

*Посвящается светлой памяти члена-корреспондента
Национальной академии наук Республики Беларусь,
профессора Фаины Михайловны Кирилловой*

Научная статья
УДК 517.952; 62-50
doi: 10.17223/19988605/71/2

Необходимые условия оптимальности первого и второго порядков в обыкновенных динамических системах с запаздыванием при многоточечных функциональных ограничениях типа равенств и неравенств

Камиль Байрамали оглы Мансимов

*Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан
Институт систем управления Министерства науки и образования Азербайджана, Баку, Азербайджан
kamilbmansimov@gmail.com*

Аннотация. Рассматривается одна задача оптимального управления, описываемая системой дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом при наличии многоточечных функциональных ограничений типа равенств и неравенств. Во введении дается обзор работ, примыкающих к теме статьи. Первый раздел посвящен постановке задачи оптимального управления. Во втором разделе доказано необходимое условие оптимальности в форме аналога уравнения Эйлера. В третьем разделе сформулировано общее необходимое условие оптимальности второго порядка в терминах вторых вариаций функционалов, задающее ограничения и критерий качества. Из него получено необходимое условие оптимальности второго порядка, явно выраженное через параметры рассматриваемой задачи оптимального управления и носящее конструктивный характер. Установлен аналог условия Лежандра–Клебша. Изучен случай терминального критерия качества при наличии терминальных функциональных ограничений типа равенств и неравенств. Все необходимые условия оптимальности первого и второго порядков установлены без предположений о нормальности.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений с запаздыванием; допустимое управление; необходимое условие оптимальности; аналог уравнения Эйлера; условие Лежандра–Клебша; классический экстремаль.

Для цитирования: Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности первого и второго порядков в обыкновенных динамических системах с запаздыванием при многоточечных функциональных ограничениях типа равенств и неравенств // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2025. № 71. С. 17–26. doi: 10.17223/19988605/71/2

Original article
doi: 10.17223/19988605/71/2

Necessary conditions for first- and second-order optimality in ordinary dynamic systems with delay under multipoint functional constraints of the equalities and inequalities type

Kamil B. Mansimov

*Baku State University, Baku, Azerbaijan
Institute of Control Systems of the Ministry of Science and Education of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan
kamilbmansimov@gmail.com*

Abstract. The article considers one optimal control problem described by a system of differential equations with a retarded argument in the presence of multipoint functional constraints such as equalities and inequalities. The introduction provides an overview of works related to the topic of the article. The first section is devoted to the formulation of the optimal control problem. In the second section, the necessary condition for optimality is proved in the form

of an analogue of the Euler equation. In the third section, the general necessary condition for second-order optimality is formulated in terms of second variations of functionals defining constraints and quality criteria. From it, a necessary condition for second-order optimality was obtained, explicitly expressed through the parameters of the optimal control problem under consideration, and having a constructive nature. An analogue of the Legendre-Clebsch condition was established. Next, we study the case of a terminal quality criterion in the presence of terminal functional equations of the type of equalities and inequalities. All necessary conditions for first- and second-order optimality are established without assumptions of normality.

Keywords: system of differential equations with delay; admissible control; necessary condition for optimality analogue of the Euler equation; Legendre-Clebsch condition; classical extremal.

For citation: Mansimov, K.B. (2025) Necessary conditions for first- and second-order optimality in ordinary dynamic systems with delay under multipoint functional constraints of the equalities and inequalities type. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 71. pp. 17–26. doi: 10.17223/19988605/71/2

Введение

При выводе необходимых условий оптимальности второго порядка в различных задачах оптимального управления, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, в случае наличия фазовых или же функциональных ограничений на фазовую траекторию возникли существенные трудности (см., напр., обзор [1]).

Первые необходимые условия оптимальности второго порядка в общей задаче математического программирования в Банаховом пространстве при наличии ограничений и в некоторых задачах оптимального управления без дополнительных предположений о нормальности были получены в работах [2–6].

В дальнейшем выводу условий оптимальности второго порядка в задачах управления, описываемых дифференциальными уравнениями, при наличии фазовых или же функциональных ограничений были посвящены работы [7–15] и др. К настоящему времени теория необходимых условий оптимальности второго порядка, в частности теория особых управлений, достаточно полно развита также в случае задач управления, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, без запаздывания.

1. Постановка задачи

Пусть $[t_0, t_1]$ – заданный отрезок. Рассмотрим задачу о минимуме многоточечного функционала

$$S_0(u) = \varphi_0(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k)) \quad (1)$$

при следующих ограничениях:

$$S_v(u) = \varphi_v(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k)) \leq 0, v = \overline{1, p}, \quad (2)$$

$$S_v(u) = \varphi_v(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k)) = 0, v = \overline{p+1, q}, \quad (3)$$

$$u(t) \in U \subset R^r, t \in [t_0, t_1], \quad (4)$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t(h)), u(t_k)), t \in [t_0, t_1], \quad (5)$$

$$x(t) = x^0(t), t \in E_{t_0} = [h(t_0), t_0]. \quad (6)$$

Здесь U – заданное непустое, открытое и ограниченное множество, $f(t, x, y, u)$ – заданная n -мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (x, y, u) до второго порядка включительно, $\varphi_v(z_1, z_2, \dots, z_k), v = \overline{0, q}$ – заданные дважды непрерывно дифференцируемые скалярные функции, $h(t) < t$ – заданная непрерывно дифференцируемая скалярная функция, причем $\dot{h}(t) > 0$, $x^0(t)$ – заданная непрерывная на E_{t_0} начальная вектор-функция, а $u(t)$ – r -мерный измеримый и ограниченный вектор управляющих воздействий.

Предполагается, что каждой управляющей функции $u(t)$ соответствует единственное абсолютно непрерывное решение $x(t)$ системы (5), (6), определенное на отрезке $[t_0, t_1]$.

Управление $u(t)$ назовем допустимым управлением, если соответствующее решение $x(t)$ задачи (5), (6) удовлетворяет ограничениям (2), (3).

Допустимое управление $u(t)$, являющееся решением поставленной задачи, назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u(t), x(t))$ – оптимальным процессом

2. Необходимое условие оптимальности первого порядка

Допустим, что $(u(t), x(t))$ – оптимальный процесс в задаче (1)–(5). Для простоты дальнейших изложений предположим, что для всех $v = \overline{1, p}$ $S_v(u) = 0$, и введем обозначения

$$\begin{aligned} H(t, x, y, u, \psi_v) &= \psi_v' f(t, x, y, u), \\ y(t) &= x(h(t)), \quad H_x^v[t] \equiv H_x(t, x(t), y(t), u(t), \psi_v(t)), \\ H_{xx}^v[t] &\equiv H_{xx}(t, x(t), y(t), u(t), \psi_v(t)), \\ H_u^v[t] &\equiv H_u(t, x(t), y(t), u(t), \psi_v(t)), \\ H_{uu}^v[t] &\equiv H_{uu}(t, x(t), y(t), u(t), \psi_v(t)). \end{aligned}$$

Здесь $\psi_v(t)$ – измеримая и ограниченная n -мерная вектор-функция, являющаяся решением интегрального уравнения

$$\begin{aligned} \psi_v(t) &= \int_t^{t_1} [f_x'[\tau] \psi_v(\tau) + \dot{r}(\tau) f_y'[\tau] \psi_v(r(\tau))] d\tau - \sum_{j=1}^k \alpha_j(t) \frac{\partial \varphi_v(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k))}{\partial z_j}, \\ \psi_v(t) &= 0, t > t_1, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\alpha_j(t)$ – характеристическая функция отрезка $[t_0, T_j]$, $r(t)$ – функция, обратная к $h(t)$, а штрих (') означает знак транспонирования. Учитывая введенные обозначения и то, что $\psi_v(t)$ является решением системы (7), доказывается, что первая и вторая вариации функционала $S_v(u)$ в «точке» $u(t)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta^1 S_v(u : \delta u) &= - \int_{t_0}^{t_1} H_u^{(v)'}[t] \delta u(t) dt, \quad v = \overline{0, q}, \\ \delta^2 S_v(u : \delta u) &= \sum_{i,j=1}^k \delta x'(T_i) \frac{\partial^2 \varphi(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k))}{\partial z_i \partial z_j} \delta x(T_j) - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} [\delta x'(t) H_{xx}^{(v)}[t] \delta x(t) + \delta x'(t) H_{xy}^{(v)}[t] \delta y(t) + \delta y'(t) H_{yx}^{(v)}[t] \delta x(t) + \\ &+ \delta y'(t) H_{yy}^{(v)}[t] \delta y(t) + \delta u'(t) H_{ux}^{(v)}[t] \delta x(t) + \delta u'(t) H_{uy}^{(v)}[t] \delta y(t) + \\ &+ \delta x'(t) H_{xu}^{(v)}[t] \delta u(t) + \delta y'(t) H_{yu}^{(v)}[t] \delta u(t) + \delta u'(t) H_{uu}^{(v)}[t] \delta u(t)] dt, \quad v = \overline{0, q}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\delta u(t) \in R^r$, $t \in [t_0, t_1]$ – произвольная измеримая и ограниченная вектор-функция (вариация управления), а $\delta x(t)$ – вариация траектории, являющаяся решением уравнения в вариациях

$$\delta \dot{x}(t) = f_x[t] \delta x(t) + f_y[t] \delta y(t) + f_u[t] \delta u(t), \quad (10)$$

$$\delta x(t) = 0, \quad t \in E_{t_0}. \quad (11)$$

Используя (8) по схеме, например из [6, 16], доказываем, что для оптимальности допустимого управления $u(t)$ необходимо существование вектора $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_q) \in R^{q+1}$ такого, что

$$\lambda_v \geq 0, v = \overline{0, p}, \|\lambda\| = \sum_{v=0}^q |\lambda_v| = 1, \quad (12)$$

$$\sum_{v=0}^q \lambda_v \delta^1 S_v(u; \delta u) = 0 \quad (13)$$

для всех $\delta u(t) \in R^r, t \in [t_0, t_1]$.

В силу представления (8) условие оптимальности (13) превращается в следующее условие оптимальности (аналог уравнения Эйлера [7, 8, 17]):

$$H_u^{(\lambda)}[\theta] = 0, \quad (14)$$

для всех $\theta \in [t_0, t_1]$, где $H^{(\lambda)} = \sum_{v=0}^q \lambda_v H^{(v)}, \psi_\lambda(t) = \sum_{v=0}^q \psi_v(t)$, а $\theta \in [t_0, t_1]$ – произвольная правильная точка управления $u(t)$ (см., напр.: [18]).

Необходимое условие оптимальности (14), являясь условием оптимальности первого порядка, может выделить достаточно большое число допустимых управлений, подозрительных на оптимальность. Поэтому возникает проблема поиска дополнительных критериев оптимальности (условия оптимальности второго порядка) для отсева неоптимальных управлений, удовлетворяющих условию оптимальности (14).

3. Необходимое условие оптимальности второго порядка

Через $K(u; \delta u)$ обозначим множество критических вариаций управления $u(t)$ в задаче (1)–(6):

$$K(u; \delta u) = \left\{ \delta u; \delta^1 S_v(u; \delta u) \leq 0, v = \overline{0, p}, \delta^1 S_v(u; \delta u) = 0, v = \overline{p+1, q} \right\}. \quad (15)$$

Заметим, что понятие множества критических вариаций (15) было введено в [19] (см. также [20]).

Пусть $A(u)$ – множество всех векторов $\lambda \in R^{q+1}$, удовлетворяющих соотношениям (12), (13).

Приведем необходимое условие оптимальности второго порядка в рассматриваемой задаче.

По схеме из [21] без фактических изменений в рассуждениях доказываем

Теорема 1. Для оптимальности допустимого управления $u(t)$ задаче (1)–(6) необходимо, чтобы соотношение

$$\max_{\lambda \in A(u)} \sum_{v=0}^q \lambda_v \delta^2 S_v(u; \delta u) \geq 0 \quad (16)$$

выполнялось для всех $\delta u \in K(u; \delta u)$.

Неравенство (16) – неявный критерий оптимальности второго порядка, и поэтому его проверка является очень затруднительной.

Опираясь на условие оптимальности (16), получим конструктивно проверяемые необходимые условия оптимальности второго порядка, выраженные через параметры рассматриваемой задачи.

Решение уравнения в вариациях по аналогии с [22] может быть представлено в виде:

$$\delta x(t) = \int_{t_0}^t F(t, \tau) f_u[\tau] d\tau, \quad (17)$$

где $F(t, \tau)$ – $(n \times n)$ -матричная функция (аналог функции Коши), являющаяся решением задачи

$$\begin{aligned} F_\tau(t, \tau) &= -F(t, \tau) f_x[\tau] - \dot{r}(\tau) F(t, r(\tau)) f_y[r(\tau)], \tau < t, \\ F(t, t) &= E, F(t, \tau) = 0, \tau > t. \end{aligned}$$

Здесь E – $(n \times n)$ -единичная матрица.

Из (17) следует, что

$$\delta x(h(t)) = \delta y(t) = \int_{t_0}^t F(h(t), \tau) f_u[\tau] d\tau, \quad (18)$$

$$\delta x(T_i) = \delta y(t) = \int_{t_0}^{t_i} \alpha_i(t) F(T_i, t) f_u[t] \delta u(t) dt, \quad (19)$$

где $\alpha_i(t)$ – характеристическая функция отрезка $[t_0, T_i]$.

Используя представления (17)–(19) получаем, что

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^k \delta x'(T_i) \frac{\partial^2 \Phi_v(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k))}{\partial z_i \partial z_j} \delta x(T_j) = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i,j=1}^k \alpha_i(\tau) \alpha_j(s) \delta u'(\tau) f_u'[\tau] F'(T_i, \tau) \frac{\partial^2 \Phi_v(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k))}{\partial z_i \partial z_j} F(T_j, s) f_u[s] \delta u(s) ds d\tau, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta u'(t) H_{ux}^{(v)}[t] \delta x(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_t^{t_1} \delta u'(\tau) H_{ux}^{(v)}[\tau] F(\tau, t) f_u[t] \delta u(t) d\tau dt, \quad (21)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta u'(t) H_{uy}^{(v)}[t] \delta y(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_t^{t_1} \delta u'(\tau) H_{uy}^{(v)}[\tau] F(h(\tau), t) f_u[t] \delta u(t) d\tau dt. \quad (22)$$

Далее получаем, что

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} [\delta u'(t) H_{xx}^{(v)}[t] \delta x(t) + \delta x'(t) H_{xy}^{(v)}[t] \delta y(t) + \delta y'(t) H_{yx}^{(v)}[t] \delta x(t) + \delta y'(t) H_{yy}^{(v)}[t] \delta y(t)] dt = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \delta u'(\tau) f_u'[\tau] \left[\int_{\max(\tau, s)}^{t_1} [F'(t, \tau) H_{xx}^{(v)}[t] F(t, s) + F'(t, \tau) H_{xy}^{(v)}[t] F(h(t), s) + \right. \\ & \left. + F'(h(t), \tau) H_{yx}^{(v)}[t] F(t, s) + F'(h(t), \tau) H_{yy}^{(v)}[t] F(h(t), \tau)] dt \right] f_u[s] \delta u(s) ds d\tau. \end{aligned} \quad (23)$$

Введем ряд обозначений. Пусть

$$\begin{aligned} M^{(v)}(\tau, s) &= - \sum_{i,j=1}^k \alpha_i(\tau) \alpha_j(s) F'(T_i, \tau) \frac{\partial^2 \Phi_v(x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_k))}{\partial z_i \partial z_j} F(T_j, s) + \\ &+ \int_{\max(\tau, s)}^{t_1} [F'(t, \tau) H_{xx}^{(v)}[t] F(t, s) + F'(t, \tau) H_{xy}^{(v)}[t] F(h(t), s) + \\ &+ F'(h(t), \tau) H_{yx}^{(v)}[t] F(t, s) + F'(h(t), \tau) H_{yy}^{(v)}[t] F(h(t), \tau)] dt, \\ M^{(\lambda)}(\tau, s) &= \sum_{v=0}^q \lambda_v M^{(v)}(\tau, s). \end{aligned}$$

С учетом введенных обозначений и тождеств (20)–(23) вторая вариация (9) функционала $S_v(u)$ представляется в виде:

$$\begin{aligned} \delta^2 S_v(u; \delta u) &= - \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \delta u'(\tau) f_u'[\tau] M^{(v)}(\tau, s) f_u[s] \delta u(s) ds d\tau - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \int_t^{t_1} \delta u'(s) (H_{ux}^{(v)}[s] F(s, t) + H_{uy}^{(v)}[s] F(h(s), t)) f_u[t] \delta u(t) dt - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \delta u'(t) f_u[t] \left[\int_t^{t_1} (F'(s, t) H_{xu}^{(v)}[s] + F'(h(s), t) H_{yu}^{(v)}[s]) \delta u(s) ds \right] dt - \end{aligned}$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} \delta u'(t) H_{uu}^{(v)}[t] \delta u(t) dt, v = \overline{0, q}. \quad (24)$$

Принимая во внимание формулу (24) в неравенстве (16), приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. Для оптимальности допустимого управления $u(t)$ необходимо, чтобы для всех $\delta u(t) \in R^r, t \in [t_0, t_1]$, удовлетворяющих условиям

$$\int_{t_0}^{t_1} H_u^{(v)'}[t] \delta u(t) dt \geq 0, v = \overline{0, p}, \int_{t_0}^{t_1} H_u^{(v)'}[t] \delta u(t) dt = 0, v = \overline{p+1, q},$$

выполнялось неравенство

$$\begin{aligned} \min_{\lambda \in A(u)} & \left[\int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \delta u'(\tau) f_u'[\tau] M^{(\lambda)}(\tau, s) f_u[s] \delta u(s) ds dt + \right. \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_t^{t_1} \delta u'(s) \left(H_{ux}^{(\lambda)}[s] F(s, t) + H_{uy}^{(\lambda)}[s] F(h(s), t) \right) ds \right] f_u[t] \delta u(t) dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \delta u'(t) f_u'[t] \left[\int_t^{t_1} \left(F'(s, t) H_{xu}^{(\lambda)}[s] + F'(h(s), t) H_{yu}^{(\lambda)}[s] \right) \delta u(s) ds \right] dt + \\ & \left. + \int_{t_0}^{t_1} \delta u'(t) H_{uu}^{(\lambda)}[t] \delta u(t) dt \leq 0. \right] \quad (25) \end{aligned}$$

Как видно, неравенство (25) является конструктивно проверяемым необходимым условием оптимальности второго порядка. Более того, из него, определяя тем или иным образом допустимую вариацию $\delta u \in K(u; \delta u)$ управления $u(t)$, несложно получить ряд легко проверяемых и удобных для практического использования необходимых условий оптимальности второго порядка.

Непосредственным следствием теоремы 2 является

Следствие 1. (Аналог условия Лежандра–Клебша). Для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в задаче (1)–(6) необходимо, чтобы для всех $v \in R^r$ и $\theta \in [t_0, t_1]$ выполнялось неравенство

$$\min_{\lambda \in A(u)} v' H_{uu}^{(\lambda)}[\theta] v \leq 0. \quad (26)$$

Доказательство этого следствия проводится по аналогии со схемой доказательства соответствующего результата для случая системы уравнений без запаздывания с терминальными ограничениями из [6, 21] и поэтому не приводится.

Теперь введем обозначения

$$\begin{aligned} p^{(\lambda)}(\theta, e) &= \int_{\theta}^{t_1} \int_{\theta}^{t_1} e'(\tau) f_u'[\tau] M^{(\lambda)}(\tau, s) f_u[s] e(s) ds dt + \\ & + \int_{\theta}^{t_1} \delta u'(t) H_{uu}^{(\lambda)}[t] e(t) dt + \int_{\theta}^{t_1} \left[\int_t^{t_1} e'(s) \left(H_{ux}^{(\lambda)}[s] F(s, t) + H_{uy}^{(\lambda)}[s] F(h(s), t) \right) ds \right] f_u[t] e(t) dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} e'(t) f_u'[t] \left[\int_t^{t_1} \left(F'(s, t) H_{xu}^{(\lambda)}[s] + F'(h(s), t) H_{yu}^{(\lambda)}[s] \right) e(s) ds \right] dt, \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^{(\lambda)}(\theta) &= \int_{\theta}^{t_1} \int_{\theta}^{t_1} f_u'[\tau] M^{(\lambda)}(\tau, s) f_u[s] ds dt + \int_{\theta}^{t_1} H_{uu}^{(\lambda)}[t] dt + \int_{\theta}^{t_1} \left[\int_t^{t_1} \left(H_{ux}^{(\lambda)}[s] F(s, t) + H_{uy}^{(\lambda)}[s] F(h(s), t) \right) ds \right] f_u[t] dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} f_u'[t] \left[\int_t^{t_1} \left(F'(s, t) H_{xu}^{(\lambda)}[s] + F'(h(s), t) H_{yu}^{(\lambda)}[s] \right) ds \right] dt, \quad (28) \end{aligned}$$

$$N^{(\lambda)}(\theta, e) = \int_{\theta}^{t_1} [M^{(\lambda)}(\theta, s) f_u[s] + F'(s, \theta) H_{xu}^{(\lambda)}[s] + F'(h(s), \theta) H_{yu}^{(\lambda)}[s]] e(s) ds, \quad (29)$$

$$L^{(\lambda)}(\theta) = \int_{\theta}^{t_1} [M^{(\lambda)}(\theta, s) f_u[s] + F'(s, \theta) H_{xu}^{(\lambda)}[s] + F'(h(s), \theta) H_{yu}^{(\lambda)}[s]] e(s) ds. \quad (30)$$

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 3. Для оптимальности допустимого управления $u(t)$ необходимо, чтобы для всех $\theta \in [t_0, t_1]$ и $e(t) \in R^r, t \in [t_0, t_1]$, удовлетворяющих условиям

$$\int_{\theta}^{t_1} H_u^{(v)}[t] e(t) dt \geq 0, v = \overline{0, p}, \int_{\theta}^{t_1} H_u^{(v)}[t] e(t) dt = 0, v = \overline{p+1, q},$$

выполнялось неравенство

$$\min_{\lambda \in A(u)} p^{(\lambda)}(\theta, e) \leq 0. \quad (31)$$

Теорема 4. Для оптимальности допустимого управления $u(t)$ необходимо, чтобы неравенство

$$\min_{\lambda \in A(u)} v' R^{(\lambda)}(\theta) v \leq 0 \quad (32)$$

выполнялось для всех $v \in R^r$ и $\theta \in [t_0, t_1]$ таких, что

$$\int_{\theta}^{t_1} H_u^{(v)}[t] v dt \geq 0, v = \overline{0, p}, \int_{\theta}^{t_1} H_u^{(v)}[t] v dt = 0, v = \overline{p+1, q}.$$

Для доказательства теоремы 3 достаточно в (25) вариацию $\delta u(t)$ управления $u(t)$ определить по формуле

$$\delta u(t) = \begin{cases} 0, t \in [t_0, \theta), \\ e(t), t \in [\theta, t_1]. \end{cases}$$

Полагая $e(t) = v$, из теоремы 3 получаем утверждение теоремы 4. Ясно, что условие оптимальности (32) слабее, чем условие оптимальности (31), но его проверка в ряде случаев намного проще.

Рассмотрим один частный случай, позволяющий получить уравнение для определения функций $P^{(\lambda)}(\theta, e)$ и $R^{(\lambda)}(\theta)$. Пусть в задаче (1)–(6) функционалы $S_v(u)$ являются терминальными, т.е.

$$S_v(u) = \varphi_v(x(t_1)), v = \overline{0, q}. \quad (33)$$

В случае задачи (2)–(6), (33) формула для $M^{(\lambda)}(\tau, s)$ принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} M^{(\lambda)}(\tau, s) = & -F'(t_1, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_{\lambda}(x(t_1))}{\partial x^2} F(t_1, s) + \\ & + \int_{\max(\tau, s)}^{t_1} [F'(t, \tau) H_{xx}^{(\lambda)}[t] F(t, s) + F'(t, \tau) H_{xy}^{(\lambda)}[t] F(h(t), s) + \\ & + F'(h(t), \tau) H_{yx}^{(\lambda)}[t] F(t, s) + F'(h(t), \tau) H_{yy}^{(\lambda)}[t] F(h(t), \tau)] dt. \end{aligned} \quad (34)$$

Поэтому из (34) получаем, что

$$\frac{\partial M^{(\lambda)}(\theta, s)}{\partial \theta} = f'_x[\theta] M^{(\lambda)}(\theta, s) - f'_y[r(\theta)] \dot{r}(\theta) M^{(\lambda)}(r(\theta), s). \quad (35)$$

Принимая во внимание (35), из (29), (30) непосредственным дифференцированием получаем, что $N^{(\lambda)}(\theta, e)$ и $L^{(\lambda)}(\theta)$ являются решениями следующих задач:

$$\begin{aligned} \dot{N}^{(\lambda)}(\theta, e) = & -f'_x[\theta] N^{(\lambda)}(\theta, e) - \dot{r}(\theta) f'_y[r(\theta)] N^{(\lambda)}(r(\theta), e(\theta)) - \\ & - [H_{xu}^{(\lambda)}[\theta] + M^{(\lambda)}(\theta, \theta) f_u[\theta]] e(\theta), \quad N^{(\lambda)}(t_1, e) = 0, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned}\dot{L}^{(\lambda)}(\theta) &= -f'_x[\theta]L^{(\lambda)}(\theta) - \dot{r}(\theta)f'_y[r(\theta)]L^{(\lambda)}(r(\theta)) - [H_{xu}^{(\lambda)}[\theta] + M^{(\lambda)}(\theta, \theta)f_u[\theta]], \\ L^{(\lambda)}(t_1) &= 0.\end{aligned}\quad (37)$$

Теперь с учетом (36), (37) из (27), (28) легко получить, что в случае задачи (2)–(6), (33) функции $P^{(\lambda)}(\theta, e)$ и $R^{(\lambda)}(\theta)$ являются решениями следующих задач Коши:

$$\begin{aligned}\dot{P}^{(\lambda)}(\theta, e) &= -e'(\theta)f'_u[\theta]N^{(\lambda)}(\theta, e) - N^{(\lambda)'}(\theta, e)f'_u[r(\theta)]e(\theta) - e'(\theta)H_{uu}^{(\lambda)}[\theta]e(\theta), \\ P^{(\lambda)}(t_1, e) &= 0,\end{aligned}\quad (38)$$

$$\dot{R}^{(\lambda)}(\theta) = -f'_u[\theta]R^{(\lambda)}(\theta) - R^{(\lambda)'}(\theta)f_u[\theta] - H_{uu}^{(\lambda)}[\theta], \quad R^{(\lambda)}(t_1) = 0. \quad (39)$$

Заключение

Рассматривается задача о минимуме многоточечного функционала, определенного на абсолютно непрерывных решениях обыкновенного дифференциального уравнения с переменным запаздыванием при наличии промежуточных функциональных ограничений типа равенств и неравенств на состояние системы. Допустимые управления входят в класс измеримых и ограниченных вектор-функций. Приведены первая и вторая вариации (в классическом смысле) критерия качества и функционалов, задающие ограничения. Доказаны аналог уравнения Эйлера и ряд общих необходимых условий оптимальности второго порядка, носящих конструктивный характер, позволяющих сузить множество классических экстремалей, подозрительных на оптимальность. В частности, получен аналог условия Лежандра–Клебша. Рассмотрен один частный случай.

Список источников

1. Гороховик В.В. Необходимые условия оптимальности высокого порядка для задачи управления с терминальными ограничениями : препринт ИМ АН БССР. Минск, 1982. № 1 (126). 50 с.
2. Левитин Е.С., Милютин А.А., Осмоловский Н.П. Об условиях локального минимума в задаче с ограничениями // Математическая экономика и функциональный анализ : сб. ст. М. : Наука, 1974. С. 139–202.
3. Левитин Е.С., Милютин А.А., Осмоловский Н.П. Условия высших порядков в гладких задачах на экстремум с ограничениями // Теоретические и прикладные вопросы оптимального управления : сб. ст. М. : Наука, 1985. С. 4–40.
4. Осмоловский Н.П. Условия второго порядка слабого локального минимума в задаче оптимального управления // Доклады Академии наук СССР. 1975. Т. 225, № 2. С. 259–262.
5. Дмитрук А.В. Квадратичные условия слабого минимума для особых режимов в задачах оптимального управления // Доклады Академии наук СССР. 1977. Т. 233, № 4. С. 523–526.
6. Гороховик В.В. Необходимые условия оптимальности в задачах оптимизации с векторным показателем качества // Проблемы оптимального управления : сб. ст. Минск : Наука и техника, 1981. С. 5–25.
7. Калинин А.И. К теории необходимых условий оптимальности второго порядка // Доклады Академии наук БССР. 1982. № 8. С. 677–680.
8. Калинин А.И. К проблеме особых управлений // Дифференциальные уравнения. 1985. № 3. С. 380–385.
9. Ащепков Л.Т., Васильев О.В. Исследование экстремалей Понтрягина методами нелинейного программирования // Вопросы оптимизации и устойчивости динамических систем : сб. ст. Иркутск : Изд-во Иркут. ун-та, 1983. С. 5–23.
10. Гороховик С.Я. Необходимые условия оптимальности в задаче с подвижным правым концом траектории // Дифференциальные уравнения. 1975. № 10. С. 1765–1773.
11. Колокольникова Г.А. Необходимое условие оптимальности второго порядка в задачах оптимального управления с подвижными концами. Иркутск : Иркут. гос. ун-т, 1990. Деп. в ВИНТИ АН СССР. № 1350.
12. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление разрывными системами. Новосибирск : Наука, 1987. 226 с.
13. Гороховик В.В. Необходимые условия слабой эффективности в задаче управления с векторным показателем качества : препринт ИМ АН БССР. Минск, 1976. № 131 (3). 44 с.
14. Аграчев А.А. Необходимое условие оптимальности второго порядка в общем нелинейном случае // Математический сборник. 1977. Т. 102 (144), № 4. С. 551–568.
15. Warga J. Second order constition that strengthens Pontryagins maximum principle // Journ. Optim. Theory and Appl. 1978. V. 24 (3). P. 475–484.
16. Моисев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. М. : Наука, 1975. 526 с.
17. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М. : Либроком, 2011. 256 с.

18. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М. : Наука, 1969. 384 с.
19. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1965. № 3. С. 395–413.
20. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Вторые вариации в задачах на экстремум с ограничениями // Доклады Академии наук СССР. 1965. Т. 160, № 1. С. 18–21.
21. Гороховик В.В. Необходимые условия слабой эффективности в задаче управления с векторным показателем качества : препринт ИМ АН БССР. Минск, 1976. № 13 (13). 44 с.
22. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Минск : Изд-во Белорус. гос. ун-та, 1973. 256 с.

References

1. Gorokhovik, V.V. (1982) Neobkhodimye usloviya optimal'nosti vysokogo poryadka dlya zadachi upravleniya s terminal'nymi ogranicheniyami [Necessary high-order optimality conditions for a control problem with terminal constraints]. *Preprint IM AN BSSSR*. 1(126).
2. Levitin, E.S., Milyutin, A.A. & Osmolovsky, N.P. (1974) Ob usloviyakh lokal'nogo minimuma v zadache s ogranicheniyami [On the conditions for a local minimum in a problem with restrictions]. In: Mityagin, B.S. (ed.) *Matematicheskaya ekonomika i funktsional'nyy analiz* [Mathematical Economics and Functional Analysis]. Moscow: Nauka. pp. 139–202.
3. Levitin, E.S., Milyutin, A.A. & Osmolovsky N.P. (1985) Usloviya vysshikh poryadkov v gladkikh zadachakh na ekstremum s ogranicheniyami [Conditions of higher orders in smooth extremum problems with restrictions]. In: *Teoreticheskie i prikladnye voprosy optimal'nogo upravleniya* [Theoretical and Applied Issues of Optimal Control]. Moscow: Nauka. pp. 4–40.
4. Osmolovsky, N.P. (1975) Usloviya vtorogo poryadka slabogo lokal'nogo minimuma v zadache optimal'nogo upravleniya [Second-order conditions for a weak local minimum in an optimal control problem]. *Doklady Akademii nauk SSSR*. 225(2). pp. 259–262.
5. Dmitruk, A.V. (1977) Kvadratichnye usloviya slabogo minimuma dlya osobykh rezhimov v zadachakh optimal'nogo upravleniya [Quadratic conditions for a weak minimum for special modes in optimal control problems]. *Doklady Akademii nauk SSSR*. 233(4). pp. 523–526.
6. Gorokhovik, V.V. (1981) Neobkhodimye usloviya optimal'nosti v zadachakh optimizatsii s vektornym pokazatelem kachestva [Necessary conditions for optimality in optimization problems with a vector quality indicator]. In: Gabasov, R. & Kirillova, F.M. (eds) *Problemy optimal'nogo upravleniya* [Problems of Optimal Control]. Minsk: Nauka i tekhnika. pp. 5–25.
7. Kalinin, A.I. (1982) K teorii neobkhodimyykh usloviy optimal'nosti vtorogo poryadka [On the theory of necessary conditions for second-order optimality]. *Doklady Akademii nauk BSSR*. 8. pp. 677–680.
8. Kalinin, A.I. (1985) K probleme osobykh upravleniy [On the problem of singular controls]. *Differentsial'nye uravneniya*. 3. pp. 380–385.
9. Ashchepkov, L.T. & Vasilyev, O.V. (1983) Issledovanie ekstremaley Pontryagina metodami nelineynogo programmirovaniya [The study of Pontryagin extremals using nonlinear programming methods]. *Voprosy optimizatsii i ustoychivosti dinamicheskikh sistem* [Questions of optimization and stability of dynamic systems]. Irkutsk: Irkutsk State University. pp. 5–23.
10. Gorokhovik, S.Ya. (1975) Neobkhodimye usloviya optimal'nosti v zadache s podvizhnym pravym kontsom traektorii [Necessary conditions for optimality in a problem with a moving right end of a trajectory]. *Differentsial'nye uravneniya*. 10, pp. 1765–1773.
11. Kolokolnikova, G.A. (1990) *Neobkhodimoe uslovie optimal'nosti vtorogo poryadka v zadachakh optimal'nogo upravleniya s podvizhnymi kontsami* [A necessary condition for second-order optimality in optimal control problems with moving ends]. № 1350. Irkutsk: Irkutsk State University.
12. Ashchepkov, L.T. (1987) *Optimal'noe upravlenie razryvnymi sistemami* [Optimal Control of Bursting Systems]. Novosibirsk: Nauka.
13. Gorokhovik, V.V. (1976) Neobkhodimye usloviya slaboy effektivnosti v zadache upravleniya s vektornym pokazatelem kachestva [Necessary conditions for weak efficiency in a control problem with a vector quality indicator]. *Preprint IM AN BSSSR*. 131(3).
14. Agrachev, A.A. (1977) Neobkhodimoe uslovie optimal'nosti vtorogo poryadka v obshchem nelineynom sluchae [Necessary condition for second-order optimality in the general nonlinear case]. *Matematicheskii sbornik*. 102(144). no. 4. pp. 551–568.
15. Warga, J. (1978) Second order constitution that strengthens Pontryagins maximum principle. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 24(3). pp. 475–484.
16. Moisey N.N. (1975) *Elementy teorii optimal'nykh sistem* [Elements of the Theory of Optimal Systems]. Moscow: Nauka.
17. Gabasov, R. & Kirillova, F.M. (2011) *Osobyie optimal'nye upravleniya* [Singular Optimal Controls]. Moscow: Librokom.
18. Pontryagin, L.S., Boltyansky, V.G., Gamkrelidze, R.V. & Mishchenko, E.F. (1969) *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [Mathematical Theory of Optimal Processes]. Moscow: Nauka.
19. Dubovitsky, A.Ya. & Milyutin, A.A. (1965) Zadachi na ekstremum pri nalichii ogranicheniy [Extremum problems in the presence of restrictions]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*. 3. pp. 395–413.
20. Dubovitsky, A.Ya. & Milyutin, A.A. (1965) Vtorye variatsii v zadachakh na ekstremum s ogranicheniyami [Second variations in extremum problems with restrictions]. *Doklady Akademii nauk SSSR*. 160(1). pp. 18–21.
21. Gorokhovik, V.V. (1976) Neobkhodimye usloviya slaboy effektivnosti v zadache upravleniya s vektornym pokazatelem kachestva [Necessary conditions for weak efficiency in a control problem with a vector quality indicator]. *Preprint IM AN BSSSR*. 13(13).
22. Gabasov, R. & Kirillova, F.M. (1973) *Optimizatsiya lineynykh sistem* [Optimization of Linear Systems]. Minsk: Belarus State University.

Информация об авторе:

Мансимов Камил Байрамали оглы – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией «Методы управления в сложных динамических системах» Института систем управления Министерства науки и образования Азербайджана (Баку, Азербайджан); заведующий кафедрой «Математическая кибернетика» Бакинского государственного университета (Баку, Азербайджан), E-mail: kamilbmansimov@gmail.com

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Information about the authorss:

Mansimov Kamil B. (Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Laboratory “Control Methods in Complex Dynamic Systems” of the Institute of Control Systems of the Ministry of Science and Education of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan); Head Department of Mathematical Cybernetics, Baku State University (Baku, Azerbaijan), E-mail: kamilbmansimov@gmail.com

The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 16.12.2024; принята к публикации 02.06.2025

Received 16.12.2024; accepted for publication 02.06.2025