

Научная статья  
УДК 621.928.37  
doi: 10.17223/19988605/71/5

## Математическая модель и анализ влияния режимных параметров гидроциклона на показатели процесса разделения вязкопластических сред двухстадийной флотацией

Владимир Олегович Яблонский

*Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия, everest58@mail.ru*

**Аннотация.** Разработана математическая модель разделения вязкопластических сред двухстадийной напорной флотацией в гидроциклоне. Выполнено моделирование поля концентраций частиц твердой фазы, и установлено влияние режимных параметров на показатели работы двухстадийного гидроциклона – флотатора, а также определены оптимальные условия проведения процесса. Показано, что двухстадийная напорная флотация позволяет получить низкую остаточную концентрацию частиц твердой фазы в пленке суспензии. Влияние фактора разделения является более значительным для сред с высоким предельным напряжением сдвига. Установлено, что процесс двухстадийной флотации протекает наиболее эффективно при высоких значениях фактора разделения и выраженных пластических свойствах среды.

**Ключевые слова:** математическая модель; гидроциклон; разделение суспензий; вязкопластическая жидкость; предел текучести; двухстадийная флотация.

*Для цитирования:* Яблонский В.О. Математическая модель и анализ влияния режимных параметров гидроциклона на показатели процесса разделения вязкопластических сред двухстадийной флотацией // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2025. № 71. С. 48–57. doi: 10.17223/19988605/71/5

Original article  
doi: 10.17223/19988605/71/5

## Mathematical model and analysis of the effect of the regime parameters of the hydrocyclone on the indicators of the separation process of viscoplastic media by two-stage flotation

Vladimir O. Yablonskii

*Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation, everest58@mail.ru*

**Abstract.** A mathematical model of separation of viscoplastic media by two-stage pressure flotation in a hydrocyclone has been developed. The simulation of the field of concentrations of solid phase particles was performed and the influence of operating parameters on the performance of the two - stage hydrocyclone - flotator was established, and the optimal conditions for the process were determined. It is shown that two-stage pressure flotation allows to obtain a low residual concentration of solid phase particles in the suspension film with an increase in the concentration of secondary gas. The influence of the separation factor is more significant for media with high bound shear stress limits. It is established that the flotation process proceeds most effectively at high values of the separation factor and plastic properties of the medium.

**Keywords:** mathematical model; hydrocyclone; separation of suspensions; viscoplastic fluid; yield strength; two-stage flotation.

*For citation:* Yablonsky, V.O. (2025) Mathematical model and analysis of the effect of the regime parameters of the hydrocyclone on the indicators of the separation process of viscoplastic media by two-stage flotation. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 71. pp. 48–57. doi: 10.17223/19988605/71/5

## Введение

Гидроциклоны, отличающиеся простотой устройства и высокой надежностью, применяются для процессов разделения в химической и других отраслях промышленности. Необходимость интенсификации процессов и достижения высокой степени очистки обрабатываемых сред диктует необходимость применения новых высокоэффективных методов, к которым относится двухстадийная напорная флотация. Процесс напорной флотации широко применяется для разделения продуктов биосинтеза, извлечения тонкодисперсной твердой фазы из суспензий и очистки различных технологических жидкостей.

Многие из разделяемых в химической промышленности продуктов являются вязкопластическими средами, имеющими выраженный предел текучести (предельное напряжение сдвига), характеризующий аномалию неньютоновских свойств среды. К ним относятся суспензии глазури, биомассы белково-витаминных концентратов (паприн, гаприн, меприн), карбид кремния, сточные воды, содержащие нефть, жир и другие вещества, а также буровые растворы и смазочные масла с присадками.

Опубликованные в настоящее время работы по моделированию гидродинамики закрученных пленочных течений вязкопластических сред в поле центробежных сил [1, 2] создают возможность разработки математической модели разделения таких сред двухстадийной напорной флотацией в гидроциклоне.

Авторам работы [3] представляется наиболее целесообразным вместо методов напорной флотации подавать воздух в питающий патрубок гидроциклона, что позволяет начать взаимодействие частиц с пузырьками уже на входе в гидроциклон и значительно упрощает конструкцию аппарата. Однако в данной работе не принимается во внимание увеличение кинетической константы флотации за счет выделения пузырьков газа непосредственно на частицах твердой фазы при напорной флотации. Поэтому для улучшения кинетических характеристик процесса напорной флотации и существенного уменьшения остаточной концентрации частиц твердой фазы целесообразно применение процесса двухстадийной флотации с подачей вторичного газа через пористые стенки гидроциклона, объединяющего преимущества методов центробежного разделения и флотационной очистки.

В работе [4] на основании решения уравнения радиального движения системы частица–пузырек предложена методика расчета показателей разделения гидроциклона–флотатора, а также диаметра цилиндрической части аппарата, при котором обеспечиваются заданные показатели разделения и минимальные капитальные и энергетические затраты. Получено условие устойчивого всплывания комплекса частица–пузырек, определен диаметр частиц твердой фазы, которые могут быть удалены при данных режимных параметрах гидроциклона.

В [5, 6] указывается на зависимость числа вероятных столкновений частиц твердой фазы и пузырьков газа от центробежного ускорения, показано, что центробежное поле является фактором, увеличивающим число столкновений частиц и пузырьков. Установлено, что в условиях напорной флотации преобладающим механизмом образования флотокомплексов является столкновение частиц твердой фазы с пузырьками газа. Эффективность процесса напорной флотации, зависящая от числа столкновений, определяется расстоянием, проходимым частицей твердой фазы в жидкой дисперсионной среде.

Наиболее благоприятные условия для разделения вязкопластических сред напорной флотацией создаются в условиях тонкопленочного течения среды в поле центробежных сил, так как в данном случае имеет место эффект взаимного усиления действия обоих факторов [7].

Ввиду того, что вязкопластические среды обладают высокой эффективной вязкостью, лимитирующей стадией при осуществлении процесса напорной флотации в гидроциклоне является стадия транспортировки комплексов частица–пузырек к поверхности пленки разделяемой среды, что не позволяет достичь хороших показателей разделения. Аппаратом, обеспечивающим наибольшую эффективность проведения такого процесса, является прямоточный цилиндрический гидроциклон [8], в котором процесс разделения осуществляется в пленочном режиме и обеспечивается условие связи частицы с пузырьком газа.

В работе [8] выполнено математическое моделирование поля концентраций частиц твердой фазы при разделении вязкопластических суспензий в гидроциклоне напорной флотацией и проанализировано влияние конструкции корпуса аппарата на эффективность разделения.

Необходимость достижения высокой степени извлечения частиц твердой фазы в ряде химических производств обуславливает применение для этих целей процесса двухстадийной напорной флотации с дополнительным вводом диспергированного вторичного газа через пористую стенку корпуса гидроциклона. Сталкиваясь с флотокомплексами, пузырьки вторичного газа, имеющие значительно больший диаметр, образуют с ними вторичные комплексы, позволяющие быстро извлекать частицы твердой фазы в пенный слой и повысить показатели процесса разделения.

Цель настоящей работы – разработка математической модели разделения вязкопластических сред двухстадийной напорной флотацией в гидроциклоне и исследование влияния фактора разделения при различных реологических свойствах среды на показатели эффективности процесса.

### 1. Постановка задачи

Процесс двухстадийной напорной флотации протекает следующим образом (рис. 1): предварительно аэрированная суспензия при повышенном давлении (до 0,8 МПа) поступает в цилиндрический прямоточный гидроциклон тангенциально по образующей через входной патрубок 1, установленный в верхней части корпуса гидроциклона. Поступившая в гидроциклон суспензия стекает, образуя вращающуюся пленку 2, по его стенкам вниз, обладая окружной  $V_\varphi$ , осевой  $V_z$ , и радиальной  $V_r$  составляющими скорости.

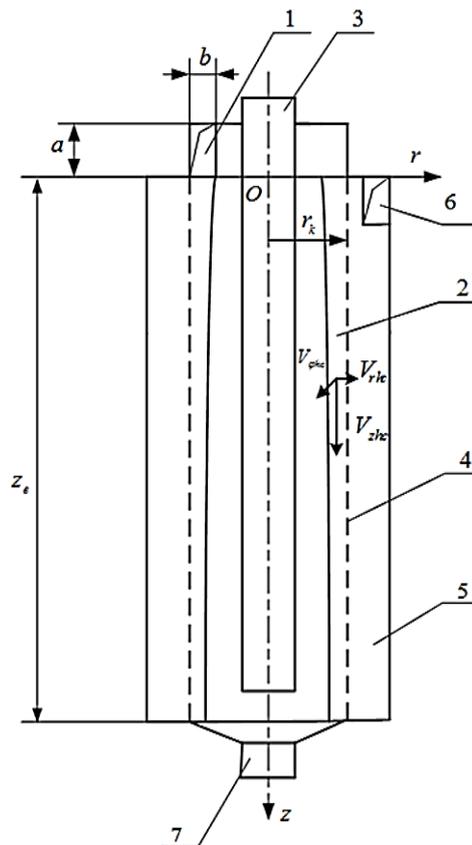


Рис. 1. Схема разделения вязкопластической среды в цилиндрическом гидроциклоне двухстадийной напорной флотацией: 1 – входной патрубок; 2 – вращающаяся пленка среды; 3 – верхний отводящий патрубок; 4 – пористая стенка корпуса; 5 – воздушный коллектор; 6 – патрубок для подачи воздуха; 7 – нижний слив  
 Fig. 1. Scheme of separation of a viscoplastic medium in a cylindrical hydrocyclone by two-stage pressure flotation: 1 – inlet pipe; 2 – rotating medium film; 3 – upper discharge pipe; 4 – porous body wall; 5 – air collector; 6 – air supply pipe; 7 – bottom drain

При снижении давления до атмосферного создается перенасыщение растворенного газа, и суспензия «вскипает». Частицы твердой фазы под действием центробежной силы движутся к стенке корпуса гидроциклона, а пузырьки газа (воздуха) под действием выталкивающей центростремительной силы Архимеда – навстречу им к поверхности пленки. На первой стадии напорной флотации при столкновении частиц твердой фазы с пузырьками газа происходит образование флотокомплексов, выносящих частицы твердой фазы на поверхность пленки в пенный слой, который удаляется через верхний отводящий патрубок гидроциклона 3. Флотокомплексы имеют окружную  $V_{\phi hc}$ , осевую  $V_{z hc}$  и радиальную  $V_{r hc}$  составляющие скорости. Пузырьки вторичного газа, подаваемого через пористую стенку корпуса 4 через воздушный коллектор 5, снабженный патрубком для подачи воздуха 6, имеющие на порядок больший диаметр, чем пузырьки газа, выделяющегося в суспензии при снижении давления, имеют значительно большую скорость всплывания к поверхности пленки, чем образовавшиеся комплексы. На второй стадии флотации пузырьки вторичного газа, сталкиваясь со всплывающими комплексами, образуют с ними вторичные комплексы, в которых частица составляет мостик между пузырьками [9], которые быстро устремляются к поверхности пленки. Осветленная суспензия удаляется из аппарата через нижний слив 7.

Полагаем, что реологические свойства вязкопластической разделяемой среды для случая трехмерного течения могут быть охарактеризованы уравнением Гершеля–Балкли [10], которое при записи в компонентах тензора скоростей деформаций с учетом условия пластичности фон Мизеса имеет вид

$$\tau_{ij} = \left( \frac{\tau_0}{A} + kA^{n-1} \right) \gamma_{ij},$$

$$A = \sqrt{2 \left( \frac{\partial V_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left( \frac{V_r}{r} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_\phi}{\partial r} - \frac{V_\phi}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_\phi}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right)^2},$$

где  $\tau_{ij}$  – компоненты тензора напряжений, Па;  $\tau_0$  – предельное напряжение сдвига, Па;  $\gamma_{ij}$  – компоненты тензора скоростей деформаций,  $c^{-1}$ ;  $A$  – интенсивность скоростей деформаций,  $c^{-1}$ ;  $n$  – показатель нелинейности кривой течения;  $k$  – индекс консистентности, Па· $c^n$ ;  $r$ ,  $z$  – радиальная и осевая координаты, м;  $\phi$  – окружная координата, рад.

Из-за высокой эффективной вязкости неньютоновских сред течение в цилиндрическом гидроциклоне осуществляется в пленочном режиме [2], что обеспечивает устойчивую связь комплекса частица–пузырек ввиду отсутствия резкого возрастания окружной составляющей скорости вблизи оси гидроциклона.

Математическая модель первой стадии процесса напорной флотации рассмотрена в работе [8]. Математическая постановка задачи для двухстадийной флотации производится при следующих допущениях. Поскольку диаметр пузырьков вторичного газа, подаваемого через пористую стенку корпуса гидроциклона, на порядок превышает диаметр пузырьков газа, выделяющихся на первой стадии напорной флотации, эффективность столкновения свободных частиц твердой фазы с пузырьками вторичного газа согласно формуле Сазерленда [9] мала и ею можно пренебречь. Таким образом, можно считать, что пузырьки вторичного газа, имеющие большую скорость всплывания к поверхности пленки, чем комплексы, образовавшиеся на первой стадии, сталкиваются с ними и, образуя вторичные комплексы, извлекают их в пенный слой.

Для математического моделирования поля концентраций частиц твердой фазы, связанных в комплексы, на второй стадии напорной флотации при разделении вязкопластических суспензий в цилиндрическом гидроциклоне используется дифференциальное уравнение конвективной диффузии в цилиндрических координатах, которое с учетом притока частиц, связанных в комплексы, за счет их образования на первой стадии напорной флотации и стока за счет образования вторичных комплексов на второй стадии может быть записано в векторной форме для частиц твердой фазы и пузырьков вторичного газа следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\bar{V}_c c_{hc}) &= J_{hc1} - J_{hc2}, \\ \operatorname{div}(\bar{V}_{g2} c_{g2}) &= -J_{g2}, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\bar{V}_c$  – вектор скорости комплексов;  $\bar{V}_{g2}$  – вектор скорости пузырьков вторичного газа;  $c_{hc}$  – концентрация частиц твердой фазы, связанных в комплексы,  $\text{м}^3/\text{м}^3$ ;  $c_{g2}$  – концентрация пузырьков вторичного газа,  $\text{м}^3/\text{м}^3$ ;  $J_{hc1}$  – приток частиц твердой фазы, связанных в комплексы, за счет первой стадии флотации;  $J_{hc2}$  – сток частиц твердой фазы, связанных в комплексы, за счет второй стадии флотации;  $J_{g2}$  – сток пузырьков вторичного газа за счет второй стадии флотации.

Наиболее распространенным в практике гидроциклонной флотации является случай, когда концентрация пузырьков вторичного газа в пленке суспензии значительно превышает концентрацию частиц твердой фазы, связанных в комплексы,  $c_{g2} > c_h$ , и можно полагать  $c_{g2} = \text{const}$  во всем объеме пленки суспензии в гидроциклоне. Концентрация пузырьков газа, выделяющихся из суспензии на первой стадии флотации, также существенно превышает концентрацию свободных частиц твердой фазы  $c_{g1} > c_h$ . Для этого случая второе уравнение системы (1) можно исключить, и система (1) сводится к одному уравнению, в котором сток частиц твердой фазы, связанных в комплексы, за счет флотации пузырьками вторичного газа  $J_{hc2}$  и их приток за счет первой стадии флотации  $J_{hc1}$  согласно [11, 12] имеют вид, аналогичный кинетическому уравнению химической реакции первого порядка:

$$\bar{V}_c \text{grad } c_{hc} + c_{hc} \text{div } \bar{V}_c = A_1 c_h c_{g1} - A_2 c_{hc} c_{g2}, \quad (2)$$

где  $A_1$  – кинетическая константа первой стадии флотации,  $\text{с}^{-1}$ ;  $A_2$  – кинетическая константа второй стадии флотации,  $\text{с}^{-1}$ ;  $c_h$  – концентрация свободных частиц твердой фазы,  $\text{м}^3/\text{м}^3$ ;  $c_{g1}$  – концентрация пузырьков газа, выделяющихся на первой стадии флотации,  $\text{м}^3/\text{м}^3$ .

Полагаем, что в осевом направлении комплексы движутся без инерции, т.е. осевые составляющие скорости комплексов и дисперсионной среды равны:  $V_{zc} = V_{zl}$ .

Поскольку радиальные составляющие скорости комплексов и неразрывного потока дисперсионной среды различны, при сделанных допущениях

$$\text{div } \bar{V}_c = \frac{1}{r} \frac{\partial [r(V_{rc} - V_{rl})]}{\partial r},$$

где  $V_{rc}$  – радиальная составляющая скорости комплекса,  $\text{м}/\text{с}$ ;  $V_{rl}$  – радиальная составляющая скорости дисперсионной среды,  $\text{м}/\text{с}$ ;  $r$  – радиальная координата,  $\text{м}$ , и уравнение (2) принимает вид:

$$V_{rc} \frac{\partial c_{hc}}{\partial r} + V_{zc} \frac{\partial c_{hc}}{\partial z} = A_1 c_h c_{g1} - c_{hc} \left\{ A_2 c_{g2} + \frac{1}{r} \frac{\partial [r(V_{rc} - V_{rl})]}{\partial r} \right\}, \quad (3)$$

где  $V_{zc}(r, z)$ ,  $V_{rc}(r, z)$  – осевая и радиальная составляющие скорости комплекса частица–пузырек,  $\text{м}/\text{с}$ ;  $z$  – осевая координата,  $\text{м}$ .

Уравнение (3) решалось совместно с уравнением движения комплекса частица–пузырек.

Будем полагать, что на второй стадии флотации, как и при одностадийной напорной флотации [6, 8], основным механизмом образования вторичных комплексов является столкновение пузырьков вторичного газа с комплексами при их всплывании к поверхности пленки, определяющее воздействие на которое оказывают характеристики дисперсности и физические свойства фаз.

Аналогично допущениям [8] полагаем, что все происходящие столкновения пузырьков вторичного газа с комплексами эффективны (заканчиваются образованием вторичного комплекса), образовавшиеся вторичные комплексы не разрушаются при всплывании в пенный слой и не осыпаются из него. При таких допущениях стадия столкновения пузырьков вторичного газа с комплексами определяет эффективность процесса двухстадийной напорной флотации в условиях пленочного течения разделяемой суспензии в цилиндрическом гидроциклоне ввиду того, что пузырьки вторичного газа, имеющие на порядок больший диаметр, чем пузырьки, образующиеся на первой стадии напорной флотации, обеспечивают значительно большую скорость всплывания вторичных комплексов к поверхности пленки, а стадия транспортировки комплексов в процессе одностадийной напорной флотации является лимитирующей. Кинетические константы первой и второй стадий флотации  $A_1$  и  $A_2$  могут быть определены по формуле, полученной в работах [11, 12].

Радиальная составляющая скорости комплекса  $V_{rc}$  определялась из решения дифференциального уравнения движения, которое при условии действия на комплекс центробежной силы инерции, вытал-

кивающей центростремительной силы Архимеда и силы сопротивления в радиальном направлении имеет вид:

$$V_{rc} \frac{\partial V_{rc}}{\partial r} + V_{zc} \frac{\partial V_{rc}}{\partial z} = \frac{V_{\phi c}^2}{r} \left[ 1 - \frac{\rho_l \left( \frac{d_h^3}{d_{g1}^2} + d_{g1} \right)}{\rho_h \frac{d_h^3}{d_{g1}^2} + \rho_g d_{g1}} \right] - \frac{3 K_{cr} \rho_l (V_{rc} - V_{rl}) |V_{rc} - V_{rl}|}{4 \left( \rho_h \frac{d_h^3}{d_{g1}^2} + \rho_g d_{g1} \right) \Phi(c_c)}, \quad (4)$$

где  $V_{rc}(r, z)$  – радиальная составляющая скорости комплекса частица–пузырек, м/с;  $V_{rl}(r, z)$  – радиальная составляющая скорости жидкости, м/с;  $K_{cr}$  – коэффициент сопротивления движению комплекса в радиальном направлении [13];  $d_h$  – диаметр частиц твердой фазы, м;  $d_{g1}$  – диаметр пузырьков газа, выделяющихся на первой стадии напорной флотации, м;  $d_{g2}$  – диаметр пузырьков вторичного газа, подаваемого через пористую стенку корпуса гидроциклона, м;  $\rho_h$  – плотность частиц твердой фазы, кг/м<sup>3</sup>;  $\rho_l$  – плотность дисперсионной среды, кг/м<sup>3</sup>;  $\rho_g$  – плотность газа (воздуха), кг/м<sup>3</sup>.

С учетом ориентации комплекса частица–пузырек при всплывании к поверхности пленки за характерный размер комплекса  $d_c$  был принят диаметр пузырьков газа, выделяющихся из суспензии на первой стадии напорной флотации  $d_{g1}$ , так как он существенно превышает диаметр частиц твердой фазы.

Граничное условие для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных путем преобразования уравнений (3), (4) имеет вид:

$$z = 0, \quad r_k - b \leq r \leq r_k, \quad c_{hc0} = 0, \quad (5)$$

где  $c_{hc0}$  – концентрация частиц твердой фазы, связанных в комплексы, во входном патрубке гидроциклона, м<sup>3</sup>/м<sup>3</sup>;  $r_k$  – радиус корпуса гидроциклона, м;  $b$  – ширина входного патрубка гидроциклона, м.

## 2. Численное моделирование

Моделирование процесса на второй стадии напорной флотации заключалось в численном решении системы дифференциальных уравнений (3), (4) для различных реологических свойств среды и различных значений фактора разделения при граничном условии (5) с использованием аппроксимации результатов моделирования поля концентраций свободных частиц твердой фазы на первой стадии напорной флотации [8].

С применением метода характеристик [14] система дифференциальных уравнений в частных производных (3), (4) сводится к эквивалентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, одно из которых описывает траекторию движения комплекса частица–пузырек к поверхности пленки суспензии, а другое – изменение остаточной концентрации частиц твердой фазы, связанных в комплексы, вдоль траектории. Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений была решена методом Рунге–Кутты четвертого порядка с фиксированным шагом с использованием программы, составленной на языке *Compaq Visual Fortran*. Расчеты выполнялись по траекториям движения комплекса частица–пузырек до выхода комплекса на поверхность пленки суспензии в пенный слой.

Результаты моделирования поля концентраций свободных частиц твердой фазы в соответствии с математической моделью первой стадии флотации [8] были аппроксимированы уравнением поверхности

$$c(r, z) = \exp(B_0 + (B_1 + B_2/r + B_3/r^2)/z + (B_4 + B_5/r + B_6/r^2)/z^2 + (B_7 + B_8/z + B_9/z^2)r + (B_{10} + B_{11}/z + B_{12}/z^2)r^2) + B_{13} + B_{14}r + B_{15}r^2 + B_{16}r^3 + B_{17}r^4 + B_{18}z + B_{19}z^2 + B_{20}z^3 + B_{21}z^4, \quad (6)$$

где  $c(r, z)$  – концентрация свободных частиц твердой фазы, м<sup>3</sup>/м<sup>3</sup>;  $B_0$ – $B_{21}$  – коэффициенты регрессии.

Аппроксимация выполнялась в пакете *SPSS* в соответствии с процедурой нелинейной регрессии для использования при моделировании поля концентраций частиц твердой фазы, связанных в комплексы, в соответствии с математической моделью второй стадии напорной флотации. Остаточная сумма квадратов не превышала  $7,5 \cdot 10^{-5}$ .

Для оценки влияния определяющих чисел подобия и реологических свойств дисперсионной среды на эффективность разделения вязкопластической суспензии двухстадийной напорной флотацией

в гидроциклоне используется среднеинтегральная безразмерная остаточная концентрация  $S$  частиц твердой фазы, связанных в комплексы [8], которая определялась с использованием математического пакета *Maple* 2019.

### 3. Результаты и их обсуждение

Течение неньютоновской жидкости в гидроциклоне характеризуется центробежным числом Фруда (фактором разделения), модифицированным числом Рейнольдса  $Re_n$ , безразмерным расходом  $Q$ , показателем нелинейности кривой течения  $n$ , а также числом пластичности  $Pl$ , характеризующим аномалию неньютоновских свойств вязкопластической среды [8]. Основным критерием, характеризующим процессы разделения в поле центробежных сил, является число Фруда (фактор разделения), представляющее собой отношение центробежного ускорения во вращающемся потоке к гравитационному ускорению.

Результаты численного моделирования представлены на рис. 2, 3.

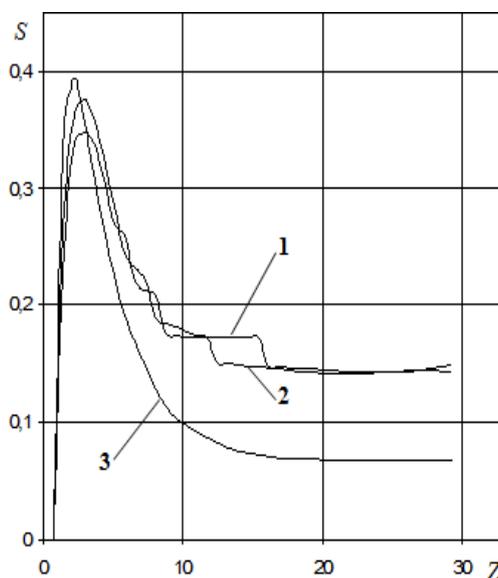


Рис. 2. Распределения среднеинтегральной безразмерной остаточной концентрации частиц твердой фазы  $S$ , связанных в комплексы, по оси гидроциклона для  $Pl = 8,5 \cdot 10^{-3}$ ;  $Re_n = 4 \cdot 10^3$ ;  $Q = 0,02$ ;  $n = 0,7$ ;  $d_h = 2 \cdot 10^{-5}$  м;  $d_{g1} = 3 \cdot 10^{-5}$  м;  $d_{g2} = 3 \cdot 10^{-4}$  м;  $c_{g1} = 0,1$  м<sup>3</sup>/м<sup>3</sup>;  $c_{g2} = 0,05$  м<sup>3</sup>/м<sup>3</sup>; 1 –  $Fr = 30$ ; 2 –  $Fr = 40$ ; 3 –  $Fr = 100$

Fig. 2. Distributions of the average integral dimensionless residual concentration of solid phase particles  $S$  bound in complexes along the axis of the hydrocyclone for  $Pl = 8,5 \cdot 10^{-3}$ ;  $Re_n = 4 \cdot 10^3$ ;  $Q = 0,02$ ;  $n = 0,7$ ;  $d_h = 2 \cdot 10^{-5}$  м;  $d_{g1} = 3 \cdot 10^{-5}$  м;  $d_{g2} = 3 \cdot 10^{-4}$  м;  $c_{g1} = 0,1$  м<sup>3</sup>/м<sup>3</sup>;  $c_{g2} = 0,05$  м<sup>3</sup>/м<sup>3</sup>; 1 –  $Fr = 30$ ; 2 –  $Fr = 40$ ; 3 –  $Fr = 100$

На рис. 2 представлены распределения среднеинтегральной безразмерной остаточной концентрации частиц твердой фазы  $S$ , связанных в комплексы, оставшихся в суспензии в данном сечении пленки, по оси гидроциклона (безразмерная осевая координата  $Z = z/r_k$ ) для  $Pl = 8,5 \cdot 10^{-3}$ ,  $Re_n = 4 \cdot 10^3$ ,  $Q = 0,02$ ,  $n = 0,7$  при разделении суспензии с выраженной аномалией неньютоновских свойств дисперсионной среды в цилиндрическом прямоточном гидроциклоне двухстадийной напорной флотацией. Из анализа представленных на рис. 2 зависимостей следует, что среднеинтегральная безразмерная остаточная концентрация  $S$  частиц твердой фазы, связанных в комплексы, оставшихся в суспензии в данном сечении пленки, сначала возрастает в осевом направлении вследствие образования комплексов на первой стадии флотации, а затем снижается до пренебрежимо малых значений вследствие извлечения комплексов пузырьками вторичного газа. Форма кривых обусловлена взаимодействием указанных процессов образования и извлечения комплексов. Из сравнения кривых 1–3 следует, что среднеинтегральная безразмерная остаточная концентрация  $S$  частиц твердой фазы снижается с увеличением числа  $Fr$  по всей высоте рабочего пространства гидроциклона.

На рис. 3 представлены распределения среднеинтегральной безразмерной остаточной концентрации частиц твердой фазы  $S$ , связанных в комплексы, оставшихся в суспензии в данном сечении пленки, по оси гидроциклона для  $Pl = 8,5 \cdot 10^{-2}$ ,  $Re_n = 4 \cdot 10^3$ ,  $Q = 0,02$ ,  $n = 0,7$ . Из сравнительного анализа зависимостей, представленных на рис. 3 и рис. 2, следует, что среднеинтегральная безразмерная остаточная концентрация частиц твердой фазы  $S$ , связанных в комплексы, оставшихся в суспензии в данном сечении пленки, при  $Pl = 8,5 \cdot 10^{-2}$  с увеличением числа  $Fr$  снижается более значительно, чем при  $Pl = 8,5 \cdot 10^{-3}$ , и при  $Z = 15 \dots 17$  достигает нулевого значения (см. рис. 3).

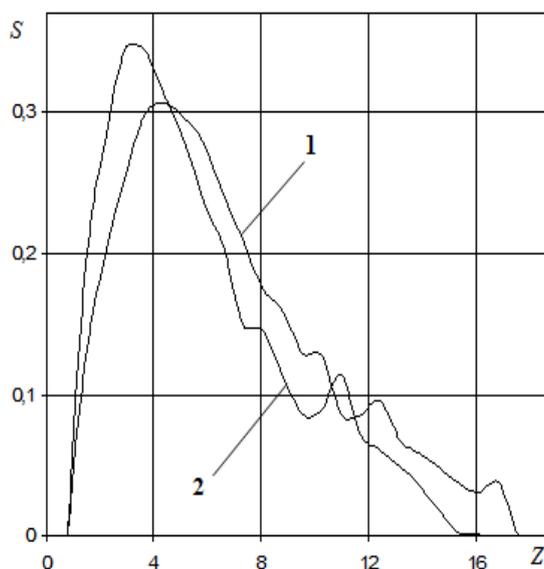


Рис. 3. Распределения среднеинтегральной безразмерной остаточной концентрации частиц твердой фазы  $S$ , связанных в комплексы, по оси гидроциклона для  $Pl = 8,5 \cdot 10^{-2}$ ,  $Re_n = 4 \cdot 10^3$ ,  $Q = 0,02$ ,  $n = 0,7$ ;  $d_h = 2 \cdot 10^{-5}$  м;  $d_{g1} = 3 \cdot 10^{-5}$  м;  $d_{g2} = 3 \cdot 10^{-4}$  м;  $c_{g1} = 0,1$  м<sup>3</sup>/м<sup>3</sup>;  $c_{g2} = 0,05$  м<sup>3</sup>/м<sup>3</sup>; 1 –  $Fr = 30$ ; 2 –  $Fr = 40$

Fig. 3. Distributions of the average integral dimensionless residual concentration of solid phase particles  $S$  bound in complexes along the axis of the hydrocyclone for  $Pl = 8.5 \cdot 10^{-2}$ ,  $Re_n = 4 \cdot 10^3$ ,  $Q = 0.02$ ,  $n = 0.7$ ;  $d_h = 2 \cdot 10^{-5}$  м;  $d_{g1} = 3 \cdot 10^{-5}$  м;  $d_{g2} = 3 \cdot 10^{-4}$  м;  $c_{g1} = 0.1$  м<sup>3</sup>/м<sup>3</sup>;  $c_{g2} = 0.05$  м<sup>3</sup>/м<sup>3</sup>; 1 –  $Fr = 30$ ; 2 –  $Fr = 40$ ;

Сопоставляя рис. 3 и рис. 2, можно установить, что среднеинтегральная остаточная концентрация частиц твердой фазы  $S$ , связанных в комплексы, на выходе из рабочего пространства гидроциклона снижается с увеличением числа пластичности  $Pl$ , соответствующем возрастанию предельного напряжения сдвига  $\tau_0$  и аномалии неньютоновских свойств среды, что объясняется снижением затухания окружной составляющей скорости среды в осевом направлении [2] и соответствующим возрастанием кинетических констант первой и второй стадий напорной флотации  $A_1$  и  $A_2$  согласно данным [11, 12].

### Заключение

Таким образом, с использованием разработанной математической модели разделения вязкопластических сред двухстадийной напорной флотацией в цилиндрическом гидроциклоне выполнено моделирование поля концентраций частиц твердой фазы, связанных в комплексы, установлено влияние фактора разделения и пластических свойств среды на показатели работы гидроциклона-флотатора и определены оптимальные режимы проведения процесса. Показано, что двухстадийная напорная флотация позволяет получить низкую остаточную концентрацию частиц твердой фазы в пленке суспензии. Влияние фактора разделения является более значительным для сред с высоким предельным напряжением сдвига. Установлено, что процесс разделения суспензий с выраженными пластическими свойствами двухстадийной флотацией протекает наиболее эффективно, особенно при высоких значениях фактора разделения, обеспечивая меньшую остаточную концентрацию частиц твердой фазы.

Список источников

1. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Асеева А.Е. Математическое моделирование течения закрученного потока псевдопластической жидкости Балкли–Гершеля в цилиндрическом канале // *Инженерно-физический журнал*. 2019. Т. 92, № 1. С. 215–226. doi: 10.1007/s10780-019-00212-x
2. Яблонский В.О. Гидродинамика нелинейновязкопластической жидкости в цилиндрическом гидроциклоне // *Журнал прикладной химии*. 2013. Т. 86, вып. 8. С. 1236–1243. doi: 10.1134/S1070427213080107
3. Кутепов А.М., Лагуткин М.Г., Павловский Г.В., Муштаев В.И. Разделение дисперсных систем в гидроциклонах с дополнительным вводом диспергированного газа // *Теоретические основы химической технологии*. 1999. Т. 33. № 5. С. 571–577.
4. Кутепов А.М., Лагуткин М.Г., Муштаев В.И., Булычев С.Ю. Разделение гетерогенных систем в цилиндрическом прямом точном гидроциклоне // *Химическое и нефтегазовое машиностроение*. 2002. № 7. С. 14–18. doi: 10.1023/A:1021019131679
5. Орлов С.Л. О столкновении частиц и пузырьков при пневматической флотации в центробежном поле // *Развитие методов механической и биологической очистки сточных вод* : сб. науч. тр. М. : ВНИИ «Водгео», 1982. С. 132–136.
6. Сотскова Т.З., Баженов Ю.Ф., Голик Г.А. Взаимодействие мелких частиц с газовыми пузырьками при напорной флотации // *Химия и технология воды*. 1984. Т. 6, № 1. С. 17–22.
7. Щукина А.Г. Математическое моделирование процессов разделения неоднородных систем с неньютоновской дисперсионной средой : автореф. дис. ... канд. техн. наук : 05.13.16. Волгоград, 1996. 33 с.
8. Яблонский В.О. Математическая модель и анализ влияния конструкции корпуса гидроциклона на эффективность разделения вязкопластических сред напорной флотацией // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2023. № 65. С. 47–57. doi: 10.17223/19988605/65/5
9. Дeryагин Б.В., Духин С.С., Рулев Н.Н. Микрофлотация: водоочистка, обогащение. М. : Химия, 1986. 112 с.
10. Acharya-Robert C., Fernández-Nieto E.D., Narbona-Reina G., Vigneaux P. Viscoplastic free-surface flows // *The Herschel-Bulkley case seventh international conference on computational fluid dynamics (ICCFD7)*, Big Island, Hawaii, July 9–13, 2012. P. 1–15.
11. Тябин Н.В., Дахина Г.Л., Голованчиков А.Б., Мамаков А.А. Расчет аппаратов идеального вытеснения для разделения тонких суспензий электролитическими газами // *Теоретические основы химической технологии*. 1979. Т. 13, № 6. С. 880–884.
12. Тябин Н.В., Голованчиков А.Б., Дахина Г.Л., Зеленцов В.И. Оптимизация процесса электрофлотационного разделения суспензий // *Электронная обработка материалов*. 1986. № 5. С. 65–67.
13. Acharya A., Mashelkar R.A., Ulbrecht J. Flow of inelastic and viscoelastic fluids past a sphere // *Rheol. Acta*. 1976. V. 15 (9). P. 454–463.
14. Пономарёв К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инженерно-технических задач. М. : ЕЭ Медиа, 2024. 184 с.

References

1. Matvienko, O.V., Bazuev, V.P. & Aseeva, A.E. (2019) Mathematical modeling of the flow of a swirling Bulkley-Herschel pseudo-plastic fluid flow in a cylindrical channel. *Engineering Physics Journal*. 92(1). pp. 215–226. DOI: 10.1007/s10780-019-00212-x
2. Yablonsky, V.O. (2013) Hydrodynamics of a nonlinear viscous plastic liquid in a cylindrical hydrocyclone. *Journal of Applied Chemistry*. 86(8). pp. 1236–1243. DOI: 10.1134/S1070427213080107
3. Kutepov, A.M., Lagutkin, M.G., Pavlovsky, G.V. & Mushtaev, V.I. (1999) Separation of dispersed systems in hydrocyclones with additional input of dispersed gas. *Teoreticheskie osnovy khimicheskoy tekhnologii – Theory of Fundamentals of Chemical Technology*. 33(5). pp. 571–577.
4. Kutepov, A.M., Lagutkin, M.G., Mushtaev, V.I. & Bulychev, S.Yu. (2002) Separation of heterogeneous systems in a cylindrical ramjet hydrocyclone. *Khimicheskoe i neftegazovoe mashinostroenie – Chemical and Oil and Gas Engineering*. 7. pp. 14–18. DOI: 10.1023/A:1021019131679
5. Orlov, S.L. (1982) O stolknoventii chastits i puzyr'kov pri pnevmaticheskoy flotatsii v tsentrobeznom pole [On the collision of particles and bubbles during pneumatic flotation in a centrifugal field]. In: *Razvitie metodov mekhanicheskoy i biologicheskoy ochistki stochnykh vod* [Development of Methods of Mechanical and Biological Wastewater Treatment]. Moscow: Vodgeo. pp. 132–136.
6. Sotskova, T.Z., Bazhenov, Yu.F. & Golik, G.A. (1984) Vzaimodeystvie melkikh chastits s gazovymi puzyr'kami pri napornoy flo-tatsii [Interaction of small particles with gas bubbles during pressure flotation]. *Khimiya i tekhnologiya vody*. 6(1). pp. 17–22.
7. Shchukina, A.G. (1996) *Matematicheskoe modelirovanie protsessov razdeleniya neodnorodnykh sistem s nen'yutonovskoy disper-sionnoy sredoy* [Mathematical modeling of separation processes of inhomogeneous systems with a non-Newtonian dispersion medium]. Abstract of Engineering Cand. Diss. Volgograd: VolgSTU.
8. Yablonsky, V.O. (2013) Mathematical model and analysis of the effect of the hydrocyclone hull design on the efficiency of separation of viscoplastic media by pressure flotation. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 65. pp. 47–57. DOI: 10.17223/19988605/65/5
9. Deryagin, B.V., Dukhin, S.S. & Rulev, N.N. (1986) *Mikroflotatsiya: vodoochistka, obogashchenie* [Microflotation: Water Treatment, Enrichment]. Moscow: Khimiya.

10. Acary-Robert, C., Fernández-Nieto, E.D., Narbona-Reina, G. & Vigneaux, P. (2012) Viscoplastic free-surface flows. *The Herschel-Bulkley Case Seventh International Conference on Computational Fluid Dynamics (ICCFD7)*. Big Island, Hawaii, July 9–13. pp. 1–15.
11. Tyabin, N.V., Dakhina, G.L., Golovanchikov, A.B. & Mamakov, A.A. (1979) Raschet apparatov ideal'nogo vytesneniya dlya razdeleniya tonkikh suspenziy elektroliticheskimi gazami [Calculation of ideal displacement devices for separation of thin suspensions by electrolytic gases]. *Teoreticheskie osnovy khimicheskoy tekhnologii – Theory. Fundamentals of Chemical Technology*. 13(6). pp. 880–884.
12. Tyabin, N.V., Golovanchikov, A.B., Dakhina, G.L. & Zelentsov, V.I. (1986) Optimizatsiya protsessa elektroflotatsionnogo razdeleniya suspenziy [Optimization of the process of electroflotation separation of suspensions]. *Elektronnaya obrabotka materialov – Electronic Processing of Materials*. 5. pp. 65–67.
13. Acharya, A., Mashelkar, R.A. & Ulbrecht, J. (1976) Flow of inelastic and viscoelastic fluids past a sphere. *Rheol. Acta*. 15(9). pp. 454–463.
14. Ponomarev, K.K. (2024) *Sostavlenie i reshenie differentsial'nykh uravneniy inzhenerno-tekhnicheskikh zadach* [Compilation and solution of differential equations of engineering and technical problems]. Moscow: EE Media.

**Информация об авторе:**

**Яблонский Владимир Олегович** – кандидат технических наук, доцент кафедры «Процессы и аппараты химических и пищевых производств» Волгоградского государственного технического университета (Волгоград, Россия). E-mail: everest58@mail.ru

*Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.*

**Information about the author:**

**Yablonskii Vladimir O.** (Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department “Processes and Devices of Chemical and Food Production” of Volgograd State Technical University (Volgograd, Russian Federation). E-mail: everest58@mail.ru

*The author declares no conflicts of interests.*

*Поступила в редакцию 23.12.2024; принята к публикации 02.06.2025*

*Received 23.12.2024; accepted for publication 02.06.2025*