

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья

УДК 517.9

MSC: 35G15

doi: 10.17223/19988621/95/1

О решении краевой задачи для неоднородного уравнения эллиптического типа с использованием многочленов Лежандра и Чебышева

Оксана Владимировна Гермидер¹, Василий Николаевич Попов²

^{1,2} Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова,
Архангельск, Россия

¹ o.germider@narfu.ru

² v.popov@narfu.ru

Аннотация. Выполняется построение решения неоднородного эллиптического уравнения четвертого порядка в рамках теории Кирхгофа–Лява тонких изотропных пластин с использованием полиномов Лежандра и Чебышева первого рода. Предполагается, что область интегрирования представляет собой прямоугольник. В качестве граничных условий используются такие типы граничных условий, которые соответствуют закреплению по контуру прямоугольной пластины, шарнирному опиранию и их комбинации. Функция, аппроксимирующая решение рассматриваемого уравнения, представляется в виде конечной суммы ряда этих полиномов для каждой независимой переменной. С использованием метода коллокации в сочетании с матричными преобразованиями и свойствами многочленов Лежандра и Чебышева краевая задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов при разложении искомой функции по этим полиномам. При этом в качестве точек коллокации применяются нули многочленов Лежандра и Чебышева для каждой независимой переменной. Представлены результаты расчетов с использованием предложенного метода изгиба квадратной тонкой изотропной пластины при рассматриваемых граничных условиях под действием распределенной нагрузки интенсивностью определенного вида, приводящего к аналитическому решению соответствующей краевой задачи. Как показало сравнение, построенные решения с высокой степенью точности совпадают с аналитическими решениями.

Ключевые слова: неоднородное эллиптическое уравнение высокого порядка, ортогональные многочлены, изгиб тонких изотропных пластин

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда, проект 24-21-00381.

Для цитирования: Гермидер О.В., Попов В.Н. О решении краевой задачи для неоднородного уравнения эллиптического типа с использованием многочленов Лежандра и Чебышева // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 95. С. 5–18. doi: 10.17223/19988621/95/1

On the solution to a boundary value problem for an inhomogeneous elliptic equation by using Legendre and Chebyshev polynomials

Oksana V. Germider¹, Vasilii N. Popov²

^{1,2} Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov, Arkhangelsk, Russian Federation

¹ o.germider@narfu.ru

² v.popov@narfu.ru

Abstract. This paper constructs a solution to a fourth-order inhomogeneous elliptic equation within the framework of the Kirchhoff–Love theory of thin isotropic plates using the Legendre and Chebyshev polynomials of the first kind. It is assumed that the integration domain is a rectangle. The types of boundary conditions that correspond to pinching along the contour of a rectangular plate, hinged support, and their combinations are used as boundary conditions. The function that approximates the solution of the equation under consideration is represented as a finite sum of a series of these polynomials for each independent variable. Using the collocation method in combination with matrix transformations and properties of Legendre and Chebyshev polynomials, the boundary value problem is reduced to solving a system of linear algebraic equations with respect to coefficients in the expansion of the desired function in these polynomials. In this case, the zeros of the Legendre and Chebyshev polynomials for each independent variable are used as collocation points. The results of calculations using the proposed method of bending a square thin isotropic plate under the considered boundary conditions under the influence of a distributed load of a certain type of intensity leading to an analytical solution of the corresponding boundary value problem are presented. According to the comparison, the constructed solutions coincide with the analytical solutions with a high degree of accuracy.

Keywords: inhomogeneous elliptic equation of high order, orthogonal polynomials, bending of thin isotropic plates

Acknowledgments: The research was supported by the Russian Science Foundation, project 24-21-00381.

For citation: Germider, O.V., Popov, V.N. (2025) On the solution to a boundary value problem for an inhomogeneous elliptic equation by using Legendre and Chebyshev polynomials. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 95. pp. 5–18. doi: 10.17223/19988621/95/1

Введение

Теория краевых задач для эллиптических уравнений высокого порядка в настоящее время интенсивно развивается. Построение решения таких уравнений необходимо, в частности, для моделирования напряженно-деформированных состояний тонких изотропных пластин, которые находятся под действием заданных нагрузок. Такие пластины, обладая достаточной прочностью, используются при проектировании конструкций в авиационной и судостроительной промышленности [1]. Величины прогибов пластин определяются согласно теории Кирхгофа–Лява на ос-

новые решения бигармонического уравнения [2] с граничными условиями защемленного, шарнирно закрепленного и свободного края пластин. Бигармоническое уравнение рассматривалось в ряде работ [1–11]. Для получения решения в [3–5] использован проекционно-сеточный метод коллокации и наименьших квадратов, в [6, 7] – спектральные методы, в [8, 9] – методы конечных элементов и разностей соответственно, в [10] – метод сплайн-коллокации, в [11] решение построено в виде рядов по собственным функциям Папковича–Фадля. Прогиб пластин при жестком защемлении всех сторон относится к сложным вычислительным задачам [1], и для его определения предлагаются новые подходы к построению решения бигармонического уравнения. В [12] произведена оценка напряженно-деформированного состояния элемента конструкции, выполненного в виде закрепленной по контуру пластины из изотропного и ортотропного материалов, при действии импульсной нагрузки с применением конечно-разностных соотношений.

Представленная работа является продолжением проводимых исследований тонких изотропных пластин в рамках теории Кирхгофа–Лява. Построение решения краевой задачи изгиба прямоугольной тонкой изотропной пластины при воздействии нормальной распределенной по ее поверхности нагрузки выполнено методом коллокации с использованием многочленов Лежандра и Чебышева первого рода. Рассмотрены такие граничные условия, как защемление по всему контуру пластины, шарнирное закрепление на краях и их комбинация. В качестве точек коллокации использованы нули многочленов Лежандра и Чебышева. Решение неоднородного эллиптического уравнения четвертого порядка представлено в виде усеченного ряда по этим многочленам для каждой независимой переменной. Коэффициенты в этом разложении искомой функции получены путем решения системы линейных алгебраических уравнений. Представлены результаты расчетов с использованием выбранных точек коллокации. Проведено сравнение полученных результатов вычислений с аналитическими решениями краевых задач и их полиномиальными интерполяциями на основе значений функций в этих точках с применением свойств многочленов Лежандра и Чебышева. Коэффициенты в этих представлениях найдены с помощью обратных матриц, которые записываются в явном виде. Показано, что построенные решения краевых задач с использованием многочленов Лежандра и Чебышева с высокой степенью точности совпадают с соответствующими аналитическими решениями.

Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу для бигармонического уравнения Софи Жермен–Лагранжа в рамках теории тонких пластин с малыми прогибами [2]:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \quad (1)$$

где $w(x, y)$ – прогиб пластины, $q(x, y)$ – интенсивность внешней поперечной нагрузки, $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$ – цилиндрическая жесткость пластины, h – толщина пластины, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона. Рассматриваемая пластина тонкая, изотропная, прямоугольная ($0 \leq x \leq d_1$, $0 \leq y \leq d_2$, $-h/2 \leq z \leq h/2$). Прогобы пластинки, отсчитываемые от ее недеформированной срединной плоскости xu , малы в сравнении с толщиной пластинки.

В качестве граничных условий используем защемление по контуру рассматриваемой пластины [2]:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad x = 0, d_1, \quad (2)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad y = 0, d_2, \quad (3)$$

шарнирное закрепление

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad x = 0, d_1, \quad (4)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad y = 0, d_2. \quad (5)$$

и их комбинацию

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad x = 0, d_1, \quad (6)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad y = 0, d_2. \quad (7)$$

Предположения теории тонких пластин с малыми прогибами [2] являются удовлетворительными для расчета нагрузки на изгиб в случае, когда прогибы пластинки малы в сравнении с ее толщиной h [2] и отношение толщины к размерам плоскости пластины относительно мало ($d_i / h > 10$, $i = 1, 2$) [13]. В этом случае влиянием поперечных сдвиговых деформаций на прогибы можно пренебречь, в то время как для пластинок значительной толщины, в особенности когда последние подвергаются действию резко сосредоточенных нагрузок, это влияние становится значительным [2, 14].

Покажем принцип построения решений для краевой задачи (1)–(3) с использованием многочленов Лежандра и Чебышева.

Построение решения краевой задачи с использованием полиномов Лежандра

Полиномы Лежандра образуют на отрезке $t \in [-1; 1]$ ортогональную систему функций и определяются формулой Родрига [15]:

$$P_0(t) = 1, \quad P_j(t) = \frac{1}{2^j j!} \frac{d^j}{dt^j} (t^2 - 1)^j, \quad j \geq 1.$$

Рекуррентная формула для их вычисления имеет вид [15]:

$$P_1(t) = t, \quad (j+1)P_{j+1}(t) = (2j+1)tP_j(t) - jP_{j-1}(t), \quad j \geq 1.$$

Для представления функции $w(x, y)$ с $x \in [0; d_1]$ и $y \in [0; d_2]$ в виде частичной суммы ряда Фурье–Лежандра [15] введем новые переменные $x_i \in [-1; 1]$ ($i = 1, 2$):

$$x_1 = \frac{2}{d_1}x - 1, \quad x_2 = \frac{2}{d_2}y - 1.$$

Краевая задача (1)–(3) в новых переменных примет вид:

$$\kappa_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + \kappa_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \kappa_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = \frac{q}{D}, \quad \kappa_i = \frac{16}{d_i^4}, \quad (i = 1, 2), \quad \kappa_3 = \frac{32}{d_1^2 d_2^2}, \quad (8)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0, \quad x_1 = -1, 1, \quad (9)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_2} = 0, \quad x_2 = -1, 1. \quad (10)$$

Представим $w(x_1, x_2)$ в виде частичной суммы ряда Фурье–Лежандра:

$$w(x_1, x_2) = \sum_{\substack{k_1=0 \\ i=1,2}}^{n_i} a_{k_1 k_2} P_{k_1}(x_1) P_{k_2}(x_2) = P_1(x_1) \otimes P_2(x_2) A, \quad (11)$$

где $P_i(x_i)$ – матрица-строка размером $1 \times n'_i$ ($n'_i = n_i + 1$, $i = 1, 2$):

$$P_i(x_i) = (P_0(x_i) P_1(x_i) \dots P_{n_i-1}(x_i) P_{n_i}(x_i)),$$

A – матрица-столбец, имеющая размер $n'_1 n'_2 \times 1$, элементами которой являются коэффициенты $a_{k_1 k_2}$ в разложении (11): $A = (a_{00} a_{01} \dots a_{n_1 n_2-1} a_{n_1 n_2})^T$, знаком $\otimes$ в (11) обозначено тензорное умножение двух матриц [18].

Выберем в бигармоническом уравнении (8) в качестве точек коллокации для переменных x_1 и x_2 нули многочленов P_{n_1+1} и P_{n_2+1} соответственно. Находим их согласно [16] как собственные значения квадратных симметричных матриц L_1 и L_2 размерами $n'_1 \times n'_1$ с ненулевыми элементами $L_{i, k_i+1, k_i} = L_{i, k_i, k_i+1} = (k_i + 1) / \sqrt{4(k_i + 1)^2 - 1}$ ($k_i = \overline{0, n_i - 1}$, $i = 1, 2$) [16]. Здесь и ниже нумерацию строк и столбцов осуществляем с нуля. Выбранные точки коллокации симметричны относительно нуля. Например, в случае $n_1 = 9$ матрица L_1 имеет вид:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{15}}{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{15}}{15} & 0 & \frac{3\sqrt{35}}{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\sqrt{35}}{35} & 0 & \frac{4\sqrt{7}}{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4\sqrt{7}}{21} & 0 & \frac{5\sqrt{33}}{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5\sqrt{33}}{11} & 0 & \frac{6\sqrt{143}}{143} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6\sqrt{143}}{143} & 0 & \frac{7\sqrt{195}}{195} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7\sqrt{195}}{195} & 0 & \frac{8\sqrt{255}}{255} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8\sqrt{255}}{255} & 0 & \frac{9\sqrt{323}}{323} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9\sqrt{323}}{323} & 0 \end{pmatrix},$$

Собственные значения матрицы $\mathbf{L}_1$, вычислены точностью 10^{-4} : $x_{1,9} = -x_{1,0} = 0,9739$, $x_{1,8} = -x_{1,1} = 0,8651$, $x_{1,7} = -x_{1,2} = 0,6794$, $x_{1,6} = -x_{1,3} = 0,4334$, $x_{1,5} = -x_{1,4} = 0,1489$. При $n_1 = 10$ получаем $x_{1,10} = -x_{1,0} = 0,9782$, $x_{1,9} = -x_{1,1} = 0,8871$, $x_{1,8} = -x_{1,2} = 0,7302$, $x_{1,7} = -x_{1,3} = 0,5191$, $x_{1,6} = -x_{1,4} = 0,2695$, $x_{1,5} = 0$.

Используя равенство [16]

$$\frac{dP_{j_i}}{dx_i} = \sum_{\substack{k_i=0 \\ j_i+k_i-\text{нечет}}}^{j_i-1} (2k_i+1)P_{k_i}(x_i), \quad (12)$$

производную $\mathbf{P}_i(x_i)$ по переменной x_i запишем в виде:

$$\frac{d\mathbf{P}_i}{dx_i} = \mathbf{P}_i \mathbf{J}_i, \quad (13)$$

где $\mathbf{J}_i$ – верхнетреугольная матрица размером $n'_i \times n'_i$ с ненулевыми элементами $J_{i,k_i j_i} = 2k_i + 1$, $j_i - k_i > 0$ и $j_i + k_i$ нечетное, $j_i, k_i = \overline{0, n_i}$, $i = 1, 2$.

В случае $n_1 = 9$ матрица $\mathbf{J}_1$ имеет вид:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 7 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 9 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вторую и четвертую производные $\mathbf{P}_i(x_i)$ по каждой переменной x_i находим, соответственно, как

$$\frac{d^j \mathbf{P}_i}{dx_i^j} = \mathbf{P}_i \mathbf{J}_i^j, \quad j = 2, 4, \quad i = 1, 2, \quad (14)$$

Подставляя (11), (13) и (14) в уравнение (8) в точках коллокации x_{i,k_i} ($k_i = \overline{0, n_i}$, $i = 1, 2$), приходим к системе линейных $n'_1 n'_2$ уравнений, в которой согласно граничным условиям (9) и (10) осуществляем замену уравнений в точках, для которых $x_i = x_{i,0}$ или $x_i = x_{i,n_i}$, на уравнения

$$\mathbf{P}_1(-1) \otimes \mathbf{P}_2(x_{2,k_2}) \mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{P}_1(1) \otimes \mathbf{P}_2(x_{2,k_2}) \mathbf{A} = 0, \quad (15)$$

$$\mathbf{P}_1(x_{1,k_1}) \otimes \mathbf{P}_2(-1) \mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{P}_1(x_{1,k_1}) \otimes \mathbf{P}_2(1) \mathbf{A} = 0, \quad (16)$$

а в точках $x_{i,1}$ и x_{i,n_i-1} на уравнения

$$\mathbf{P}_1(-1) \mathbf{J}_1 \otimes \mathbf{P}_2(x_{2,k_2}) \mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{P}_1(1) \mathbf{J}_1 \otimes \mathbf{P}_2(x_{2,k_2}) \mathbf{A} = 0, \quad (17)$$

$$\mathbf{P}_1(x_{1,k_1}) \otimes (\mathbf{P}_2(-1)\mathbf{J}_2)\mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{P}_1(x_{1,k_1}) \otimes (\mathbf{P}_2(1)\mathbf{J}_2)\mathbf{A} = 0. \quad (18)$$

Полученная таким образом система линейных алгебраических уравнений в матричной форме имеет вид:

$$\mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{B} = \sum_{i=1}^5 \mathbf{B}_i, \quad (19)$$

где $\mathbf{B}_i$ ($i = \overline{1, 5}$) – квадратные матрицы, имеющие размер $n'_1 n'_2 \times n'_1 n'_2$:

$$\mathbf{B}_1 = \kappa_1 \mathbf{G}_1'' \mathbf{J}_1^4 \otimes \mathbf{G}_2'', \quad \mathbf{B}_2 = \kappa_3 \mathbf{G}_1'' \mathbf{J}_1^2 \otimes (\mathbf{G}_2'' \mathbf{J}_2^2), \quad \mathbf{B}_3 = \kappa_2 \mathbf{G}_1'' \otimes (\mathbf{G}_2'' \mathbf{J}_2^4),$$

$$\mathbf{B}_4 = \mathbf{G}_3 \otimes \mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_1 \otimes \mathbf{G}_4, \quad \mathbf{B}_5 = \mathbf{G}_5 \mathbf{J}_1 \otimes \mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_1 \otimes (\mathbf{G}_6 \mathbf{J}_2).$$

Здесь $\mathbf{G}_i$ ($i = 1, 2$) – квадратные матрицы размером $n'_i \times n'_i$, в которых k_i -е строки равны соответственно $\mathbf{P}_i(x_{i,k_i})$ ($k_i = \overline{0, n_i}$). Матрица $\mathbf{G}_i''$ получена из $\mathbf{G}_i$ путем замены первых и последних двух строк в $\mathbf{G}_i$ ($i = 1, 2$) на нулевые. Квадратные $n'_1 \times n'_1$ матрицы $\mathbf{G}_3$ и $\mathbf{G}_5$ содержат только две ненулевые строки с элементами:

$$G_{3,0,j_1} = P_{1,j_1}(-1) = (-1)^{j_1}, \quad G_{3,n_1,j_1} = P_{1,j_1}(1) = 1,$$

$$G_{5,1,j_1} = P_{1,j_1}(-1) = (-1)^{j_1}, \quad G_{5,n_1-1,j_1} = P_{1,j_1}(1) = 1 \quad (j_1 = \overline{0, n_1}).$$

Подобные структуры имеют и квадратные $n'_2 \times n'_2$ матрицы $\mathbf{G}_4$ и $\mathbf{G}_6$. Ненулевые элементы матрицы-столбца $\mathbf{F} = (f_{00} \ f_{01} \ \dots \ f_{n_1 n_2 - 1} \ f_{n_1 n_2})^T$ определяются как

$$f_{k_1 k_2} = q(x(x_{1,k_1}), y(x_{2,k_2})) / D,$$

где $k_i = \overline{2, n_{i-2}}$, $i = 1, 2$.

Решение уравнения (19) находим LU -методом. Восстановив элементы матрицы $\mathbf{A}$, функцию $w(x_1, x_2)$ получаем, используя (11)

Построение решения краевой задачи с использованием полиномов Чебышева

Полиномы Чебышева образуют на отрезке $t \in [-1; 1]$ ортогональную систему функций и определяются согласно [17] как

$$T_j(t) = \cos(j \arccos t), \quad j \geq 0. \quad (20)$$

Рекуррентная формула для них имеет вид [17]:

$$T_0(t) = 1, \quad T_1(t) = t, \quad T_{j+1}(t) = 2tT_j(t) - T_{j-1}(t), \quad j \geq 0. \quad (21)$$

Представим $w(x_1, x_2)$ в виде частичной суммы ряда Фурье–Чебышева:

$$w(x_1, x_2) = \sum_{\substack{k_i=0 \\ i=1,2}}^{n_i} a_{k_1 k_2} T_{k_1}(x_1) T_{k_2}(x_2) = \mathbf{T}_1(x_1) \otimes \mathbf{T}_2(x_2) \mathbf{A}, \quad (22)$$

где $\mathbf{T}_i(x_i) = (T_0(x_i) \ T_1(x_i) \ \dots \ T_{n_i-1}(x_i) \ T_{n_i}(x_i))$, ($i = 1, 2$).

В качестве точек коллокации для переменных x_1 и x_2 в этом случае выберем нули многочленов T_{n_1+1} и T_{n_2+1} соответственно:

$$x_{i,k_i}^* = \cos\left(\frac{\pi(2n_i - 2k_i + 1)}{2(n_i + 1)}\right), \quad k_i = \overline{0, n_i}, \quad i = 1, 2. \quad (23)$$

Точки (23) расположены симметрично относительно нуля. При $n_1 = 9$, вычисляя по (23) с точностью 10^{-4} , имеем: $x_{1,9}^* = -x_{1,0}^* = 0,9877$, $x_{1,8}^* = -x_{1,1}^* = 0,8970$, $x_{1,7}^* = -x_{1,2}^* = 0,7070$, $x_{1,6}^* = -x_{1,3}^* = 0,4540$, $x_{1,5}^* = -x_{1,4}^* = 0,1564$. При $n_1 = 10$ получаем $x_{1,10}^* = -x_{1,0}^* = 0,9898$, $x_{1,9}^* = -x_{1,1}^* = 0,9095$, $x_{1,8}^* = -x_{1,2}^* = 0,7556$, $x_{1,7}^* = -x_{1,3}^* = 0,5405$, $x_{1,6}^* = -x_{1,4}^* = 0,2819$, $x_{1,5}^* = 0$.

Подставляя (23) в (20), имеем

$$T_{j_i}(x_{i,k_i}^*) = \cos\left(\frac{\pi j_i(2n_i - 2k_i + 1)}{2(n_i + 1)}\right), \quad j_i, k_i = \overline{0, n_i}, \quad i = 1, 2. \quad (24)$$

Используя равенство [16]

$$\frac{dT_{j_i}}{dx_i} = j_i \sum_{\substack{k_i=0 \\ j_i+k_i-\text{нечет}}}^{j_i-1} c_k T_{k_i}(x_i), \quad j \geq 0, \quad (25)$$

где $c_0 = 1$ и $c_{k_i} = 2$ ($k_i > 0$), производную $T_i(x_i)$ по переменной x_i запишем в виде произведения:

$$\frac{dT_i}{dx_i} = T_i J_i, \quad (26)$$

где J_i – верхнетреугольная матрица с ненулевыми элементами $J_{i,0j_i} = j_i$ (j_i нечетное, $j_i = \overline{1, n_i}$) и $J_{i,k_i j_i} = 2k_i$, ($j_i - k_i > 0$ и $j_i + k_i$ нечетное, $j_i, k_i = \overline{1, n_i}$, $i = 1, 2$).

При $n_1 = 9$ матрица J_1 в этом случае имеет вид:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 & 7 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 8 & 0 & 12 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 10 & 0 & 14 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 12 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 14 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для второй и четвертой производных $T_i(x_i)$ по x_i получаем

$$\frac{d^j T_i}{dx_i^j} = T_i J_i^j, \quad j = 2, 4, \quad i = 1, 2. \quad (27)$$

Подставляя (22), (26) и (27) в уравнение (8) в точках коллокации (23), приходим к системе (19), в которой осуществлена замена уравнений в точках, для которых $x_i = x_{i,0}^*$, $x_{i,1}^*$ и $x_i = x_{i,n_i-1}^*$, x_{i,n_i}^* , на уравнения (9) и (10). Решение уравнения (19) находим LU -методом. Восстановив элементы матрицы A , функцию $w(x_1, x_2)$ в этом случае получаем, используя (22).

Результаты вычислений и их анализ

Рассмотрим изгиб прямоугольной изотропной пластины под действием поперечной нагрузки, все края которой зашпелены:

$$q(x, y) = q_0 \left(\cos \left(\frac{\pi(2x - d_1)}{d_1} \right) \cos \left(\frac{\pi(2y - d_2)}{d_2} \right) + \frac{d_1^4 d_2^4}{\pi^4 D(d_1^2 + d_2^2)^2} \left(\frac{1}{d_1^2} \cos \left(\frac{\pi(2x - d_1)}{d_1} \right) + \frac{1}{d_2^2} \cos \left(\frac{\pi(2y - d_2)}{d_2} \right) \right) \right),$$

где $q_0 = 0.1$ МПа.

В этом случае аналитическое решение краевой задачи (1)–(3) имеет вид:

$$w(x, y) = \frac{q_0 d_1^4 d_2^4}{\pi^4 D(d_1^2 + d_2^2)^2} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi(2x - d_1)}{d_1} \right) \right) \left(1 + \cos \left(\frac{\pi(2y - d_2)}{d_2} \right) \right). \quad (28)$$

При проведении вычислений использованы значения физических параметров из [3, 4]: $d_1 = d_2 = 10$ м, $h = 0.1$ м, $E = 200$ ГПа, $\nu = 0.28$, $n_{1,2} = n$. В табл. 1 представлены результаты вычислений с использованием полиномиальных аппроксимаций (11) и (22) при выборе в качестве точек коллокации в (8)–(10) нулей полиномов Лежандра и Чебышева (23) соответственно. Для расчета погрешностей построенных решений w_n с использованием (11) и (22) в сравнении с аналитическим решением (28), следуя [3, 4], применено 100 равномерно распределенных контрольных точек (x_i, y_j) :

$$\|E_n\|_\infty = \frac{\max_{i,j} |w(x_i, y_j) - w_n(x_i, y_j)|}{\max_{i,j} |w(x_i, y_j)|}. \quad (29)$$

В табл. 1 приведены значения величин погрешностей вычислений между последовательными итерациями $n - 1$ и n :

$$\|E_n\| = \frac{\max_{i,j} |w_n(x_i, y_j) - w_{n-1}(x_i, y_j)|}{\max_{i,j} |w_n(x_i, y_j)|}. \quad (30)$$

В табл. 1 приведены результаты вычислений с использованием полиномиальных интерполяций (11) и (22) функции (28) на основе ее значений в точках, которые соответствуют нулям полиномов Лежандра и Чебышева. Погрешности полученных функций обозначены $\|E_{p,n}\|_\infty$. Коэффициенты в этих представлениях найдены с помощью обратных матриц $\mathbf{G}_1^{-1}$ и $\mathbf{G}_2^{-1}$. В случае полиномиальной интерполяции Лежандра (11) получаем

$$\mathbf{G}_1 \otimes \mathbf{G}_1 \mathbf{A} = \mathbf{W}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{G}_1^{-1} \otimes \mathbf{G}_2^{-1} \mathbf{W}, \quad (31)$$

где $\mathbf{W} = (w(x_{1,0}, y_{2,0}), w(x_{1,0}, y_{2,1}), \dots, w(x_{1,n_1}, y_{2,n_2}))^T$.

Используя свойство конечных сумм для многочленов Лежандра [16, 19]

$$\sum_{k=0}^{n_1} P_{j_1}(x_{1,k}) P_{j_2}(x_{1,k}) g_P(x_{1,k}) = \gamma_{P,j_1} \delta_{j_1,j_2}, \quad \gamma_{P,j_1} = \frac{2}{2j_1 + 1},$$

где δ_{j_1,j_2} – символ Кронекера,

$$g_p(x_{1,k}) = \frac{2}{(1-x_{1,k}^2)(P'_{n+1}(x_{1,k}))^2} = \frac{2(1-x_{1,k}^2)}{(n_1+2)^2 P_{n+2}^2(x_{1,k})},$$

находим обратные матрицы $\mathbf{G}_1^{-1}$ и $\mathbf{G}_2^{-1}$: $(\mathbf{G}_i^{-1})_{j_i k_i} = G_{i,j_i k_i} w_p(x_{1,k}) / \gamma_{p,j_i}$ ($j_i, k_i = \overline{1, n_i}$, $i = 1, 2$).

В случае полиномиальной интерполяции Чебышева (22) в точках (23) с помощью равенства [16, 17]

$$\sum_{k=0}^{n_i} T_{j_1}(x_{1,k}^*) T_{j_2}(x_{1,k}^*) g_T(x_{1,k}^*) = \gamma_{T,j_1} \delta_{j_1, j_2},$$

$$\gamma_{T,0} = \pi, \quad \gamma_{T,j} = \frac{\pi}{2}, \quad j > 0, \quad g_T(x_{1,k}^*) = \frac{\pi}{n_1 + 1},$$

получаем обратную матрицу $\mathbf{G}_i^{-1}$ путем транспонирования $\mathbf{G}_i$, умножения $\mathbf{G}_i^T$ на $2/(n_i + 1)$ ($i = 1, 2$) и деления элементов первой строки этой матрицы на 2.

Во втором и пятом столбцах табл. 1 приведены погрешности вычислений $\|E_n\|_\infty$ по формуле (29) с использованием полиномиальных аппроксимаций Лежандра (11) и Чебышева (22) решения краевой задачи (8)–(10) в сравнении с аналитическим решением (28) этой задачи, в третьем и шестом столбцах табл. 1 представлены погрешности вычислений $\|E_n\|$ по формуле (30) между последовательными итерациями $n - 1$ и n при построении решения, в четвертом и седьмом столбцах указаны погрешности вычислений $\|E_{p,n}\|_\infty$ с использованием полиномиальных интерполяций функции (28) с использованием обратных матриц.

Таблица 1

Значения погрешностей для защемленной по контуру пластины

n	(11)			(22), (23)		
	$\ E_n\ _\infty$	$\ E_n\ $	$\ E_{p,n}\ _\infty$	$\ E_n\ _\infty$	$\ E_n\ $	$\ E_{p,n}\ _\infty$
9	$2.7 \cdot 10^{-3}$	$2.9 \cdot 10^{-3}$	$5.5 \cdot 10^{-5}$	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$2.3 \cdot 10^{-3}$	$4.2 \cdot 10^{-5}$
11	$9.3 \cdot 10^{-5}$	$1.0 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-6}$	$5.9 \cdot 10^{-5}$	$7.0 \cdot 10^{-5}$	$8.0 \cdot 10^{-7}$
18	$5.9 \cdot 10^{-12}$	$3.8 \cdot 10^{-10}$	$2.4 \cdot 10^{-14}$	$3.5 \cdot 10^{-12}$	$1.9 \cdot 10^{-10}$	$9.4 \cdot 10^{-15}$

Рассмотрим изгиб срединной плоскости прямоугольной изотропной пластины, все края которой шарнирно закреплены ((4) и (5)) и которая находится под действием поперечной нагрузки

$$q(x, y) = q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d_1}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{d_2}\right).$$

В этом случае аналитическое решение краевой задачи (1), (4), (5) имеет вид [2]:

$$w(x, y) = \frac{q(x, y) d_1^4 d_2^4}{\pi^4 D (d_1^2 + d_2^2)^2}. \quad (32)$$

В табл. 2 представлены результаты вычислений в сравнении с [3]. Приведем сравнение с результатами, полученные в [4, 5]. В работе [4] значение относительной погрешности вычислений интегральным методом коллокации и наименьших

квадратов $\|E_n\|_\infty = 7.58 \cdot 10^{-13}$ достигнуто с использованием сетки 16×16 и локальной системы линейных уравнений с $l = (K+1)(K+2)/2$ неизвестными при $K = 10$. Для достижения относительной погрешности решения методом коллокации и наименьших квадратов в пространстве полиномов Чебышева значения $\|E_n\|_\infty = 1.11 \cdot 10^{-7}$ в [5] применена сетка 16×16 , в каждой ячейке которой записана локальная система линейных алгебраических уравнений с $l = (K+1)(K+2)/2$ неизвестными, где $K = 7$ – степень старшего полинома Чебышева.

Из представленных результатов следует, что для построения решения предлагаемым в настоящей работе методом необходимо значительно меньше точек дискретного спектра по сравнению с [3–5], и ранг матрицы системы линейных алгебраических уравнений (19), к решению которой сведена краевая задача (1), (4) и (5), равен $(n+1)^2$.

Таблица 2

Значения погрешностей для шарнирного закрепления

n	(11)			(22), (23)			[3]
	$\ E_n\ _\infty$	$\ E_n\ $	$\ E_{p,n}\ _\infty$	$\ E_n\ _\infty$	$\ E_n\ $	$\ E_{p,n}\ _\infty$	
9	$8.0 \cdot 10^{-5}$	$5.8 \cdot 10^{-5}$	$1.3 \cdot 10^{-7}$	$6.2 \cdot 10^{-5}$	$5.2 \cdot 10^{-5}$	$9.4 \cdot 10^{-8}$	$1.8 \cdot 10^{-2}$
11	$9.2 \cdot 10^{-7}$	$7.2 \cdot 10^{-7}$	$6.7 \cdot 10^{-10}$	$6.6 \cdot 10^{-7}$	$5.8 \cdot 10^{-7}$	$4.4 \cdot 10^{-10}$	–
18	$5.8 \cdot 10^{-16}$	$1.1 \cdot 10^{-13}$	$2.3 \cdot 10^{-16}$	$1.3 \cdot 10^{-14}$	$7.8 \cdot 10^{-14}$	$1.1 \cdot 10^{-14}$	$2.8 \cdot 10^{-3}$

Рассмотрим случай, когда на двух краях $x = 0$ и $x = d_1$ пластина закреплена (6), на других краях шарнирно опирается (7). На прямоугольную пластину действует распределенная нагрузка

$$q(x, y) = q_0 \left(\frac{d_1^4}{(d_1^2 + 4d_2^2)^2} - \cos \left(\frac{2\pi x}{d_1} \right) \right) \sin \left(\frac{\pi y}{d_2} \right).$$

Аналитическое решение задачи (1), (6) и (7) имеет вид:

$$w(x, y) = \frac{q_0 d_1^4 d_2^4}{\pi^4 D (d_1^2 + 4d_2^2)^2} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi(2x - d_1)}{d_1} \right) \right) \sin \left(\frac{\pi y}{d_2} \right).$$

Таблица 3

Значения погрешности для граничного условия (6) и (7)

n	(11)			(22), (23)		
	$\ E_n\ _\infty$	$\ E_n\ $	$\ E_{p,n}\ _\infty$	$\ E_n\ _\infty$	$\ E_n\ $	$\ E_{p,n}\ _\infty$
9	$2.3 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-3}$	$5.5 \cdot 10^{-5}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$	$2.0 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-5}$
11	$8.0 \cdot 10^{-5}$	$8.7 \cdot 10^{-5}$	$1.2 \cdot 10^{-6}$	$5.0 \cdot 10^{-5}$	$6.1 \cdot 10^{-5}$	$4.0 \cdot 10^{-7}$
18	$6.9 \cdot 10^{-12}$	$3.2 \cdot 10^{-10}$	$2.4 \cdot 10^{-14}$	$3.0 \cdot 10^{-12}$	$1.7 \cdot 10^{-10}$	$1.1 \cdot 10^{-14}$

Из табл. 1–3 видно, что решения краевых задач, полученные представленным методом с использованием нулей многочленов Лежандра и Чебышева первого рода, с высокой точностью совпадают с аналитическими решениями при сравнительно небольших значениях n . Значения относительных погрешностей этих решений

приближаются к соответствующим значениям погрешностей полиномиальных интерполяций функций решений, что говорит об хороших аппроксимационных свойствах метода.

Заключение

В работе с использованием многочленов Лежандра и Чебышева построено решение краевой задачи для неоднородного эллиптического уравнения четвертого порядка в рамках теории Кирхгофа–Лява. Показано, что полученные результаты с высокой точностью совпадают с аналитическими решениями краевых задач при сравнительно небольших значениях степеней этих многочленов в разложении искомой функции, определяющей решение эллиптического уравнения. За счет выбора точек коллокации и построения матрицы системы линейных алгебраических уравнений, к решению которой сведена краевая задача, наблюдается меньшая чувствительность к ошибкам округления и обеспечивается выполнение граничных условий. Выбор в качестве базиса полиномов Чебышева, обладающих дискретной ортогональностью, дает возможность записать в простом явном виде их произведения, производные, привести матрицу системы к разреженной при поиске искомых коэффициентов в разложении, обеспечивает асимптотику погрешности наилучших полиномиальных приближений.

Список источников

1. Алцыбеев Г.О., Голоскоков Д.П., Матросов А.В. Метод суперпозиции в задаче изгиба защемленной по контуру тонкой изотропной пластинки // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18, № 3. С. 347–364. doi: 10.21638/11701/spbu10.2022.305
2. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966.
3. Голушко С.К., Идимешев С.В., Шанеев В.П. Метод коллокации и наименьших невязок в приложении к задачам механики изотропных пластин // Вычислительные технологии. 2013. Т. 18, № 6. С. 31–43.
4. Шанеев В.П., Брындин Л.С., Беляев В.А. hp-Вариант метода коллокации и наименьших квадратов с интегральными коллокациями решения бигармонического уравнения // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки. 2022. Т. 26, № 3. С. 556–572. doi: 10.14498/vsgtu1936
5. Беляев В.А., Брындин Л.С., Голушко С.К., Семисалов Б.В., Шанеев В.П. H-, P- и HP-варианты метода коллокации и наименьших квадратов для решения краевых задач для бигармонического уравнения в нерегулярных областях и их приложения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2022. Т. 62, № 4. С. 531–552. doi: 10.31857/S0044466922040020
6. Mai-Duy N., Struin D., Karunasena W. A new high-order nine-point stencil, based on integrated-RBF approximations, for the first biharmonic equation // Engineering analysis with boundary elements. 2022. V. 143. P. 687–699. doi: 10.1016/j.enganabound.2022.07.014
7. Shao W., Wu X. An effective Chebyshev tau meshless domain decomposition method based on the integration-differentiation for solving fourth order equations // Applied Mathematical Modelling. 2015. V. 39 (9). P. 2554–2569. doi: 10.1016/j.apm.2014.10.048
8. Ye X., Zhang Sh. A family of H-div-div mixed triangular finite elements for the biharmonic equation // Results in Applied Mathematics. 2022. V. 15. Art. 100318. doi: 10.1016/j.rinam.2022.100318
9. Моханти Р.К., Каур Д. Компактная разностная схема высокой точности для одномерной нестационарной квазилинейной бигармонической задачи второго рода: приложение

- к физическим задачам // Сибирский журнал вычислительной математики. 2018. Т. 21, № 1. С. 65–82. doi: 10.15372/SJNM20180105
10. Lytvyn O.M., Lytvyn O.O., Tomanova I.S. Solving the biharmonic plate bending problem by the Ritz method using explicit formulas for splines of degree 5 // *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. V. 54. P. 944–947. doi: 10.1007/s10559-018-0097-x
 11. Зверев Е.М., Коваленко М.Д., Аbruков Д.А., Меньшова И.В., Кержаев А.П. О разложениях по функциям Папковича–Фадля в задаче изгиба пластины. М., 2019. doi: 10.20948/prerpr-2019-38 (Препринты Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН; № 38).
 12. Щербakov И.В., Люкин Б.А. Моделирование поведения отклика ортотропной пластины при воздействии динамической нагрузки // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2019. Т. 61. С. 111–118. doi: 10.17223/19988621/61/10
 13. Ventsel E., Krauthammer Th. *Thin plates and shells. Theory: analysis and applications*. Boca Raton: CRC Press, 2001.
 14. Shanmugam N.E., Wang C.M. *Analysis and design of plated structures*. 2nd ed. Woodhead Publishing, 2022. doi: 10.1016/C2020-0-00441-X
 15. Суетин П.К. *Классические ортогональные многочлены*. М.: Наука, 1976.
 16. Shen J., Tang T., Wang L. *Spectral methods*. Heidelberg; Berlin: Springer, 2011.
 17. Mason J., Handscomb D. *Chebyshev polynomials*. Florida: CRC Press, 2003.
 18. Liu S., Trenkler G. Hadamard, Khatri-Rao, Kronecker and other matrix products // *International Journal of Information and Systems Sciences*. 2008. V. 4 (1). P. 160–177.
 19. Hildebrand F.B. *Introduction to numerical analysis*. 2nd ed. New York: Dover Publications, 1987.

References

1. Altsybeev G.O., Goloskokov D.P., Matrosov A.V. (2022) Metod superpozitsii v zadache izgiba zashchemlennoy po konturu tonkoy izotropnoy plastinki [The superposition method in the problem of bending a thin isotropic plate clamped along the contour] *Vestnik Sankt-Petersburgskogo universiteta Seriya 10 Prikladnaya matematika Informatika Processy upravleniya – Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. 93(3). pp. 347–364. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2022.305.
2. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. (1959) *Theory of Plates and Shells*. New York: McGraw-Hill Book Company.
3. Golushko S.K., Idimeshev S.V., Shapeev V.P. (2013) Metod kollokatsiy i naimen'shikh nevyazok v prilozhenii k zadacham mekhaniki izotropnykh plastin [Application of collocations and least residuals method to problems of the isotropic plates theory] *Vychislitel'nyye Tekhnologii – Computational Technologies*. 18(6). pp. 31–43.
4. Shapeyev V.P., Bryndin L.S., Belyayev V.A. (2022) hp-variant metoda kollokatsii i naimen'shikh kvadratov s integral'nymi kollokatsiyami resheniya bigarmonicheskogo uravneniya [The hp-version of the least-squares collocation method with integral collocation for solving a biharmonic equation]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskiye nauki – Journal of Samara State Technical University, Seriya Physical and Mathematical Sciences*. 26(3). pp. 556–572. DOI: 10.14498/vsgtu1936.
5. Belyaev V.A., Bryndin L.S., Golushko S.K., Semisalov B.V., Shapeev V.P. (2022) h-, p-, and hp-Versions of the Least-Squares Collocation Method for Solving Boundary Value Problems for Biharmonic Equation in Irregular Domains and Their Applications. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 62. pp. 517–537. DOI: 10.1134/S0965542522040029.
6. Mai-Duy N., Strunin D., Karunasena W. (2022) A new high-order nine-point stencil, based on integrated-RBF approximations, for the first biharmonic equation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 143. pp. 687–699. DOI: 10.1016/j.engabound.2022.07.014.

7. Shao W., Wu X. (2015) An effective Chebyshev tau meshless domain decomposition method based on the integration-differentiation for solving fourth order equations. *Applied Mathematical Modelling*. 39(9). pp. 2554–2569. DOI: 10.1016/j.apm.2014.10.048.
8. Ye X., Zhang Sh. (2022) A family of H-div-div mixed triangular finite elements for the biharmonic equation. *Results in Applied Mathematics*. 15(100318). DOI: 10.1016/j.rinam.2022.100318.
9. Mohanty R.K., Kaur D. (2018) Compact difference scheme with high accuracy for one-dimensional unsteady quasi-linear biharmonic problem of second kind: application to physical problems. *Numerical Analysis and Applications*. 11. pp. 45–59. DOI: 10.1134/S1995423918010068.
10. Lytvyn O.M., Lytvyn O.O., Tomanova I.S. (2018) Solving the biharmonic plate bending problem by the Ritz method using explicit formulas for splines of degree 5. *Cybernetics and Systems Analysis*. 54. pp. 944–947. DOI: 10.1007/s10559-018-0097-x.
11. Zveryaev E.M., Kovalenko M.D., Abrukov D.A., Menshova I.V., Kerzhaev A.P. (2019) O razlozheniyakh po funktsiyam Papkovicha – Fadlya v zadache izgiba plastiny [On expansions in Papkovich–Fadl functions in the problem of plate bending]. *Preprinty Instituta prikladnoy matematiki imeni M.V. Keldysya RAN – Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics*. DOI: 10.20948/prepr-2019-38.
12. Scherbakov I.V., Lyukshin B.A. (2019) Modelirovaniye povedeniya otklika ortotropnoy plastiny pri vozdeystvii dinamicheskoy nagruzki [Simulation of the orthotropic plate response behavior during dynamic load]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 61 pp. 111–118. DOI: 10.17223/19988621/61/10.
13. Ventsel E., Krauthammer Th. (2001) *Thin Plates and Shells. Theory: Analysis and Applications*. Boca Raton: CRC Press.
14. Shanmugam N.E., Wang C.M. (2022) *Analysis and Design of Plated Structures (Second Edition)*. Woodhead Publishing. DOI: 10.1016/C2020-0-00441-X
15. Suetin P.K. (1976). *Klassicheskiye ortogonal'nyye mnogochleny [Classical orthogonal polynomials]*. Moscow: Nauka.
16. Shen J., Tang T., Wang L. (2011) *Spectral Methods*. Heidelberg: Springer Berlin.
17. Mason J., Handscomb D. (2003) *Chebyshev Polynomials*. Boca Raton: CRC Press.
18. Liu S., Trenkler G. (2008) Hadamard, Khatri-Rao, Kronecker and other matrix products. *International Journal of Information and Systems Sciences*. 4(1). pp. 160–177.
19. Hildebrand F.B. (1987) *Introduction to Numerical Analysis (Second Edition)*. New York: Dover Publications.

Сведения об авторах:

Гермидер Оксана Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры инженерных конструкций, архитектуры и графики Северного (Арктического) федерального университета им. М.В. Ломоносова (Архангельск, Россия). E-mail: o.germider@narfu.ru

Попов Василий Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей и прикладной математики Северного (Арктического) федерального университета им. М.В. Ломоносова (Архангельск, Россия). E-mail: v.popov@narfu.ru

Information about the authors:

Germider Oksana V. (Candidate of Physics and Mathematics, Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov, Arkhangelsk, Russian Federation). E-mail: o.germider@narfu.ru

Popov Vasilii N. (Doctor of Physics and Mathematics, Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov, Arkhangelsk, Russian Federation). E-mail: v.popov@narfu.ru

The article was submitted 09.06.2024; accepted for publication 09.06.2025

Статья поступила в редакцию 09.06.2024; принята к публикации 09.06.2025