

Научная статья  
УДК 681.5.013  
doi: 10.17223/19988605/71/3

## Управление нелинейными системами с хаотической динамикой

Наталья Владимировна Сорокина<sup>1</sup>, Владимир Николаевич Шашихин<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия

<sup>1</sup> sorokina\_nv@spbstu.ru

<sup>2</sup> shashihin@bk.ru

**Аннотация.** Рассматривается задача управления нелинейной системой с хаотической динамикой на основе централизованной структуры регулятора. Управление строится по принципу обратной связи, позволяющей реализовать в замкнутой системе заданный спектр характеристических показателей Ляпунова для подавления хаотической динамики. Рассмотрено использование предлагаемой методики синтеза на примере системы трех синхронных генераторов. Результаты численного эксперимента подтвердили подавление хаотических колебаний и обеспечение в замкнутой системе регулярного режима.

**Ключевые слова:** нелинейные системы; хаос; характеристические показатели Ляпунова.

**Для цитирования:** Сорокина Н.В., Шашихин В.Н. Управление нелинейными системами с хаотической динамикой // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2025. № 71. С. 27–38. doi: 10.17223/19988605/71/3

Original article  
doi: 10.17223/19988605/71/3

## Control of nonlinear systems with chaotic dynamics

Natalia V. Sorokina<sup>1</sup>, Vladimir N. Shashihin<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Peter the Great Saint Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, Russian Federation

<sup>1</sup> sorokina\_nv@spbstu.ru

<sup>2</sup> shashihin@bk.ru

**Abstract.** The article considers the problem of controlling a nonlinear system with chaotic dynamics based on a centralized controller structure. Control is based on the principle of feedback, which allows the implementation of a given spectrum of Lyapunov exponents in a closed system to suppress chaotic dynamics. An example of the application of the proposed synthesis method to a system of three synchronous generators is considered. The results of the numerical experiment confirmed the suppression of the chaotic oscillations and the provision of a regular mode in the closed system.

**Keywords:** nonlinear systems; chaos; Lyapunov exponent.

**For citation:** Sorokina, N.V., Shashihin, V.N. (2025) Control of nonlinear systems with chaotic dynamics. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 71. pp. 27–38. doi: 10.17223/19988605/71/3

## Введение

Хаотические режимы могут возникать во многих нелинейных динамических системах. Для одних систем хаотические режимы являются вредными – приводят к шумам в системах связи или вибрациям различных конструкций, для других – полезными, например для криптографических систем. Поэтому для одних систем необходимо подавить хаос и стабилизировать динамическую

систему, для других – создать хаос или усилить его. Вследствие этого одной из актуальных задач теории динамического хаоса является разработка методов управления хаосом [1].

Под стабилизацией динамической системы с хаотическим поведением подразумевается нахождение управляющих воздействий, позволяющих вывести систему из хаотического режима на регулярный.

Для стабилизации хаотических систем исторически первыми и наиболее активно развиваемыми в настоящее время являются следующие методы. Метод Отта–Гребоджи–Йорке (OGY-метод) [2] предназначен для стабилизации неустойчивой периодической траектории, вложенной в аттрактор хаотической системы, путем малых возмущений изменяемого параметра системы. Эти возмущения находятся с помощью дискретной модели системы, основанной на линеаризации отображения Пуанкаре.

Метод Пирагаса [3] обеспечивает стабилизацию периодической орбиты нелинейной системы путем построения обратной связи по фазовому вектору с запаздывающим аргументом. Этот метод чувствителен к выбору времени запаздывания в зависимости от периода цикла, который, как правило, неизвестен в хаотических системах, поэтому достичь требуемой сходимости можно в редких случаях.

Метод Магницкого [4] предназначен для локализации и стабилизации неустойчивых особых точек и периодических решений хаотических систем с помощью введения координатно-параметрической обратной связи в расширенном пространстве. К достоинствам метода относится то, что он позволяет найти неподвижные точки или периодические траектории хаотической системы, не требует информации о величине периода и положении искомого неустойчивого цикла в фазовом пространстве.

Также для управления хаотической динамикой используются традиционные подходы и методы автоматического управления. Например, в работе [5] стабилизация хаотической системы осуществляется с помощью обратной связи по отклонению, а для выбора коэффициентов регулятора используется критерий Рауса–Гурвица.

Настоящая работа посвящена решению задачи стабилизации нелинейных систем с хаотической динамикой. Процедура синтеза управления основана на формировании желаемого спектра характеристических показателей Ляпунова путем введения обратной связи по фазовому вектору. Коэффициенты обратной связи определяются на основе решения матричного уравнения Сильвестра.

## 1. Постановка задачи

### 1.1. Математическая модель нелинейной системы

Пусть возмущенные движения нелинейного динамического объекта описываются автономным векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  – вектор управления,  $m \leq n$ ,  $F(x(t)) = (f_i(x(t)))_{i=1}^n$  – векторная функция, удовлетворяющая условиям существования решений уравнения (1),  $f_i(x(t))$  – вещественные функции, определенные и непрерывные по совокупности аргументов в области

$$\Omega = \{(x, u) \mid \|x\| + \|u\| < \varrho, \varrho = \text{const} > 0\} \subset \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m.$$

Векторная функция  $F$  обладает заданным классом гладкости по векторному аргументу  $x(t)$  –  $F \in \mathbb{C}_x^r$ , или удовлетворяет условию Липшица

$$\|F(x') - F(x'')\| \leq k \|x' - x''\|, \quad k > 0.$$

Кроме того, векторная функция  $F$ :

– обладает неустойчивостью по отношению к заданию начальных условий, т.е. имеется величина  $\delta$  такая, что для некоторой точки  $x \in \mathbb{R}^n$  и  $\varepsilon > 0$  существует точка  $y \in \mathbb{R}^n$ , для которой расстояние

$$\text{dist}[x(t_0), y(t_0)] < \varepsilon, \text{ а } \text{dist}[x(t), y(t)] \geq \delta \text{ для } t > t_0;$$

– является топологически транзитивной, т.е. для любых двух открытых множеств  $N, M$  найдется такое  $l$ , что

$$F^l(N) \cap M \neq \emptyset;$$

– обладает элементом регулярности, или, иначе, плотностью периодических траекторий, – в любой окрестности любой точки фазового пространства существует по крайней мере одна и, следовательно, бесконечно много периодических траекторий.

Для траекторий  $x(t, x_0)$  системы (1) может выполняться одна из трех возможностей:

– либо траектория  $x(t, x_0) = x^0$  является точкой покоя или состоянием равновесия;

– либо траектория  $x(t, x_0)$  соответствует периодическому решению, в этом случае существует такое число  $T > 0$ , что

$$x(t+T, x_0) \equiv x(t, x_0),$$

и траектория называется периодической, или замкнутой;

– либо для любых  $t_1 \neq t_2$

$$x(t_1, x_0) \neq x(t_2, x_0).$$

Предположим, что вектор состояния системы (1) достаточно велик. В этом случае она может быть представлена в виде совокупности подсистем. Состояние  $i$ -й изолированной (невзаимодействующей) подсистемы определяется выражением

$$\dot{x}_i = g_i(t, x_i), \quad x_i(0) = x_{i0}, \quad g_i(t, 0) \equiv 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad (2)$$

где  $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$  – вектор состояния  $i$ -й подсистемы,  $\sum_{i=1}^N n_i = n$ ,  $g_i(t, x_i): \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}$  – векторные функции,

определяющие состояние изолированных подсистем,  $N$  – количество подсистем в системе. Функции

$$h_i(t, x): \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_i},$$

равные

$$h_i(t, x) = f_i(t, x) - g_i(t, x_i), \quad i = \overline{1, N}, \quad (3)$$

описывают взаимосвязи  $i$ -й подсистемы с другими подсистемами.

Поведение  $i$ -й взаимодействующей подсистемы может быть представлено уравнением

$$\dot{x}_i = g_i(t, x_i) + h_i(t, x), \quad i = \overline{1, N}. \quad (4)$$

Уравнение (3) описывает связи между изолированными подсистемами (2), а уравнение (4) – поведение крупномасштабной системы (1), представленной в виде взаимодействующих подсистем.

## 1.2. Характеристические показатели Ляпунова

Одна из особенностей нерегулярных режимов – неустойчивость траекторий, принадлежащих хаотическому (странному) аттрактору. Количественной мерой этой неустойчивости являются характеристические показатели, введенные первоначально Ляпуновым [6]. Формально характеристический показатель Ляпунова вводится следующим образом: характеристическим показателем функции  $z(t)$  называется число (или символ  $\pm\infty$ ), определенное следующим образом:

$$\lambda(z) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \left( t^{-1} \ln \|z(t)\| \right).$$

Характеристический показатель Ляпунова функции  $z(t)$  есть результат сравнения скорости роста функции  $z(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  с экспонентой  $\exp\{\chi t\}$ , для которой характеристический показатель равен  $\chi$ . Среди всего набора характеристических показателей Ляпунова наиболее важен наибольший (старший) показатель  $\chi_1 = \chi_{\max}$ . Если  $\chi_1 < 0$ , то траектория нелинейной системы асимптотически устойчива; если  $\chi_1 > 0$  – неустойчива. Набор характеристических показателей, упорядоченных по убыванию,  $\chi_1 \geq \chi_2 \geq \dots \geq \chi_n$ , называют спектром Ляпунова нелинейной динамической системы. В  $n$ -мерных системах сигнатура спектра Ляпунова (знаки характеристических показателей) может принимать следующий вид:

$$\underbrace{(-, -, -, \dots, -, -, -)}_n, \quad (5a)$$

$$(0, \underbrace{-, -, \dots, -, -, -}_{n-1}), \quad (5б)$$

$$\underbrace{(+, \dots, +, 0, -, \dots, -)}_s, \quad (5в)$$

где формула (5a) определяет состояние равновесия, (5б) — предельный цикл, а (5в) — странный аттрактор.

### 1.3. Задача подавления хаоса

Задача подавления хаоса состоит в преобразовании нерегулярного режима системы (1), который характеризуется спектром Ляпунова (5в), в регулярный режим со спектром характеристических показателей (5a) или (5б), т.е. обеспечить аттрактор в виде особой точки или предельного цикла.

Для решения этой задачи будем искать управление в виде обратной связи по фазовому вектору нелинейной системы (1)

$$u(t) = Lx(t), \quad L \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

которое обеспечит в замкнутой системе

$$\dot{x}(t) = F(x(t), Lx(t)), \quad x(0) = x_0,$$

спектр характеристических показателей Ляпунова

$$\sigma(F) = \{\chi_i(F), \quad i = \overline{1, n}\},$$

равный желаемому (требуемому) спектру, который определяется требуемым характером регулярного движения системы (1).

Таким образом, задача стабилизации сводится к подавлению хаотических колебаний путем приведения их к регулярным колебаниям (стабилизация предельного цикла) либо полному подавлению колебаний (стабилизация особой точки) путем введения обратной связи.

## 2. Синтез обратной связи

### 2.1. Топологическая эквивалентность

Решение задачи формирования необходимого спектра характеристических показателей Ляпунова основано на использовании их зависимости от собственных чисел матрицы Якоби. Изменение собственных чисел матрицы Якоби влечет за собой изменение характеристических показателей Ляпунова нелинейной системы. Задать желаемые собственные числа матрицы Якоби можно, например, с помощью синтеза модального управления на основе решения матричного алгебраического уравнения Сильвестра.

Правомочность такого подхода основывается на теореме о структурной устойчивости (грубости) нелинейных динамических систем, сформулированной в [7] и определяющей суть топологической эквивалентности нелинейной системы и гиперболической линеаризованной модели [8, 9]. Из теорем, приведенных в указанных работах, следует, что если линеаризованная система является гиперболической (не имеет чисто мнимых собственных чисел), то нелинейная система имеет устойчивое или неустойчивое многообразия, которые являются гладкими аналогами устойчивых или неустойчивых пространств линеаризованной системы. Иначе, нелинейная система и линеаризованная система имеют одинаковое количество особых точек и предельных циклов.

### 2.2. Синтез обратной связи для нелинейной системы

Алгоритм синтеза обратной связи для нелинейной крупномасштабной системы (1) включает в себя следующие шаги [10, 11].

При управлении спектром характеристических показателей Ляпунова используются собственные числа матриц Якоби  $J(x)$ , которые вычисляются в различных точках траектории нелинейной системы. Для этого фазовое пространство нелинейной системы разбивается на ячейки небольшого размера. Для каждой ячейки выбираются собственные числа матрицы Якоби замкнутой системы  $\tilde{J}(x)$  в соответствии с решаемой задачей (5а) или (5б).

Далее вычисляется коэффициент обратной связи для каждой ячейки. Коэффициент обратной связи нелинейной системы определяется с учетом вероятности посещения траекторией ячеек фазового пространства системы (инвариантной меры динамической системы). Для вычисления вероятности посещения траекторией нелинейной системы ячеек фазового пространства  $p_i$  фазовое пространство делится на малые ячейки  $C_i$  и находится решение  $x(t, x_0)$  динамической системы на достаточно большом отрезке времени. Затем для каждой ячейки определяется количество точек решения, попавших в нее, и находится вероятность попадания траектории в данную ячейку:

$$p_i = \frac{N_i}{N},$$

где  $N_i$  – количество точек, попавших в подмножество  $C_i$ ,  $N$  – общее количество точек. Размер ячеек выбирается следующим образом:

$$h_j = \frac{1}{S(T) - S(T_0)} \sum_{k=S(T_0)}^{S(T)-1} |x_j(k+1) - x_j(k)|, \quad j = \overline{1, 4},$$

где  $T_0$  – время начала расчета траектории нелинейной системы такое, что переходный процесс уже завершился,  $T$  – время окончания расчета траектории,  $S(t)$  – номер шага, соответствующий текущему времени  $t$ . То есть длина стороны  $h_j$  ячейки, параллельной фазовой координате  $x_j$ , выбирается равной среднему по времени значению разности между координатами  $x_j$  следующей и предыдущей точек.

Требуемые собственные числа матрицы Якоби  $\tilde{J}(x_i)$ , соответствующие центру каждой ячейки, выбираются по формуле

$$\bar{v}(\tilde{J}(x_i)) = v(J(x_i)) + \alpha \operatorname{Re}(v(J(x_i))) + \beta \operatorname{Im}(v(J(x_i))),$$

где  $v(J(x_i))$  – собственные числа матрицы Якоби исходной нелинейной системы, вычисленной в центре  $x_i$  ячейки  $C_i$ ,  $\alpha$  – коэффициент, влияющий на сдвиг собственных чисел по действительной оси;  $\beta$  – коэффициент, влияющий на сдвиг собственных чисел по мнимой оси. При решении задачи стабилизации нужно уменьшать собственные числа Якобиана, выбирая  $\alpha < 0$  и  $\beta < 0$ .

Далее для каждой ячейки найдем коэффициенты обратной связи  $L_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , которые обеспечат заданные характеристические показатели в замкнутой нелинейной системе. Для их вычисления предлагается использовать метод на основе решения матричного уравнения Сильвестра. Подробное описание метода приведено в разделе 2.3. Вычислив коэффициенты обратной связи для каждой ячейки, находим коэффициент обратной связи для нелинейной системы по формуле

$$L = \sum_{i=1}^N L_i p_i$$

и определяем характеристические показатели Ляпунова нелинейной системы (1), замкнутой управлением  $u = Lx$ .

Для задания в системе требуемого значения характеристического показателя Ляпунова вышеприведенные вычисления выполняются для нескольких наборов коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$ , а затем определяется коэффициент обратной связи  $L^*$ , обеспечивающий желаемое значение характеристического показателя Ляпунова, по критерию

$$L^* = \arg \min \left\{ \varphi = \left( 1 - \operatorname{sign} \left( \varepsilon - |\chi_{li} - \chi_1^*| \right) \right) \times \max_{j=1,r} \|L_j\| + \|L_i\| \mid \varphi < 2 \max_{j=1,r} \|L_j\| \right\}, \quad (6)$$

где  $i \in \overline{1, r}$ ;  $r$  – количество коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$ ,  $\chi_{1i}^*$  – желаемый старший характеристический показатель Ляпунова нелинейной системы;  $\chi_{1i}$  – старший характеристический показатель Ляпунова нелинейной системы с  $u = L_i x$ .

Для стабилизации системы (если желаемый аттрактор – неподвижная точка) характеристический показатель Ляпунова замкнутой системы должен быть меньше заданного отрицательного числа  $\chi_{1i} < \overline{\chi_{1i}} < 0$ . Критерий выбора  $L^*$  в этом случае имеет вид:

$$L^* = \arg \min \left\{ \varphi = \left( 1 - \text{sign}(\overline{\chi_{1i}} - \chi_{1i}) \right) \times \max_{j=1, r} \|L_j\| + \|L_i\| \mid \varphi < 2 \max_{j=1, r} \|L_j\| \right\}.$$

При стабилизации системы (если желаемый аттрактор – предельный цикл) используется критерий (6), в котором желаемый старший характеристический показатель Ляпунова  $\chi_{1i}^* = 0$ .

### 2.3. Синтез обратной связи для линеаризованной системы

#### Линеаризация системы

Пусть уравнение (1) описывает отклонения фазовых координат нелинейного объекта в окрестности частных решений  $x^S$ , соответствующих управляющим воздействиям  $u^S$ . Используя формулу Тейлора в предположении дифференцируемости компонент функции  $F(x(t)) = (\phi_i(x(t)))_{i=1}^n$  в окрестности  $\xi^S = (x^S, u^S)$ , преобразуем уравнение (1) к квазилинейному виду:

$$\dot{x}(t) = A(\xi^S)x(t) + Bu(t) + f(\xi^S), \quad x(0) = x_0. \quad (7)$$

В уравнениях (7)  $A(\xi^S)$  вычисляется в точке  $\xi^S$  по формуле

$$A(\xi^S) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\substack{x(t)=x^S \\ u(t)=u^S}}. \quad (8)$$

Пусть для всех значений

$$\xi^S \in S(x^S, u^S, \rho) = \left\{ (x^S, u^S) : \|x - x^S\| + \|u - u^S\| \leq \rho, \rho > 0 \right\} \subset \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m$$

выполняются оценки

$$\|f(\xi^S)\| \leq q \|\xi\|. \quad (9)$$

Если матрица Якоби вычислена по формуле (8) и выполняется условие (9), тогда уравнение (7) примет вид линеаризованной системы (или уравнения в вариациях):

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), \quad (10)$$

где  $y(t) \in \mathbb{R}^n$  – фазовый вектор линеаризованной системы.

Система (10) может быть использована для синтеза управления, стабилизирующего систему (1) в окрестности частного решения. Вещественные части собственных чисел матрицы Якоби определяют поведения траекторий исходной нелинейной системы.

#### Синтез централизованного управления

Рассматривается задача размещения полюсов системы, в которой определение параметров регулятора сводится к решению матричного уравнения Сильвестра. Для системы (10) необходимо найти стабилизирующий регулятор в виде обратной связи по вектору состояния

$$u(y(t)) = -Ly(t) \quad (11)$$

такой, что спектр замкнутой системы

$$\dot{y}(t) = (A - BL)y(t) = A_y y(t) \quad (12)$$

совпадает предписываемым спектром собственных значений  $A_y$ , задаваемым последовательностью  $\mu = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ ,  $\text{Re } \mu_i > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ :

$$\rho(A_y) = \rho(-W). \quad (13)$$

Здесь  $W = \text{diag}(\mu_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  – матрица, на главной диагонали которой расположены числа  $\mu_i > 0$ .

Задача нахождения матрицы  $L$ , определяющей «глубину» обратной связи по полному вектору состояния, сводится к решению матричного уравнения Сильвестра

$$AP + PW = BG \quad (14)$$

относительно матрицы  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  при произвольной матрице  $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$  и решению матричного уравнения

$$LP = G, \quad L = GP^{-1}. \quad (15)$$

Для динамической системы (12) условия существования решения задачи размещения полюсов и методика синтеза стабилизирующего управления содержатся в теореме, приведенной в [10]. Параметры регулятора (11), обеспечивающего выполнение условия (13) в замкнутой системе (12), определяются из соотношения (15), где матрица  $P$  – решение уравнения Сильвестра (14).

### 3. Исследование системы синхронных генераторов

#### 3.1. Модель трехмашинной системы

Предлагаемая методика синтеза управлений для нелинейной крупномасштабной системы рассматривается на примере управления хаотическими колебаниями, возникающими в работе электроэнергетической системы, представленной в виде системы трех взаимосвязанных синхронных генераторов. Для анализа хаотических режимов электроэнергетической системы используется классическая модель синхронного генератора, которая позволяет провести качественный и количественный анализ, указывающий на нерегулярный характер отклонения угла ротора и частоты.

Уравнения математической модели трехмашинной электроэнергетической системы, имеющей неодинаковую инерционность роторов генераторов, входящих в нее, имеют вид [12]:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_1}{dt} &= \omega_1, \\ \frac{d\omega_1}{dt} &= -B_1 \sin\left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\delta_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_3\right) - C_{13} \sin(\delta_1 - \delta_3) + P_1, \end{aligned} \quad (16a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_2}{dt} &= \omega_2, \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= -B_2 \sin\left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\delta_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_3\right) - C_{21} \sin(\delta_2 - \delta_1) + P_2, \end{aligned} \quad (16b)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_3}{dt} &= \omega_3, \\ \frac{d\omega_3}{dt} &= -B_3 \sin\left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\delta_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_3\right) - C_{31} \sin(\delta_3 - \delta_1) + P_3, \end{aligned} \quad (16b)$$

где  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  – отклонения угла поворота ротора генератора относительно вращающейся синхронно оси,  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  – отклонение угловой частоты,  $P_1, P_2, P_3$  – изменение мощности, выдаваемой в сеть генераторами. Исследования многомашинной системы проводились при следующих значениях параметров модели:

$$\begin{aligned} B_1 = \frac{P_1}{T_{j1}} = 1; C_{13} = \frac{P_{c13}}{T_{j1}} = 0,1; P_1 = \frac{\varepsilon_{01}}{T_{j1}} = 0,4; B_2 = \frac{P_2}{T_{j2}} = 1; C_{21} = \frac{P_{c21}}{T_{j2}} = 0,1; P_2 = \frac{\varepsilon_{02}}{T_{j2}} = 0,4; B_3 = \frac{P_3}{T_{j3}} = 1; \\ C_{31} = \frac{P_{c31}}{T_{j3}} = 0,1; P_3 = \frac{\varepsilon_{03}}{T_{j3}} = 0,3, \end{aligned}$$

где  $P_{c13}, P_{c21}, P_{c31}$  – синхронизирующие мощности между генераторами,  $\varepsilon_{01}, \varepsilon_{02}, \varepsilon_{03}$  – начальные значения мощностей, выдаваемые в сеть генераторами при возникновении возмущения сети.

Введя фазовый вектор

$$x(t) = (x_1(t) = \delta_1, x_2(t) = \omega_1, x_3(t) = \delta_2, x_4(t) = \omega_2, x_5(t) = \delta_3, x_6(t) = \omega_3)^T \in \mathbb{R}^6,$$

запишем систему (16) в виде:

$$\dot{x}(t) = F(x(t)),$$

где  $F = [f_1(x(t)); f_2(x(t)); f_3(x(t)); f_4(x(t)); f_5(x(t)); f_6(x(t))]$ ,

$$f_1(x(t)) = x_2,$$

$$f_2(x(t)) = -B_1 \sin\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right)x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_5\right) - C_{13} \sin(x_1 - x_5) + P_1,$$

$$f_3(x(t)) = x_4,$$

$$f_4(x(t)) = -B_2 \sin\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right)x_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_5\right) - C_{21} \sin(x_3 - x_1) + P_2,$$

$$f_5(x(t)) = x_6,$$

$$f_6(x(t)) = -B_3 \sin\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right)x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_5\right) - C_{31} \sin(x_5 - x_1) + P_3.$$

### 3.2. Исследование процессов в системе

#### Система без управления

Исследование системы (16) на наличие хаотических колебаний проводилось при начальных условиях

$$\delta_1(0) = 0,6; \omega_1(0) = 0,3; \delta_2(0) = 0,6; \omega_2(0) = 0,3; \delta_3(0) = 0,6; \omega_3(0) = 0,3.$$

На рис. 1, 2 представлены проекции фазового портрета системы (16) на плоскости  $x_1x_2, x_3x_4$  и  $x_5x_6$  и временные диаграммы фазового вектора системы (16).

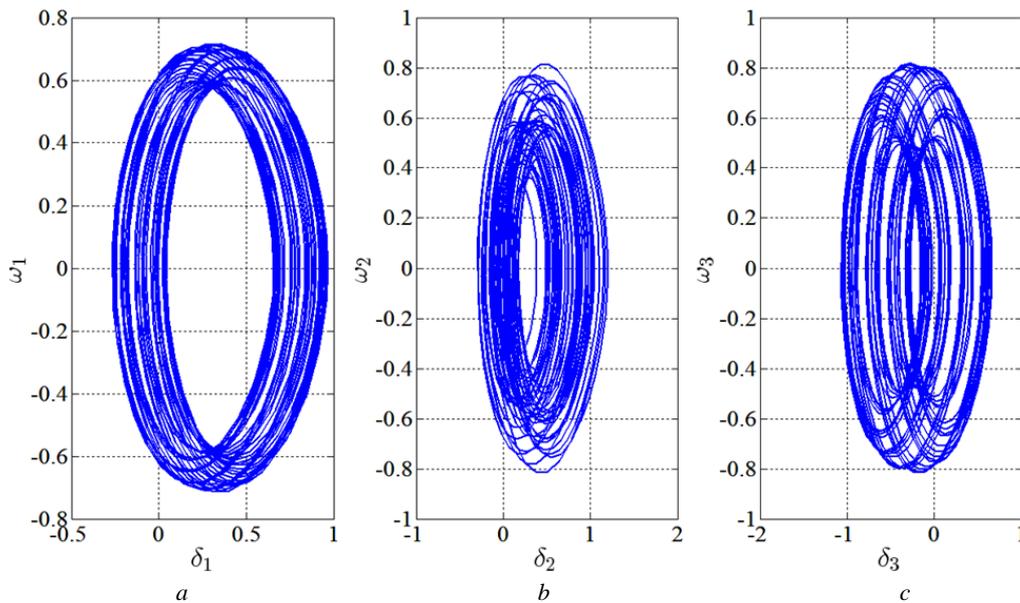


Рис. 1. Проекция фазового портрета системы (16): а – плоскость  $x_1 = \delta_1, x_2 = \omega_1$ ;  
 б – плоскость  $x_3 = \delta_2, x_4 = \omega_2$ ; в – плоскость  $x_5 = \delta_3, x_6 = \omega_6$

Fig. 1. Projections of the phase portrait of the system (16): a) onto the plane  $x_1 = \delta_1, x_2 = \omega_1$ ;  
 b) onto the plane  $x_3 = \delta_2, x_4 = \omega_2$ ; c) onto the plane  $x_5 = \delta_3, x_6 = \omega_6$

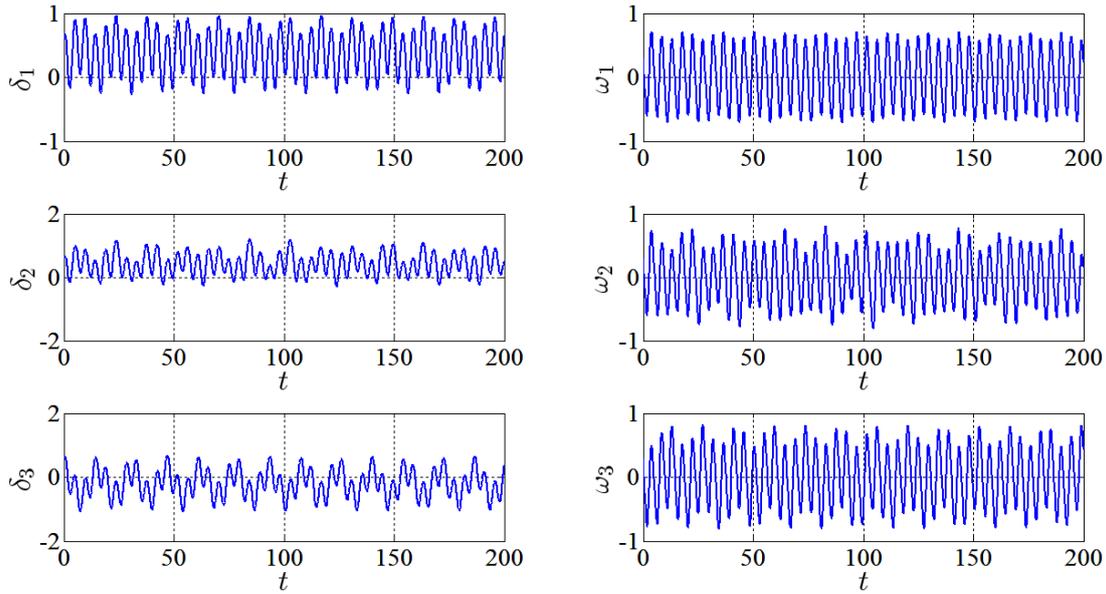


Рис.2. Временные диаграммы фазового вектора системы (16)  
Fig.2. Spacetime diagrams of the phase vector of the system (16)

Матрица Якоби системы (16) имеет вид:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \partial f_2 / \partial x_1 & 0 & 0 & 0 & \partial f_2 / \partial x_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \partial f_4 / \partial x_1 & 0 & \partial f_4 / \partial x_3 & 0 & \partial f_4 / \partial x_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \partial f_6 / \partial x_1 & 0 & 0 & 0 & \partial f_6 / \partial x_5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Одна из особых точек системы (16):

$$x_{\text{особ}} = (0,302; 0; 0,331; 0; -0,222; 0)^T.$$

Собственные числа матрицы Якоби в данной особой точке равны

$$\lambda_1 = i1,504, \lambda_2 = -i1,504, \lambda_3 = i1,291, \lambda_4 = -i1,291, \lambda_5 = i0,416, \lambda_6 = -i0,416.$$

При указанных значениях параметров и начальных условиях характеристические показатели Ляпунова системы (16) равны

$$\chi_1 = 0,014, \chi_2 = 0,003, \chi_3 = 0,009, \chi_4 = -0,011, \chi_5 = -0,003, \chi_6 = -0,012.$$

Спектр содержит положительные характеристические показатели Ляпунова, поэтому в системе (16) имеет место хаотический режим. Кроме того, на рис. 1 видно, что проекции траектории системы в фазовом пространстве являются странным аттрактором, что также свидетельствует о нерегулярном режиме.

#### Система с централизованным управлением

Введем в систему управление частотой каждого генератора; матрица  $B$  в системе (1) равна

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T,$$

и уравнения системы (16) с централизованным управлением (11) принимают вид:

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) - BLx(t). \quad (17)$$

Коэффициенты обратной связи, вычисленные по методике синтеза централизованного регулятора с учетом (9) и (10), равны

$$L = \begin{pmatrix} -0,049 + i0,291 & -0,025 + i0,005 & -0,240 - i0,138 & 0,173 - i0,138 & 0,059 + i0,017 & 0,006 - i0,002 \\ 0,210 + i0,286 & 0,239 - i0,194 & -0,003 - i0,313 & -0,422 + i0,0004 & 0,114 - i0,008 & -0,033 - i0,015 \\ 0,024 + i0,168 & 0,328 + i0,050 & 0,130 - i0,178 & -0,320 - i0,178 & 0,045 + i0,027 & -0,270 - i0,006 \end{pmatrix}.$$

Спектр характеристических показателей Ляпунова системы (17) имеет вид:

$$\chi_1 = 0,0007, \chi_2 = 0,0007, \chi_3 = 0,003, \chi_4 = -0,0005, \chi_5 = -0,002, \chi_6 = -0,002.$$

Данный спектр свидетельствует о приведении системы к регулярному движению – предельному циклу, что подтверждается проекциями фазового портрета (рис. 3) и временными диаграммами (рис. 4).

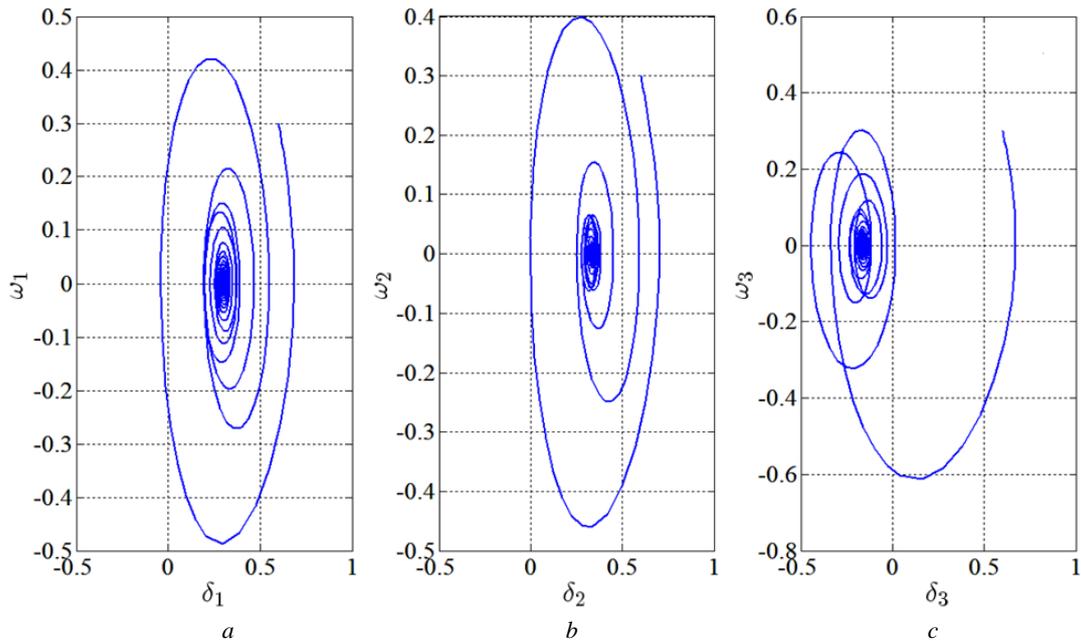


Рис. 3. Проекция фазового портрета системы (17): *a* – плоскость  $x_1 = \delta_1, x_2 = \omega_1$ ;

*b* – плоскость  $x_3 = \delta_2, x_4 = \omega_2$ ; *c* – плоскость  $x_5 = \delta_3, x_6 = \omega_6$

Fig. 3. Projections of the phase portrait of the system (17): *a*) onto the plane  $x_1 = \delta_1, x_2 = \omega_1$ ;

*b*) onto the plane  $x_3 = \delta_2, x_4 = \omega_2$ ; *c*) onto the plane  $x_5 = \delta_3, x_6 = \omega_6$

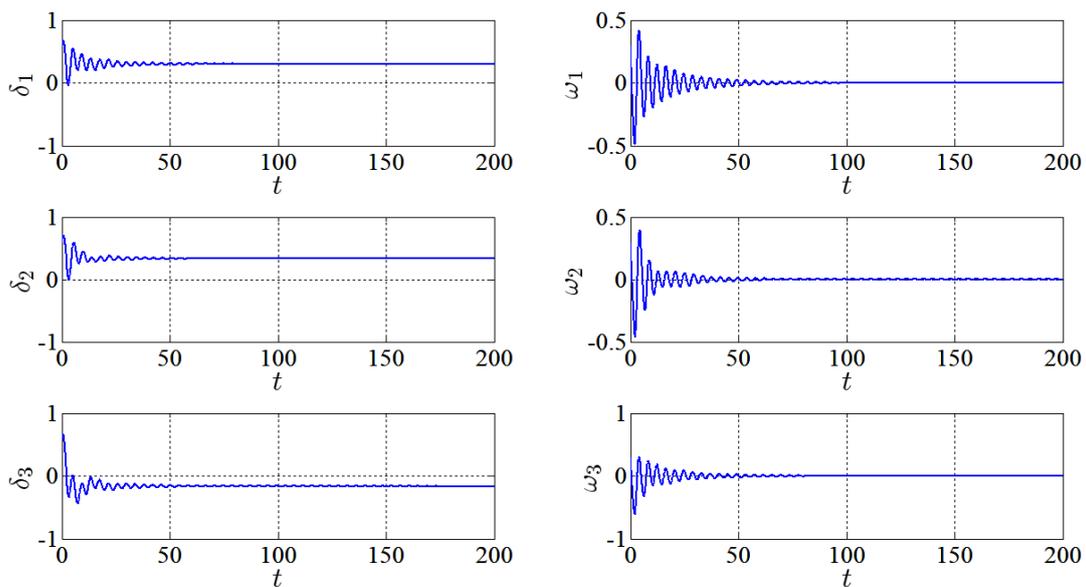


Рис.4. Временные диаграммы фазового вектора системы (17)

Fig.4. Spacetime diagrams of the phase vector of the system (17)

## Заключение

В данной статье предложена методика синтеза стабилизирующего управления для нелинейных систем с хаотической динамикой. Параметры регулятора, обеспечивающего требуемый спектр характеристических показателей Ляпунова, определяются решением матричного уравнения Сильвестра и инвариантной мерой, рассчитанной на траекториях нелинейной системы.

Результаты исследования подтвердили подавление хаотических колебаний и обеспечение в замкнутой системе регулярного режима за счет формирования спектра с нулевыми и отрицательными характеристическими показателями Ляпунова.

## Список источников

1. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Управление хаосом: методы и приложения. I. Методы // Автоматика и телемеханика. 2003. № 5. С. 3–45. doi: 10.1023/A:1023684619933
2. Ott E., Grebogi C., Yorke G. Controlling chaos // Physical Review Letter. 1990. V. 64. P. 1196–1199. doi: 10.1103/PhysRevLett.64.1196
3. Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback // Physical Letter. 1992. V. 170. P. 421–428. doi: 10.1016/0375-9601(92)90745-8
4. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики. М. : Едиториал УРСС, 2004. 230 с.
5. Yamapi R., Chabi Orou J.B. Harmonic oscillations, stability and chaos control in a non-linear electromechanical system // Journal of Sound and Vibration. 2003. V. 259. P. 1253–1264. doi: 10.1006/jsvi.2002.5289
6. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М. : Гостехиздат, 1950.
7. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы // Доклады Академии наук СССР. 1937. Т. 14. С. 247–250.
8. Гробман Д.Г. Гомеоморфизм систем дифференциальных уравнений // Доклады Академии наук СССР, 1959. Т. 128. С. 880–881.
9. Оморов Р.О. Метод топологической грубости динамических систем: приложения к синергетическим системам // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2020. Т. 20, № 2. С. 257–262. doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-2-257-262
10. Shashihin V.N., Budnik S.V. Synthesis of control for nonlinear systems // Automatic Control and Computer Sciences. 2019. V. 53. P. 97–106. doi: 10.3103/S0146411619020068
11. Kozlov V.N., Shashikhin V.N. Synthesis of decentralized robust stabilizing control for the systems with parametric perturbations // Computing, Telecommunications and Control. 2020. V. 13. P. 49–60. doi: 10.18721/JCSTCS.13205
12. Рысеев Д.В., Федоров В.К. Современные проблемы динамики нелинейных энергосистем: электромеханический резонанс, энтропия, детерминированный хаос. Омск : Полиграф. центр КАН, 2012.

## References

1. Andrievskiy, B.R. & Fradkov, A.L. (2003) Upravlenie khaosom: metody i prilozheniya. I. Metody [Chaos control: methods and applications. I. Methods]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 5. pp. 3–45. DOI: 10.1023/A:1023684619933
2. Ott, E., Grebogi, C. & Yorke, G. (1990) Controlling chaos. *Physical Review Letter*. 64. pp 1196–1199. DOI: 10.1103/PhysRevLett.64.1196
3. Pyragas, K. (1992) Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Physical Letter*. 170. pp. 421–428. DOI: 10.1016/0375-9601(92)90745-8
4. Magnitskiy, N.A. & Sidorov, S.V. (2004) *Novye metody khaoticheskoy dinamiki* [New Methods of Chaotic Dynamics] Moscow: Editorial URSS.
5. Yamapi, R. & Chabi Orou, J.B. (2003) Harmonic oscillations, stability and chaos control in a non-linear electromechanical system. *Journal of Sound and Vibration*. 259. pp. 1253–1264. DOI: 10.1006/jsvi.2002.5289
6. Lyapunov, A.M. (1950) *Obshchaya zadacha ob ustoychivosti dvizheniya* [The General Problem of the Stability of Motion]. Moscow: Gostekhizdat.
7. Andronov, A.A. & Pontryagin, L.S. (1937) Grubye sistemy [Rough systems]. *Doklady Akademii nauk SSSR*. 14. pp. 247–250.
8. Grobman, D.G. (1959) Gomeomorfizm sistem differentsial'nykh uravneniy [Homeomorphism of systems of differential equations]. *Doklady Akademii nauk SSSR*. 128. pp. 880–881.
9. Omorov, R.O. (2020) Metod topologicheskoy grubosti dinamicheskikh sistem: prilozheniya k sinergeticheskim sistemam [Method of topological roughness of dynamic systems: applications to synergetic systems]. *Nauchno-tekhnicheskiiy vestnik informatsionnykh tekhnologiy, mekhaniki i optiki*. 20(2). pp. 257–262. DOI: 10.17586/2226-1494-2020-20-2-257-262
10. Shashihin, V.N. & Budnik, S.V. (2019) Synthesis of control for nonlinear systems. *Automatic Control and Computer Sciences*. 53. pp. 97–106.
11. Kozlov, V.N. & Shashikhin, V.N. (2020) Synthesis of decentralized robust stabilizing control for the systems with parametric perturbations. *Computing, Telecommunications and Control*. 13. pp. 49–60. DOI: 10.18721/JCSTCS.13205

12. Ryseev, D.V. & Fyodorov, V.K. (2012) *Sovremennye problemy dinamiki nelineynykh energosistem: elektromekhanicheskiy rezonans, entropiya, determinirovannyy khaos* [Modern Problems of Nonlinear Power Systems Dynamics: Electromechanical Resonance, Entropy, Deterministic Chaos]. Omsk: Poligraf. tsentr KAN.

**Информация об авторах:**

**Сорокина Наталья Владимировна** – старший преподаватель Высшей школы компьютерных технологий и информационных систем Института компьютерных наук и кибербезопасности Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (Санкт-Петербург, Россия). E-mail: sorokina\_nv@spbstu.ru

**Шашихин Владимир Николаевич** – профессор, доктор технических наук, профессор Высшей школы компьютерных технологий и информационных систем Института компьютерных наук и кибербезопасности Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (Санкт-Петербург, Россия). E-mail: shashihin@bk.ru

**Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.**

**Information about the authors:**

**Sorokina Natalia V.** (Senior Lecturer, Peter the Great Saint Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, Russian Federation). E-mail: sorokina\_nv@spbstu.ru

**Shashikhin Vladimir N.** (Doctor of Technical Sciences, Professor, Peter the Great Saint Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, Russian Federation). E-mail: shashihin@bk.ru

**Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.**

*Поступила в редакцию 27.02.2025; принята к публикации 02.06.2025*

*Received 27.02.2025; accepted for publication 02.06.2025*