линеаризованную математическую модель пространственного движения летательного аппарата (ЛА) самолетного типа [20]. Здесь α, β и γ – соответственно углы атаки, скольжения и крена; ω_x, ω_y и ω_z – компоненты вектора угловой скорости соответственно по крену, рысканью и тангажу; u_1, u_2 и u_3 – управляющие воздействия; $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – матрицы состояния и управления.

Требуется построить регулятор с матрицей обратной связи $\mathbf{K}$, обеспечивающий матрице замкнутой ЛСС

$$\mathbf{A}_B^*=\mathbf{A}-\mathbf{BK}$$

желаемый спектр

$$\Lambda_B^*=\{\lambda_1,\quad \lambda_2,\quad \lambda_3,\quad \lambda_4,\quad \lambda_5,\quad \lambda_6\}.$$

Запишем матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в блочном виде, разделив углы и угловые скорости:

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{c:c}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22}\end{array}\right],\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{3\times3}\\ \mathbf{B}_{21}\end{bmatrix},\qquad(32)$$

где

$$\mathbf{A}_{11}=\left[\begin{array}{c:c:c} 0 & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ 0 & a_{32} & a_{33}\end{array}\right],\quad \mathbf{A}_{12}=\left[\begin{array}{c:c:c} 1 & a_{15} & 0\\ a_{24} & a_{25} & 0\\ a_{34} & 0 & 1\end{array}\right],$$

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & a_{42} & a_{43} \\ 0 & a_{52} & 0 \\ 0 & 0 & a_{63} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{21} = \begin{bmatrix} b_{41} & 0 & 0 \\ 0 & b_{52} & b_{53} \\ 0 & b_{62} & b_{63} \end{bmatrix}.$$

Первые два блочных столбца матрицы управляемости Калмана образуют квадратную матрицу

$$\mathbf{U} = \left[\mathbf{B} \;\vdots\; \mathbf{AB}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{I}_3 & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{21} & \mathbf{0}_{3\times 3} \\ \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{B}_{21} \end{bmatrix},$$

определитель которой равен

$$\det \mathbf{U} = -\det \mathbf{A}_{12} \det^2 \mathbf{B}_{21}.$$

Таким образом, для полной управляемости ЛСС (31) достаточно одновременного выполнения следующих условий:

$$a_{25} \neq a_{15} a_{24}, \quad b_{41} \neq 0, \quad b_{52} b_{63} \neq b_{53} b_{62}. \tag{33}$$

Определив левый АМР матрицы $\mathbf{B}$

$$\overline{\mathbf{B}}^L = \left[\mathbf{I}_3 \;\vdots\; \mathbf{0}_{3\times 3}\right],$$

а также матрицу

$$\mathbf{B}_1 = \overline{\mathbf{B}}^L \mathbf{AB} = \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21},$$

рассчитаем регулятор по упрощенной обобщенной формуле Аккермана (13):

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}_1^{-1}\left(\mathbf{P}_{B2}^* \overline{\mathbf{B}}^L + \mathbf{P}_{B1}^* \overline{\mathbf{B}}^L \mathbf{A} + \overline{\mathbf{B}}^L \mathbf{A}^2\right) = \mathbf{B}_{21}^{-1}\left[\mathbf{A}_{21} - \tilde{\mathbf{A}}_{21} \;\vdots\; \mathbf{A}_{22} - \tilde{\mathbf{A}}_{22}\right], \tag{34}$$

где

$$\tilde{\mathbf{A}}_{21} = -\mathbf{A}_{12}^{-1}\left(\mathbf{A}_{11}^2 + \mathbf{P}_{B1}^* \mathbf{A}_{11} + \mathbf{P}_{B2}^*\right), \quad \tilde{\mathbf{A}}_{22} = -\mathbf{A}_{12}^{-1}\left(\mathbf{A}_{11} + \mathbf{P}_{B1}^*\right)\mathbf{A}_{12},$$

а блоки $\mathbf{P}_{B1}^* \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ и $\mathbf{P}_{B2}^* \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ согласно соотношению (14) таковы, что

$$\det\left(\lambda^2 \mathbf{I}_3 + \lambda \mathbf{P}_{B1}^* + \mathbf{P}_{B2}^*\right) = \prod_{i=1}^{6}\left(\lambda - \lambda_i\right). \tag{35}$$

Конкретный вид блоков $\mathbf{P}_{B1}^*$ и $\mathbf{P}_{B2}^*$ выбирается не только из условия (35) размещения полюсов, но и для обеспечения специальных свойств матрицы регулятора $\mathbf{K}$ (уменьшение нормы [21], обнуление столбцов [22], разделение каналов управления [14] и др.). Например, для упрощения выражения (34) и попытки разделения бокового (крен–рысканье) и продольного (тангаж) движений ЛА блоки $\mathbf{P}_{B1}^*$ и $\mathbf{P}_{B2}^*$ можно искать в удовлетворяющем условию (35) виде:

$$\mathbf{P}_{B1}^* = \begin{bmatrix} p_x & 0 & 0 \\ p_3 & p_y & p_1 \\ p_2 & 0 & p_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{B2}^* = \begin{bmatrix} q_x & 0 & 0 \\ q_3 & q_y & q_1 \\ q_2 & 0 & q_z \end{bmatrix}, \tag{36}$$

где p_i и q_i $(i = \overline{1,\ 3})$ – произвольные параметры, а

$$p_x = -\lambda_1 - \lambda_4, \quad p_y = -\lambda_2 - \lambda_5, \quad p_z = -\lambda_3 - \lambda_6,$$
$$q_x = \lambda_1\lambda_4, \quad q_y = \lambda_2\lambda_5, \quad q_z = \lambda_3\lambda_6$$

коэффициенты Виета, такие что

$$\lambda_{14} = \lambda^2 + p_x\lambda + q_x = \left(\lambda - \lambda_1\right)\left(\lambda - \lambda_4\right),$$
$$\lambda_{25} = \lambda^2 + p_y\lambda + q_y = \left(\lambda - \lambda_2\right)\left(\lambda - \lambda_5\right),$$
$$\lambda_{36} = \lambda^2 + p_z\lambda + q_z = \left(\lambda - \lambda_3\right)\left(\lambda - \lambda_6\right).$$

Отметим, что получить блоки $\mathbf{P}_{B1}^*$ и $\mathbf{P}_{B2}^*$ в виде (36) с помощью классического декомпозиционного подхода [23] затруднительно или невозможно ввиду требования о разложимости полинома $\lambda^2\mathbf{I}_3 + \lambda\mathbf{P}_{B1}^* + \mathbf{P}_{B2}^*$ на матричные множители $\left(\lambda\mathbf{I}_3 - \mathbf{\Phi}_{B0}\right)\left(\lambda\mathbf{I}_3 - \mathbf{\Phi}_{B1}\right)$, где $\operatorname{eig}\mathbf{\Phi}_{B0} \bigcup \operatorname{eig}\mathbf{\Phi}_{B1} = \Lambda_B^*$.

Поставим задачу в блоках $\tilde{\mathbf{A}}_{21}$ и $\tilde{\mathbf{A}}_{22}$ регулятора (34) обнулить позиции, соответствующие расположению параметров p_i и q_i в матрицах $\mathbf{P}^*_{B1}$ и $\mathbf{P}^*_{B2}$:

$$\begin{gathered}
\tilde{\mathbf{A}}_{22} = -\mathbf{A}_{12}^{-1}\left(\mathbf{A}_{11} + \mathbf{P}^*_{B1}\right)\mathbf{A}_{12} = -\left[\begin{array}{c:c:c} p_x & -a_{15}\left(\tilde{p}_y - p_x\right) & 0 \\ 0 & \tilde{p}_y & 0 \\ 0 & \tilde{a}_{65} & \tilde{p}_z \end{array}\right], \\
\tilde{\mathbf{A}}_{21} = -\mathbf{A}_{12}^{-1}\left(\mathbf{A}_{11}^2 + \mathbf{A}_{11}\mathbf{P}^*_{B1} + \mathbf{P}^*_{B2}\right) = -\left[\begin{array}{c:c:c} q_x & -a_{15}\tilde{\tilde{q}}_y & 0 \\ 0 & \tilde{\tilde{q}}_y & 0 \\ 0 & \tilde{a}_{62} & \tilde{\tilde{q}}_z \end{array}\right],
\end{gathered} \tag{37}$$

где $\tilde{a}_{25} = a_{25} - a_{15}a_{24}$ и

$$\begin{aligned}
&\tilde{p}_y = p_y + a_{22}, \quad \tilde{q}_y = q_y + a_{22}\tilde{p}_y, \quad \tilde{\tilde{q}}_y = \tilde{q}_y / \tilde{a}_{25}, \qquad \tilde{a}_{62} = a_{32}\left(\tilde{p}_z + a_{22}\right) + a_{15}a_{34}\tilde{\tilde{q}}_y, \\
&\tilde{p}_z = p_z + a_{33}, \quad \tilde{q}_z = q_z + a_{33}\tilde{p}_z, \quad \tilde{\tilde{q}}_z = \tilde{q}_z + a_{23}a_{32}, \quad \tilde{a}_{65} = a_{32}\tilde{a}_{25} + a_{15}a_{34}\left(\tilde{p}_y - \tilde{p}_z\right).
\end{aligned}$$

Обнуление достигается при следующих значениях параметров:

$$\begin{aligned}
&p_1 = -a_{23}, \qquad p_2 = a_{34}\left(p_x - \tilde{p}_z\right) - a_{24}a_{32}, \quad p_3 = a_{24}\left(p_x - \tilde{p}_y\right) - a_{21}, \\
&q_1 = -a_{23}\tilde{p}_y, \quad q_2 = a_{34}q_x - a_{21}a_{32}, \qquad\qquad q_3 = a_{24}q_x - a_{21}\tilde{p}_y.
\end{aligned}$$

Выполним проверку характеристического полинома матрицы замкнутой ЛСС (32) с регулятором (34) и подстановкой (37):

$$\Delta = \det\underbrace{\left(\lambda\mathbf{I}_6 - \mathbf{A}^*_B\right)}_{\mathbf{A}^*_{B\lambda}} = \det\left(\lambda\mathbf{I}_6 - \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{21} & \tilde{\mathbf{A}}_{22} \end{array}\right]\right) =$$

$$= \det\left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c}
\lambda & 0 & 0 & -1 & -a_{15} & 0 \\
-a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} & -a_{24} & -a_{25} & 0 \\
0 & -a_{32} & \lambda - a_{33} & -a_{34} & 0 & -1 \\
q_x & -a_{15}\tilde{\tilde{q}}_y & 0 & \lambda + p_x & -a_{15}\left(\tilde{p}_y - p_x\right) & 0 \\
0 & \tilde{\tilde{q}}_y & 0 & 0 & \lambda + \tilde{p}_y & 0 \\
0 & \tilde{a}_{62} & \tilde{\tilde{q}}_z & 0 & \tilde{a}_{65} & \lambda + \tilde{p}_z
\end{array}\right].$$

Рассчитаем представленный определитель по пятой строке:

$$\Delta = \left(\lambda + \tilde{p}_y\right)\underbrace{\left(\lambda\Delta_1 + \Delta_2\right)}_{\Delta_{12}} - \tilde{\tilde{q}}_y \underbrace{\left(\left(\lambda + \tilde{p}_z\right)\Delta_3 - \Delta_4\right)}_{\Delta_{34}}, \tag{38}$$

где

$$\begin{aligned}
&\Delta_1 = \det\mathbf{A}^*_{B\lambda([2,3,4,6],[2,3,4,6])}, \quad \Delta_2 = \det\mathbf{A}^*_{B\lambda([2,3,4,6],[1,2,3,6])}, \\
&\Delta_3 = \det\mathbf{A}^*_{B\lambda([1,2,3,4],[1,3,4,5])}, \quad \Delta_4 = \det\mathbf{A}^*_{B\lambda([1,2,4,6],[1,3,4,5])},
\end{aligned} \tag{39}$$

а запись вида $\mathbf{A}^*_{B\lambda(rows,cols)}$ обозначает матрицу, составленную из элементов матрицы $\mathbf{A}^*_{B\lambda}$, стоящих на пересечении строк из множества *rows* и столбцов из множества *cols*. Далее рассчитаем отдельно каждый из определителей (39) и подставим в формулу (38):

$$\Delta_1 = \left(\lambda + p_x\right)\left(\lambda - a_{22}\right)\lambda_{36} + a_{15}\tilde{\tilde{q}}_y\left(a_{23}a_{34}\left(p_x - \tilde{p}_z\right) - a_{24}\left(\lambda_{36} + a_{23}a_{32}\right)\right),$$

$$\Delta_2 = q_x\left(\lambda - a_{22}\right)\lambda_{36} + a_{15}\tilde{\tilde{q}}_y\left(a_{23}a_{34}q_x - a_{21}\left(\lambda_{36} + a_{23}a_{32}\right)\right),$$

$$\Delta_3 = \lambda_{14}\left(a_{15}a_{23}a_{34} - \tilde{a}_{25}\left(\lambda - a_{33}\right)\right) - a_{15}\left(\lambda + \tilde{p}_y\right)\left(a_{23}a_{34}\lambda + \left(a_{24}\lambda + a_{21}\right)\left(\lambda - a_{33}\right)\right),$$

$$\Delta_4 = \lambda_{14}\left(\tilde{q}_z\tilde{a}_{25} - a_{15}a_{23}a_{34}\left(\tilde{p}_y - \tilde{p}_z\right)\right) + a_{15}\left(a_{24}\lambda + a_{21}\right)\left(\lambda + \tilde{p}_y\right)\tilde{\tilde{q}}_z,$$

$$\Delta_{12} = \lambda_{14}\left(\lambda - a_{22}\right)\lambda_{36} + a_{15}\tilde{\tilde{q}}_y\left(a_{23}a_{34}\left(\lambda\left(p_x - \tilde{p}_z\right) + q_x\right) - \left(a_{24}\lambda + a_{21}\right)\left(\lambda_{36} + a_{23}a_{32}\right)\right),$$

$$\Delta_{34} = a_{15}\left(\lambda + \tilde{p}_y\right)\left(a_{23}a_{34}\left(\lambda\left(p_x - \tilde{p}_z\right) + q_x\right) - \left(a_{24}\lambda + a_{21}\right)\left(\lambda_{36} + a_{23}a_{32}\right)\right) - \tilde{a}_{25}\lambda_{14}\lambda_{36}.$$

Окончательно получим

$$\det \mathbf{A}^*_{B\lambda} = \Delta = \lambda_{14}\lambda_{25}\lambda_{36} = \prod_{i=1}^{6}\left(\lambda - \lambda_i\right),$$

откуда и следует совпадение спектров $\operatorname{eig}\mathbf{A}^*_B = \Lambda^*_B$.

Заключение

На основе математического аппарата матричных аннуляторов получены и доказаны новые аналитические формулы обращения квадратных матриц, разбитых по строкам или столбцам на два прямоугольных блока. Полученные формулы не имеют ограничений в применимости в виде каких-либо соотношений между прямоугольными блоками. Показано, как эффективно использовать предлагаемые формулы обращения блочных матриц для расчета матриц обратной связи при решении задач управления и оценки компонент вектора состояния. Для некоторого класса линейных стационарных систем управления разработана модификация полученных ранее обобщенных формул Басса–Гура и Аккермана.

Список источников

1. Zhou H., Yang D., Lin Y., Dai Y., Chen Q. A Parallel Acceleration Technique based on Bordered Block Diagonal Matrix Reordering for Exponential Integrator Method // 2nd Int. Symp. of Electronics Design Automation. 2024. P. 94–99. doi: 10.1109/ISEDA62518.2024.10617631
2. Dogruer C.U., Yıldırım B. Switching Optimal Modal Control of Linear Time-Invariant Model of a Structural System // 25th Int. Conf. on Syst. Theory, Control and Computing. 2021. P. 220–226. doi: 10.1109/ICSTCC52150.2021.9607184
3. Зубов Н.Е., Лапин А.В., Рябченко В.Н., Аналитический алгоритм построения орбитальной ориентации космического аппарата при неполном измерении компонент вектора состояния // Известия РАН. Теория и системы управления. 2019. № 6. С. 128–138. doi: 10.1134/S0002338819040176
4. Zybin E.Yu., Kosyanchuk V.V., Karpenko S.S. Quantitative Model-Free Method for Aircraft Control System Failure Detection // MATEC Web of Conf. 2017. V. 99. Art. 03011. P. 1–3. doi: 10.1051/matecconf/20179903011
5. Kosyanchuk V.V., Selvesyuk N.I., Kulchak A.M. Aircraft Control Law Reconfiguration // Aviation. 2015. V. 19, is. 1. P. 14–18. doi: 10.3846/16487788.2015.1015290
6. Qin Y., Feng G., Ren Y., Zhang X. Block-Diagonal Guided Symmetric Nonnegative Matrix Factorization // IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering. 2023 V. 35, is. 3. P. 2313–2325. doi: 10.1109/TKDE.2021.3113943
7. Gantmacher F.R. The Theory of Matrices. Providence : AMS Chelsea Publishing, 2000.
8. Lapin A.V., Zubov N.E. Generalization of Bass–Gura Formula for Linear Dynamic Systems with Vector Control // Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences. 2020. V. 89, is. 2. P. 41–64. doi: 10.18698/1812-3368-2020-2-41-64.
9. Лапин А.В., Зубов Н.Е., Пролетарский А.В. Обобщение формулы Аккермана для некоторого класса многомерных динамических систем с векторным входом // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2023. № 4 (109). С. 18–38. doi: 10.18698/1812-3368-2023-4-18-38
10. Bernstein D.S. Matrix Mathematics. Princeton, NJ : Princeton University Press, 2005.
11. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М. : Наука, 1984.
12. Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Блочное решение алгебраических уравнений при расчетах электрических сетей и систем // Вестник Тамбовского государственного технического университета. 2004. № 7 (42). С. 29–42.
13. Горюнов С.В., Буков В.Н. Обращение и канонизация блочных матриц // Математические заметки. 2006. Т. 79, № 5. С. 662–673.
14. Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н. Матричные методы в теории и практике систем автоматического управления летательных аппаратов. М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016.
15. Kosyanchuk V.V., Zheltov Yu S., Zybin E.Yu. Aircraft Flight Control System Fault Tolerance under Structural and Parametric Uncertainties // J. Phys.: Conf. Ser. 2021. V. 1864. P. 1–12. doi: 10.1088/1742-6596/1864/1/012005
16. Ling J., Ji H., Yu C., Wang S., Yu D., Jiang S. Design of UPFC Sub-Synchronous Oscillation Damping Controller Based on Modal Control // China Int. Conf. on Electricity Distribution. 2018. P. 1439–1443. doi: 10.1109/CICED.2018.8592538
17. Dobroskok N.A., Vtorov V.B. Robust Pole Assignment in a Problem of State Observer-Based Modal Control // IV Int. Conf. on Control in Technical Syst. 2021. P. 30–33. doi: 10.1109/CTS53513.2021.9562851
18. Zong Q., Tian K., Zuo Q., Wang W. A Similarity Measurement Model of Complex Polygon with Holes Based on Fuzzy Matrix and Similarity Transformation // 3rd Int. Conf. on Geology, Mapping and Remote Sensing. 2022. P. 249–252. doi: 10.1109/ICGMRS55602.2022.9849295

19. Kisacanin B., Agarwal G.C. Linear Control Systems: With Solved Problems and MATLAB Examples. New York : Kluwer Academic / Plenum Publishers, 2002.
20. Буков В.Н. Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом. М. : Наука, 1987.
21. Nie F., Wang H., Cai X., Huang H., Ding C. Robust Matrix Completion via Joint Schatten p-Norm and lp-Norm Minimization // IEEE 12th Int. Conf. on Data Mining. 2012. P. 566–574. doi: 10.1109/ICDM.2012.160
22. Lapin A.V., Zubov N.E. Parametric Synthesis of Modal Control with Output Feedback for Descent Module Attitude Stabilization // 2019 Int. Russian Automation Conf. 2019. P. 1–6. doi: 10.1109/RusAutoCon.2019.8867744
23. Lapin A.V., Zubov N.E. Analytic Solution of the Problem of Stabilizing Orbital Orientation of a Spacecraft with Flywheel Engines // AIP Conf. Proc. 2021. V. 2318, is. 1. Art. 130009. P. 1–8. doi: 10.1063/5.0036155

References

1. Zhou, H., Yang, D., Lin, Y., Dai, Y. & Chen, Q. (2024) A Parallel Acceleration Technique based on Bordered Block Diagonal Matrix Reordering for Exponential Integrator Method. *2nd Int. Symp. of Electronics Design Automation*. pp. 94–99. DOI: 10.1109/ISEDA62518.2024.10617631
2. Dogruer, C.U. & Yıldırım, B. (2021) Switching Optimal Modal Control of Linear Time-Invariant Model of a Structural System. *25th Int. Conf. on Syst. Theory, Control and Computing*. pp. 220–226. DOI: 10.1109/ICSTCC52150.2021.9607184.
3. Zubov, N.E., Lapin, A.V. & Ryabchenko, V.N. (2019) Analytical Algorithm for Constructing the Orbital Orientation of a Spacecraft with an Incomplete Measurement of the State Vector Components. *Journal of Computer and Systems Sciences International.* 58(6). pp. 969–979. DOI: 10.1134/S1064230719040178
4. Zybin, E.Yu., Kosyanchuk, V.V. & Karpenko, S.S. (2017) Quantitative Model-Free Method for Aircraft Control System Failure Detection. *MATEC Web of Conf*. 99(03011). pp. 1–3. DOI: 10.1051/matecconf/20179903011
5. Kosyanchuk, V.V., Selvesyuk, N.I. & Kulchak, A.M. (2015) Aircraft Control Law Reconfiguration. *Aviation.* 19(1). pp. 14–18. DOI: 10.3846/16487788.2015.1015290
6. Qin Y., Feng G., Ren Y. & Zhang X. (2023) Block-Diagonal Guided Symmetric Nonnegative Matrix Factorization. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*. 35(3). pp. 2313–2325. DOI: 10.1109/TKDE.2021.3113943
7. Gantmacher, F.R. (2000) *The Theory of Matrices*. Providence: AMS Chelsea Publishing.
8. Lapin, A.V. & Zubov, N.E. (2020) Generalization of Bass – Gura Formula for Linear Dynamic Systems with Vector Control. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences.* 89(2). pp. 41–64. DOI: 10.18698/1812-3368-2020-2-41-64
9. Lapin, A.V., Zubov, N.E. & Proletarskii, A.V. (2023) Generalization of Ackermann formula for a certain class of multidimensional dynamic systems with vector input. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences.* 4(109). pp. 18–38. DOI: 10.18698/1812-3368-2023-4-18-38
10. Bernstein, D.S. (2005) *Matrix Mathematics*. Princeton University Press.
11. Voevodin, V.V. & Kuznetsov, Yu.A. (1984) *Matritsy i vychisleniya* [Matrices and Calculations]. Moscow: Nauka.
12. Misrikhanov, M.Sh. &. Ryabchenko, V.N (2004) Blochnoe reshenie algebraicheskikh uravneniy pri raschetakh elektricheskikh setey i sistem [Block solution of algebraic equations in calculations of electrical networks and systems]. *Vestnik Vestnik Tambovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. 7(42). pp. 29–42.
13. Goryunov, S.V. & Bukov, V.N. (2006) Obrashchenie i kanonizatsiya blochnykh matrits [Inversion and canonization of block matrices]. *Matematicheskie zametki*. 79(5). pp. 662–673.
14. Zubov, N.E., Mikrin, E.A. & Ryabchenko, V.N. (2016) *Matrichnye metody v teorii i praktike system avtomaticheskogo upravleniya letatel'nykh apparatov* [Matrix methods in theory and practice of flying vehicles automatic control systems]. Moscow: Bauman MSTU.
15. Kosyanchuk, V.V. Zheltov, S.Yu. & Zybin, E.Yu. (2021) Aircraft Flight Control System Fault Tolerance under Structural and Parametric Uncertainties. *Journal of Physics: Conference Series*. 1864. pp. 1–12. DOI: 10.1088/1742-6596/1864/1/012005
16. Ling, J., Ji H., Yu, C., Wang, S., Yu, D. & Jiang, S. (2018) Design of UPFC Sub-Synchronous Oscillation Damping Controller Based on Modal Control. *China International Conference on Electricity Distribution*. pp. 1439–1443. DOI: 10.1109/CICED.2018.8592538.
17. Dobroskok, N.A. & Vtorov, V.B. (2021) Robust Pole Assignment in a Problem of State Observer-Based Modal Control. *IV International Conference on Control in Technical Systems*. pp. 30–33. DOI: 10.1109/CTS53513.2021.9562851.
18. Zong, Q., Tian, K., Zuo, Q. & Wang, W. (2022) A Similarity Measurement Model of Complex Polygon with Holes Based on Fuzzy Matrix and Similarity Transformation. *3rd Int. Conf. on Geology, Mapping and Remote Sensing*. pp. 249–252. DOI: 10.1109/ICGMRS55602.2022.9849295
19. Kisacanin, B. & Agarwal, G.C. (2002) *Linear Control Systems: With Solved Problems and MATLAB Examples*. New York: Kluwer Academic/Plenum Publishers.
20. Bukov, V.N. (1987) *Adaptivnye prognoziruyushchie sistemy upravleniya poletom* [Adaptive predictive flight control systems]. Moscow: Nauka.
21. Nie, F., Wang, H., Cai, X., Huang, H. & Ding, C. (2012) Robust Matrix Completion via Joint Schatten p-Norm and lp-Norm Minimization. *IEEE 12th International Conference on Data Mining.* pp. 566–574. DOI: 10.1109/ICDM.2012.160.
22. Lapin, A.V. & Zubov, N.E. (2019) Parametric Synthesis of Modal Control with Output Feedback for Descent Module Attitude Stabilization. *2019 International Russian Automation Conference*. pp. 1–6. DOI: 10.1109/RusAutoCon.2019.8867744

23. Lapin, A.V. & Zubov, N.E. (2021) Analytic Solution of the Problem of Stabilizing Orbital Orientation of a Spacecraft with Flywheel Engines. *AIP Conference Proceedings*. 2318(1). Art. 130009. pp. 1–8. DOI: 10.1063/5.0036155

***Информация об авторах*:**
Зубов Николай Евгеньевич – профессор, доктор технических наук, декан факультета «Ракетно-космическая техника», профессор кафедры «Системы автоматического управления» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана (Москва, Россия). E-mail: nik.zubov@gmail.com
Лапин Алексей Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедры «Системы автоматического управления» Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана (Москва, Россия). E-mail: AlexeyPoeme@yandex.ru
Рябченко Владимир Николаевич – доцент, доктор технических наук, профессор кафедры «Системы автоматического управления» Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана (Москва, Россия). E-mail: ryabchenko.vn@mail.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

***Information about the authors*:**
Zubov Nikolay E. (Professor, Doctor of Technical Sciences, Dean of Rocket and Space Techniques Faculty, Professor of Department of Automatic Control Systems at Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation). E-mail: nik.zubov@gmail.com
Lapin Alexey V. (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of Department of Automatic Control Systems at Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation). E-mail: AlexeyPoeme@yandex.ru
Ryabchenko Vladimir N. (Associate Professor, Doctor of Technical Sciences, Professor of Department of Automatic Control Systems at Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation). E-mail: ryabchenko.vn@mail.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 02.11.2024; принята к публикации 02.06.2025

Received 02.11.2024; accepted for publication 02.06.2025