ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2025 Математика и механика № 95
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Научная статья
УДК 512.552 MSC: 16S50
doi: 10.17223/19988621/95/2

Сопряженные идемпотентные формальные матрицы второго порядка над кольцами вычетов

Артем Евгеньевич Зыков[1], Анастасия Максимовна Королева[2], Цырендоржи Дашацыренович Норбосамбуев[3]

[1, 2, 3] Томский государственный университет, Томск, Россия
[1] tigerlroe92@gmail.com
[2] elfimova.nastya@bk.ru
[3] nstsddts@yandex.ru

Аннотация. Показано, что всякая нетривиальная идемпотентная матрица в кольце формальных матриц второго порядка над кольцами вычетов по модулям степеней простого числа является сопряженной с одной из матричных единиц E_{11} и E_{22}. Из этого следует, что нетривиальные идемпотентные формальные матрицы разных типов никогда не могут быть сопряженными, а одного типа – будут сопряженными всегда.
Ключевые слова: кольцо формальных матриц, идемпотентная формальная матрица, сопряженные идемпотенты

Благодарности: Работа выполнена в рамках проекта «Аддитивные задачи в кольцах формальных матриц над кольцами вычетов» во время Большой математической мастерской в Томском государственном университете при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2025-1728/2).

Для цитирования: Зыков А.Е., Королева А.М., Норбосамбуев Ц.Д. Сопряженные идемпотентные формальные матрицы второго порядка над кольцами вычетов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 95. С. 19–27. doi: 10.17223/19988621/95/2

Original article

Conjugate idempotent formal matrices of order 2 over residue class rings

Artem E. Zykov[1], Anastasia M. Koroleva[2], Tsyrendorzhi D. Norbosambuev[3]

[1, 2, 3] Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation
[1] tigerlroe92@gmail.com
[2] elfimova.nastya@bk.ru
[3] nstsddts@yandex.ru

Abstract. Let p be a prime, $p > 1$, m and n be integers, $m > n > 0$. In recent works [1–5] the following formal matrix rings were considered:

$$K=\begin{pmatrix} \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix} a+p^m\mathbf{Z} & b+p^n\mathbf{Z} \\ c+p^n\mathbf{Z} & d+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c,d\in\mathbf{Z}\right\}$$

with multiplication defined so that for every $A, A'\in K$ we have

$$A\cdot A'=\begin{pmatrix} a+p^m\mathbf{Z} & b+p^n\mathbf{Z} \\ c+p^n\mathbf{Z} & d+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a'+p^m\mathbf{Z} & b'+p^n\mathbf{Z} \\ c'+p^n\mathbf{Z} & d'+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} aa'+p^{m-n}bc'+p^m\mathbf{Z} & ab'+bd'+p^n\mathbf{Z} \\ ca'+dc'+p^n\mathbf{Z} & p^{m-n}cb'+dd'+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}.$$

It is known [2–5] that the matrix $A=\begin{pmatrix} a+p^m\mathbf{Z} & b+p^n\mathbf{Z} \\ c+p^n\mathbf{Z} & d+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}\in K$ is nilpotent (invertible) if and only if p divides (does not divide) a and d.

In [1] it was shown that A is a nontrivial idempotent in K if and only if A has the form

$$\begin{pmatrix} 1-\sigma+p^m\mathbf{Z} & b+p^n\mathbf{Z} \\ c+p^n\mathbf{Z} & \sigma+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} \sigma+p^m\mathbf{Z} & b+p^n\mathbf{Z} \\ c+p^n\mathbf{Z} & 1-\sigma+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix},$$

where $b,\ c\in\mathbf{Z}$, $\sigma=\sum_{k=1}^{\nu+1} C_k(p^{m-n}bc)^k$, $\nu=\left[\dfrac{n-1}{m-n}\right]$ and C_i are Catalan numbers. For every $i>0$ we define the ith Catalan number by $C_i=\dfrac{1}{i}\dbinom{2i-2}{i-1}=\dfrac{(2i-2)!}{i!(i-1)!}$, so $C_1=1$, $C_2=1$, $C_3=2$, $C_4=5$, $C_5=14$, etc.

Let us call a non-trivial idempotent matrix with an invertible element in the upper left corner an *idempotent matrix of type* 1. An *idempotent matrix of type* 2 is a non-trivial idempotent matrix with an invertible element in the lower right corner.

Definition 2.1. Idempotent elements e_1 and e_2 of ring R are *conjugate* if there is an invertible element $u\in R$ such that $e_2=ue_1u^{-1}$.

We have obtained the following results.

Theorem 2.3. In the formal matrix ring K every idempotent matrix of type 1 is conjugate to the matrix $E_{11}=\begin{pmatrix} 1+p^m\mathbf{Z} & 0+p^n\mathbf{Z} \\ 0+p^n\mathbf{Z} & 0+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}$. Likewise, every idempotent matrix of type 2 is conjugate to the matrix $E_{22}=\begin{pmatrix} 0+p^m\mathbf{Z} & 0+p^n\mathbf{Z} \\ 0+p^n\mathbf{Z} & 1+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}$.

Corollary 2.4. In the formal matrix ring K two idempotent matrices of different types are never conjugate.

Corollary 2.6. In the formal matrix ring K any two idempotent matrices of the same type are conjugate.

Keywords: formal matrix ring, idempotent formal matrix, conjugate idempotents

Acknowledgments: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russia, agreement No. 075-02-2025-1728/2.

For citation: Zykov A.E., Koroleva A.M., Norbosambuev T.D. (2025) Conjugate idempotent formal matrices of order 2 over residue class rings. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 95. pp. 19–27. doi: 10.17223/19988621/95/2

1. Введение

Через $U(R)$ будем обозначать группу обратимых элементов кольца R, через $\mathbf{Z}$ – кольцо (и группу) целых чисел, через $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ – кольцо (и группу) вычетов по модулю p^n, символ ■ означает окончание доказательства или его отсутствие.

В недавних работах [1–5] рассматривались кольца формальных матриц второго порядка над кольцами вычетов

$$K=\begin{pmatrix}\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}\\ \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} & \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}a+p^m\mathbf{Z} & b+p^n\mathbf{Z}\\ c+p^n\mathbf{Z} & d+p^n\mathbf{Z}\end{pmatrix}\ \middle|\ a,b,c,d\in\mathbf{Z}\right\},$$

где p – простое число, m и n – натуральные числа, $m > n > 0$. Умножение в кольце K устроено следующим образом: для любых $A, A' \in K$

$$AA'=\begin{pmatrix}a+p^m\mathbf{Z} & b+p^n\mathbf{Z}\\ c+p^n\mathbf{Z} & d+p^n\mathbf{Z}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a'+p^m\mathbf{Z} & b'+p^n\mathbf{Z}\\ c'+p^n\mathbf{Z} & d'+p^n\mathbf{Z}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}aa'+p^{m-n}bc'+p^m\mathbf{Z} & ab'+bd'+p^n\mathbf{Z}\\ ca'+dc'+p^n\mathbf{Z} & p^{m-n}cb'+dd'+p^n\mathbf{Z}\end{pmatrix};$$

сложение – поэлементное. Единичным элементом в K служит матрица $E=\begin{pmatrix}1+p^m\mathbf{Z} & 0+p^n\mathbf{Z}\\ 0+p^n\mathbf{Z} & 1+p^n\mathbf{Z}\end{pmatrix}$. Больше о произвольных формальных матрицах см.: [5–8].

Следующие две теоремы дают полное описание обратимых и нильпотентных формальных матриц в K.

Теорема 1.1 [4–6]. Матрица $A=\begin{pmatrix}a+p^m\mathbf{Z} & b+p^n\mathbf{Z}\\ c+p^n\mathbf{Z} & d+p^n\mathbf{Z}\end{pmatrix}\in K$ обратима тогда и только тогда, когда числа a и d не кратны p. ■

Теорема 1.2 [2]. Матрица $A=\begin{pmatrix}a+p^m\mathbf{Z} & b+p^n\mathbf{Z}\\ c+p^n\mathbf{Z} & d+p^n\mathbf{Z}\end{pmatrix}\in K$ нильпотентна тогда и только тогда, когда числа a и d кратны p. ■

Следствие 1.3 [2]. Нильпотентные формальные матрицы образуют идеал в K. ■

Напомним, что элемент кольца называется k-ниль-чистым, если он может быть записан в виде суммы одного нильпотентного и k идемпотентных элементов кольца, где k – натуральное число. Кольцо называется k-ниль-чистым, если все его элементы k-ниль-чистые.

Предложение 1.4 [2]. Кольцо K является $(p-1)$-ниль-чистым кольцом. ■

Числами Каталана мы называем последовательность чисел: $C_1 = 1$, $C_{k+1}=\sum_{i=1}^{k}C_iC_{k-i+1}$, где k – натуральное, $k > 0$. Таким образом, $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, $C_3 = 2$, $C_4 = 5$, $C_5 = 14$, $C_6 = 42$, $C_7 = 132$ и т.д. Заметим, что числа Каталана часто нумеруют начиная с 0, т.е. $C_0 = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 5$, $C_4 = 14$ и т.д. Также числа Каталана можно выразить через биномиальные коэффициенты, для всякого целого $k > 0$ верно

$$C_k=\frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1}=\frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!}.$$

Эти числа названы в честь бельгийского математика Эжена Шарля Каталана (1814–1894), хотя были известны и ранее. Эйлер определял данную последовательность как число способов триангуляции выпуклого (n + 1)-угольника проведением непересекающихся диагоналей. К удивлению, впервые «числа Каталана» появляются в 1730-х гг. в работах монгольского астронома и математика Мингату (ок. 1692–1763), служившего при дворе императоров династии Цин [9–12]. Один из его результатов:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{4^{n-1}}\sin^{2n+1}\alpha,$$

где C_n – числа Каталана. Долгое время о работах Мингату (иногда на китайский манер пишут Мин Аньту) не было известно. Его книга «Быстрые методы для точных значений сегментов круга» была впервые опубликована лишь в 1839 г., а связь с числами Каталана заметил китайский математик Ло Цзяньцзинь только в 1988 г. Для более подробного ознакомления с историей открытий чисел Каталана отсылаем к работам [9–12].

В следующей теореме числа Каталана возникают в связи с идемпотентностью в кольце формальных матриц K.

Теорема 1.5 [1]. Матрица A – нетривиальный идемпотент в K тогда и только тогда, когда она имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1-\sigma_{\nu+1}+p^m\mathbf{Z} & b+p^n\mathbf{Z} \\ c+p^n\mathbf{Z} & \sigma_\nu+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} \sigma_{\nu+1}+p^m\mathbf{Z} & b+p^n\mathbf{Z} \\ c+p^n\mathbf{Z} & 1-\sigma_\nu+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix},$$

где $b, c \in \mathbf{Z}$, $\nu = \left[\frac{n-1}{m-n}\right]$, $\sigma_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} C_k(p^{m-n}bc)^k$, C_i – числа Каталана. ■

Замечание 1.6. Индекс ν в формулировке предыдущей теоремы может оказаться равным нулю, если $m \geq 2n$, тогда полагаем $\sigma_\nu = 0$. В таком случае общий вид нетривиальной идемпотентной матрицы A несколько упрощается:

$$A = \begin{pmatrix} 1-p^{m-n}bc+p^m\mathbf{Z} & b+p^n\mathbf{Z} \\ c+p^n\mathbf{Z} & 0+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \text{ или } A = \begin{pmatrix} p^{m-n}bc+p^m\mathbf{Z} & b+p^n\mathbf{Z} \\ c+p^n\mathbf{Z} & 1+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix},$$

где $b, c \in \mathbf{Z}$.

Определение 1.7. Нетривиальную идемпотентную матрицу с обратимым элементом в верхнем левом углу будем называть идемпотентной матрицей первого типа, а идемпотентной матрицей второго типа будем называть нетривиальную идемпотентную матрицу с обратимым элементом в нижнем правом углу.

Замечание 1.8. Для любых целых b и c верно $\sigma_{\nu+1} \equiv \sigma_\nu \pmod{p^n}$. Обозначим $\sigma_{\nu+1} = \sigma$. Тогда нетривиальные идемпотентные матрицы в K можно записывать как

$$A = \begin{pmatrix} 1-\sigma+p^m\mathbf{Z} & b+p^n\mathbf{Z} \\ c+p^n\mathbf{Z} & \sigma+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \text{ или } A = \begin{pmatrix} \sigma+p^m\mathbf{Z} & b+p^n\mathbf{Z} \\ c+p^n\mathbf{Z} & 1-\sigma+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}.$$

Предложение 1.9 [1]. Если $k < p - 1$, то кольцо K не будет k-ниль-чистым. ■

Формальные матрицы интересны и сами по себе, и как возможная алгебраическая платформа для создания некоммутативного протокола шифрования данных; см. литературу, упоминаемую в [3].

2. Основные результаты

Определение 2.1. Говорим, что идемпотенты e_1 и e_2 кольца R сопряженные, если существует элемент $u \in U(R)$ такой, что $e_2 = ue_1u^{-1}$.

Как и в случае колец обычных матриц, матричными единицами E_{11} и E_{22} в K называем формальные матрицы

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1+p^m\mathbf{Z} & 0+p^n\mathbf{Z} \\ 0+p^n\mathbf{Z} & 0+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix},\ E_{22} = \begin{pmatrix} 0+p^m\mathbf{Z} & 0+p^n\mathbf{Z} \\ 0+p^n\mathbf{Z} & 1+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}.$$

Предложение 2.2. Не существует обратимой матрицы $U \in U(K)$ такой, что $UE_{11}U^{-1} = E_{22}$.

Доказательство. Это действительно так, поскольку матрица E_{11} как элемент аддитивной группы $(K, +)$ имеет порядок p^m, а E_{22} – порядок p^n. ■

Возникает вопрос: будут ли сопряженными две произвольные идемпотентные матрицы одного и того же типа? Положительный ответ на него был получен авторами во время работы «Большой математической мастерской 2024» в Томском государственном университете.

Теорема 2.3. Всякая идемпотентная формальная матрица первого типа является сопряженной с матричной единицей E_{11}, а всякая идемпотентная формальная матрица второго типа – с матричной единицей E_{22}.

Доказательство. Произвольная идемпотентная формальная матрица первого типа из кольца K имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 1-\sigma+p^m\mathbf{Z} & b+p^n\mathbf{Z} \\ c+p^n\mathbf{Z} & \sigma+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}$, где $b, c \in \mathbf{Z}$. Для нее выполнено равенство $(1 - \sigma)^2 + p^{m-n}bc + p^m\mathbf{Z} = 1 - \sigma + p^m\mathbf{Z}$, из которого можем вывести

$$(1-\sigma)\sigma + p^m\mathbf{Z} = p^{m-n}bc + p^m\mathbf{Z}. \tag{1}$$

Заметим, что $(1 - \sigma + p^n\mathbf{Z})^{-1} = 1 + \sigma + \sigma^2 + \ldots + \sigma^\nu + p^n\mathbf{Z}$. Обозначим $S = 1 + \sigma + \sigma^2 + \ldots + \sigma^\nu$. Рассмотрим матрицы

$$U = \begin{pmatrix} 1+p^m\mathbf{Z} & bS+p^n\mathbf{Z} \\ -c+p^n\mathbf{Z} & 1-\sigma+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} \text{ и } \hat{U} = \begin{pmatrix} 1-\sigma+p^m\mathbf{Z} & -bS+p^n\mathbf{Z} \\ c+p^n\mathbf{Z} & 1+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}.$$

Покажем, что $U\hat{U} = E$. В самом деле,

$$U\hat{U} = \begin{pmatrix} 1-\sigma+p^{m-n}bcS+p^m\mathbf{Z} & -bS+bS+p^n\mathbf{Z} \\ -c(1-\sigma)+(1-\sigma)c+p^n\mathbf{Z} & 1-\sigma+p^{m-n}bcS+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\sigma+p^{m-n}bcS+p^m\mathbf{Z} & 0+p^n\mathbf{Z} \\ 0+p^n\mathbf{Z} & 1-\sigma+p^{m-n}bcS+p^n\mathbf{Z} \end{pmatrix}.$$

Докажем равенство $\sigma - p^{m-n}bcS + p^m\mathbf{Z} = 0 + p^m\mathbf{Z}$. Используя (1), получим цепочку равенств:

$$\sigma - p^{m-n}bcS + p^m\mathbf{Z} = \sigma - \sigma(1-\sigma)(1 + \sigma + \sigma^2 + \ldots + \sigma^\nu) + p^m\mathbf{Z} =$$
$$= \sigma(1 - (1-\sigma)(1 + \sigma + \sigma^2 + \ldots + \sigma^\nu)) + p^m\mathbf{Z} =$$
$$= \sigma(1 - 1 - \sigma - \sigma^2 - \ldots - \sigma^\nu + \sigma + \sigma^2 + \ldots + \sigma^\nu + \sigma^{\nu+1}) + p^m\mathbf{Z} =$$
$$= \sigma\cdot\sigma^{\nu+1} + p^m\mathbf{Z} = \sigma^{\nu+2} + p^m\mathbf{Z}.$$

В выражении $\sigma^{\nu+2}=\left(\sum_{k=1}^{\nu+1} C_k\,(p^{m-n}bc)^k\right)^{\nu+2}$ после раскрытия скобок все слагаемые содержат p хотя бы в степени $(m-n)(\nu+2)$, а это число не меньше m. Значит, $\sigma^{\nu+2}+p^m\mathbf{Z}=0+p^m\mathbf{Z}$, что и требовалось. Из доказанного равенства также следует, что $\sigma-p^{m-n}bcS+p^n\mathbf{Z}=0+p^n\mathbf{Z}$. Итак, действительно

$$U\hat{U}=\begin{pmatrix}1+p^m\mathbf{Z} & 0+p^n\mathbf{Z}\\ 0+p^n\mathbf{Z} & 1+p^n\mathbf{Z}\end{pmatrix}=E\,.$$

Заметим, что в конечном кольце односторонний обратный элемент является также двусторонним обратным, поэтому $U^{-1}=\hat{U}$. Далее рассмотрим произведение

$$UA=\begin{pmatrix}1+p^m\mathbf{Z} & bS+p^n\mathbf{Z}\\ -c+p^n\mathbf{Z} & 1-\sigma+p^n\mathbf{Z}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1-\sigma+p^m\mathbf{Z} & b+p^n\mathbf{Z}\\ c+p^n\mathbf{Z} & \sigma+p^n\mathbf{Z}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1-\sigma+p^{m-n}bcS+p^m\mathbf{Z} & b+bS\sigma+p^n\mathbf{Z}\\ -c(1-\sigma)+(1-\sigma)c+p^n\mathbf{Z} & (1-\sigma)\sigma-p^{m-n}bc+p^n\mathbf{Z}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1+p^m\mathbf{Z} & b+bS\sigma+p^n\mathbf{Z}\\ 0+p^n\mathbf{Z} & 0+p^n\mathbf{Z}\end{pmatrix}.$$

Умножим теперь получившуюся матрицу на U^{-1} справа:

$$UAU^{-1}=\begin{pmatrix}1+p^m\mathbf{Z} & b+bS\sigma+p^n\mathbf{Z}\\ 0+p^n\mathbf{Z} & 0+p^n\mathbf{Z}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1-\sigma+p^m\mathbf{Z} & -bS+p^n\mathbf{Z}\\ c+p^n\mathbf{Z} & 1+p^n\mathbf{Z}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1-\sigma+p^{m-n}bc(1+S\sigma)+p^m\mathbf{Z} & b(1+S\sigma-S)+p^n\mathbf{Z}\\ 0+p^n\mathbf{Z} & 0+p^n\mathbf{Z}\end{pmatrix}.$$

В силу равенства (1) верна цепочка равенств:

$$\sigma-p^{m-n}bc(1+S\sigma)+p^m\mathbf{Z}=\sigma-(\sigma-\sigma^2)(1+S\sigma)+p^m\mathbf{Z}=$$
$$=\sigma-(\sigma-\sigma^2+S\sigma^2-S\sigma^3)+p^m\mathbf{Z}=\sigma^2(S\sigma-S+1)+p^m\mathbf{Z}=$$
$$=\sigma^2(\sigma+\sigma^2+\ldots+\sigma^\nu+\sigma^{\nu+1}-1-\sigma-\sigma^2-\ldots-\sigma^\nu+1)+p^m\mathbf{Z}=$$
$$=\sigma^2\sigma^{\nu+1}+p^m\mathbf{Z}=\sigma^{\nu+3}+p^m\mathbf{Z}.$$

Мы уже доказали, что $\sigma^{\nu+2}+p^m\mathbf{Z}=0+p^m\mathbf{Z}$, следовательно, $\sigma^{\nu+3}+p^m\mathbf{Z}=0+p^m\mathbf{Z}$.

Наконец, $b(1+S\sigma-S)+p^n\mathbf{Z}=bS(1-\sigma+\sigma-1)+p^n\mathbf{Z}=0+p^n\mathbf{Z}$. Таким образом, мы показали, что

$$UAU^{-1}=\begin{pmatrix}1+p^m\mathbf{Z} & 0+p^n\mathbf{Z}\\ 0+p^n\mathbf{Z} & 0+p^n\mathbf{Z}\end{pmatrix}=E_{11}.$$

Далее, пусть B – идемпотентная матрица второго типа, тогда $E-B$ есть идемпотентная матрица первого типа. Нами доказано, что найдется обратимая матрица U такая, что $U(E-B)U^{-1}=E_{11}$. Отсюда следует, что $UBU^{-1}=E_{22}$. ■

Следствие 2.4. Идемпотентные матрицы разных типов не могут быть сопряженными. ■

Замечание 2.5. Обратимые матрицы U и U^{-1}, полученные в предыдущей теореме, не единственные с тем свойством, что UBU^{-1} – матричная единица.

Пусть, например, $p = 3$, $m = 2$, $n = 1$ и $B = \begin{pmatrix} 3+9\mathbf{Z} & 1+3\mathbf{Z} \\ 1+3\mathbf{Z} & 1+3\mathbf{Z} \end{pmatrix}$ – идемпотентная матрица второго типа, тогда, согласно теореме 2.3,

$$UBU^{-1} = \begin{pmatrix} 1+9\mathbf{Z} & 2+3\mathbf{Z} \\ 1+3\mathbf{Z} & 1+3\mathbf{Z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3+9\mathbf{Z} & 1+3\mathbf{Z} \\ 1+3\mathbf{Z} & 1+3\mathbf{Z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7+9\mathbf{Z} & 1+3\mathbf{Z} \\ 2+3\mathbf{Z} & 1+3\mathbf{Z} \end{pmatrix} = E_{22}.$$

Однако, кроме того, на роль матрицы U подойдут еще следующие обратимые матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1+9\mathbf{Z} & 2+3\mathbf{Z} \\ 2+3\mathbf{Z} & 2+3\mathbf{Z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2+9\mathbf{Z} & 1+3\mathbf{Z} \\ 1+3\mathbf{Z} & 1+3\mathbf{Z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2+9\mathbf{Z} & 1+3\mathbf{Z} \\ 2+3\mathbf{Z} & 2+3\mathbf{Z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4+9\mathbf{Z} & 2+3\mathbf{Z} \\ 1+3\mathbf{Z} & 1+3\mathbf{Z} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 4+9\mathbf{Z} & 2+3\mathbf{Z} \\ 2+3\mathbf{Z} & 2+3\mathbf{Z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5+9\mathbf{Z} & 1+3\mathbf{Z} \\ 1+3\mathbf{Z} & 1+3\mathbf{Z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5+9\mathbf{Z} & 1+3\mathbf{Z} \\ 2+3\mathbf{Z} & 2+3\mathbf{Z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7+9\mathbf{Z} & 2+3\mathbf{Z} \\ 1+3\mathbf{Z} & 1+3\mathbf{Z} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 7+9\mathbf{Z} & 2+3\mathbf{Z} \\ 2+3\mathbf{Z} & 2+3\mathbf{Z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8+9\mathbf{Z} & 1+3\mathbf{Z} \\ 1+3\mathbf{Z} & 1+3\mathbf{Z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8+9\mathbf{Z} & 1+3\mathbf{Z} \\ 2+3\mathbf{Z} & 2+3\mathbf{Z} \end{pmatrix}.$$

Следствие 2.6. Для любых идемпотентных матриц одного типа $I, J \in K$ найдется матрица $W \in U(K)$ такая, что $I = WJW^{-1}$. ■

Следствие 2.7. Относительно сопряженности множество идемпотентов кольца распадается на классы: $\overline{E}_{11}$ – идемпотентные матрицы первого типа, $\overline{E}_{22}$ – идемпотентные матрицы второго типа, особняком стоят тривиальные идемпотенты E и 0. ■

Список источников

1. *Королева А.М., Норбосамбуев Ц.Д., Подкорытов М.В.* Идемпотентные и ниль-чистые формальные матрицы второго порядка над кольцами вычетов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 93. С. 30–40. doi: 10.17223/19988621/93/3
2. *Елфимова А.М., Норбосамбуев Ц.Д., Подкорытов М.В.* Нильпотентные, ниль-хорошие и ниль-чистые формальные матрицы над кольцами вычетов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. № 91. С. 31–40. doi: 10.17223/19988621/91/3
3. *Норбосамбуев Ц.Д.* Хорошие кольца формальных матриц над кольцами вычетов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 85. С. 32–42. doi: 10.17223/19988621/85/3
4. *Степанова А.Ю., Тимошенко Е.А.* Матричное представление эндоморфизмов примарных групп малых рангов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 74. С. 30–42. doi: 10.17223/19988621/74/4
5. *Крылов П.А., Туганбаев А.А.* Кольца формальных матриц и модули над ними. М.: МЦНМО, 2017.
6. *Крылов П.А.* Определители обобщенных матриц порядка 2 // Фундаментальная и прикладная математика. 2015. № 5 (20). С. 95–112.
7. *Morita K.* Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition // Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku. Sect. A. 1958. V. 6. P. 83–142.
8. *Loustaunau P., Shapiro J.* Morita contexts // Non-Commutative Ring Theory. Springer, 1990. P. 80–92. doi: 10.1007/BFb0091253 (Lecture Notes in Mathematics; v. 1448).
9. *Larcombe P.J.* The 18th century Chinese discovery of the Catalan numbers // Math. Spectrum. 1999/2000. V. 32. P. 5–7.

10. *Larcombe P.J., Wilson P.D.C.* On the trail of the Catalan sequence // Math. Today. 1998. V. 4 (34). P. 114–117.
11. *Stanley R.P.* Catalan Numbers. Cambridge University Press, 2015.
12. *Luo J*. Ming Antu and his power series expansions // Seki, founder of modern mathematics in Japan. Tokyo: Springer, 2013. P. 299–310. doi: 10.1007/978-4-431-54273-5_20 (Springer Proceedings in Mathematics & Statistics; v. 39).

References

1. Koroleva A.M., Norbosambuev T.D., Podkorytov M.V. (2025) Idempotentnyye i nil'-chistyye formal'nyye matritsy vtorogo poryadka nad kol'tsami vychetov [Idempotent and nil-clean formal matrices of order 2 over residue class rings]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 93. pp. 30–40. DOI: 10.17223/19988621/93/3.
2. Elfimova A.M., Norbosambuev T.D., Podkorytov M.V. (2024) Nil'potentnyye, nil'-khoroshiye i nil'-chistyye formal'nyye matritsy nad kol'tsami vychetov [Nilpotent, nil-good, and nil-clean formal matrices over residue class rings] // *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 91. pp. 31–40. DOI: 10.17223/19988621/91/3.
3. Norbosambuev T.D. (2023) Khoroshiye kol'tsa formal'nykh matrits nad kol'tsami vychetov [Good formal matrix rings over residue class rings]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 85. pp. 32–42. DOI: 10.17223/19988621/85/3.
4. Stepanova A.Yu., Timoshenko E.A. (2021) Matrichnoye predstavleniye endomorfizmov primarnykh grupp malykh rangov [Matrix representation of endomorphisms of primary groups of small ranks]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 74. pp. 30–42. DOI: 10.17223/19988621/74/4.
5. Krylov P., Tuganbaev A. (2017) *Formal Matrices* (Algebra and Applications, Vol. 23). Springer. DOI: 10.1007/978-3-319-53907-2.
6. Krylov P.A. (2018) Determinants of generalized matrices of order 2. *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*). 230(3). pp. 414–427. DOI: 10.1007/s10958-018-3748-6.
7. Morita K. (1958) Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition. *Science Reports of Tokyo Kyoiku Daigaku, Section A*. 6. pp. 83–142.
8. Loustaunau P., Shapiro J. (1990) Morita Contexts. *Non-Commutative Ring Theory* (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1448). Springer. pp. 80–92. DOI: 10.1007/BFb0091253.
9. Larcombe P.J. (1999/2000) The 18th century Chinese discovery of the Catalan numbers. *Mathematical Spectrum*. 32(1). pp. 5–7.
10. Larcombe P.J., Wilson P.D.C. (1998) On the trail of the Catalan sequence. *Mathematics Today*. 34(4). pp. 114–117.
11. Stanley R.P. (2015) *Catalan Numbers*. Cambridge University Press.
12. Luo J. (2013) Ming Antu and his power series expansions. *Seki, Founder of Modern Mathematics in Japan* (Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Vol. 39). Tokyo: Springer. pp. 299–310. DOI: 10.1007/978-4-431-54273-5_20.

***Сведения об авторах*:**
Зыков Артем Евгеньевич – студент механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: tigerlroe92@gmail.com
Королева Анастасия Максимовна – аспирант механико-математического факультета Томского государственного университета, ассистент кафедры общей математики механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: elfimova.nastya@bk.ru

Норбосамбуев Цырендоржи Дашацыренович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, доцент кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: nstsddts@yandex.ru

***Information about the authors*:**
Zykov Artem E. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tigerlroe92 @gmail.com
Koroleva Anastasia M. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: elfimova.nastya@bk.ru
Norbosambuev Tsyrendorzhi D. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: nstsddts@yandex.ru

The article was submitted 16.03.2025; accepted for publication 09.06.2025

Статья поступила в редакцию 16.03.2025; принята к публикации 09.06.2025