ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2025 Математика и механика № 95
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Научная статья
УДК 517.54 MSC: 30C20, 30C30
doi: 10.17223/19988621/95/3

Управляющая функция уравнения Левнера, генерирующая касательный разрез, выходящий из угла двуугольника

Махер Кармуши[1], Иван Александрович Колесников[2], Юлия Анатольевна Лобода[3]

[1, 2, 3] *Томский государственный университет, Томск, Россия*
[1] *maherkarmoushi1996@gmail.com*
[2] *ia.kolesnikov@mail.ru*
[3] *ysenchurova@yandex.ru*

Аннотация. Строится семейство отображений $f = f(z,\tau)$, $\tau \in [0,\tau_0]$. При фиксированном τ отображение f переводит полуплоскость на двуугольник с разрезом (длина разреза зависит от параметра τ) вдоль дуги окружности γ, начинающейся в вершине двуугольника и касательной к одной из его сторон. Получено разложение управляющей функции λ(τ) уравнения Лёвнера в точке τ = 0, генерирующей такое семейство областей. Сформулирована гипотеза о поведении управляющей функции, генерирующей разрез, выходящий из угла некоторой односвязной области вдоль дуги окружности. Гипотеза проверена на одном частном случае.
Ключевые слова: дифференциальное уравнение Левнера, конформное отображение, интеграл Кристоффеля–Шварца, акцессорные параметры

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2025-1728/2).

Для цитирования: Кармуши М., Колесников И.А., Лобода Ю.А. Управляющая функция уравнения Левнера, генерирующая касательный разрез, выходящий из угла двуугольника // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 95. С. 28–37. doi: 10.17223/19988621/95/3

Original article

The driving function of the Loewner equation generating a tangential slit emanating from the corner of a digon

Maher Karmushi[1], Ivan A. Kolesnikov[2], Yulia A. Loboda[3]

[1, 2, 3] *Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*
[1] *maherkarmoushi1996@gmail.com*
[2] *ia.kolesnikov@mail.ru*
[3] *ysenchurova@yandex.ru*

Abstract. The driving function λ of the Loewner equation that generates a non-tangential slit is Hölder continuous with exponent 1/2. For a tangential slit emanating from a corner, the behavior of the driving function λ(τ) in a neighborhood of τ = 0 depends on the tangency order of the slit and on the angle of the corner. In this paper we investigate a family of mappings $f = f(z,\tau)$, $\tau \in [0,T]$. For a fixed τ, the mapping *f* takes the half-plane onto a digon with a slit (the length of the slit depends on τ) along a circular arc emanating tangentially from a vertex of the digon with an angle απ. We obtain the form of the expansion of the driving function λ at the point τ = 0, which generates the slit in the digon. We construct a mapping of the half-plane onto a triangle with tangential slit emanating from a corner of the triangle, assuming that the driving function has the same form as for the digon. We propose the following conjecture: if λ generates in a simply connected domain *D* a slit along a circular arc emanating tangentially from a corner with an interior angle απ, then the function λ expands into the series $\lambda(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \tau^{\frac{1+k\alpha}{2+\alpha}}$, $\lambda_0 \neq 0$.

Keywords: the Loewner differential equation, conformal mapping, the Schwarz–Christoffel integral, accessory parameters

Acknowledgments: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russia (agreement No. 075-02-2025-1728/2).

For citation: Karmushi, M., Kolesnikov, I.A., Loboda, Yu.A. (2025) The driving function of the Loewner equation generating a tangential slit emanating from the corner of a digon. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 95. pp. 28–37. doi: 10.17223/19988621/95/3

Введение

Пусть $\gamma = \gamma(\tau)$, $\tau \in [0, \tau_0]$, – простая кривая. Кривая $\gamma(\tau)$ при $\tau \in (0, \tau_0]$ находится в верхней полуплоскости $\Pi^+ = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w > 0\}$, $\gamma(0) \in \mathbb{R}$. Согласно теореме Римана, для фиксированного τ существует конформное отображение $w = f(z,\tau)$, переводящее верхнюю полуплоскость Π^+ на область $\Pi^+ \setminus \gamma[0, \tau_0]$. Можно потребовать, чтобы отображение *f* имело на бесконечности разложение

$$f(z,\tau) = z - \frac{c(\tau)}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right). \tag{1}$$

Здесь $c(\tau)$ – возрастающая функция. Можно выбрать такую параметризацию кривой γ, при которой $c(\tau) = \tau$. Такую параметризацию называют стандартной.

Отображение $f = f(z,\tau)$, удовлетворяющее условию (1) с $c(\tau) = \tau$, удовлетворяет уравнению Левнера

$$\frac{\partial f(z,\tau)}{\partial \tau} + \frac{1}{z - \lambda(\tau)} \frac{\partial f(z,\tau)}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

с начальным условием $f(z,0) = z$. Здесь $\lambda(\tau)$ – прообраз точки $\gamma(\tau)$ при отображении *f*. Функция $\lambda(\tau)$ непрерывная и вещественнозначная. Уравнение (2) имеет место, если вместо $\Pi^+ \setminus \gamma[0, \tau_0]$ взять односвязную область *D* с исключенной кривой γ, начинающейся на границе, и отображения семейства *f* нормировать таким образом, что композиция $\omega(z,\tau) = f^{-1}\left(f(z,\tau),0\right)$ раскладывается на бесконечности в ряд $\omega(z,\tau) = z - \frac{\tau}{z} + \frac{c_2(\tau)}{z^2} + \ldots$

С другой стороны, уравнение Левнера (2) имеет решение *f* для всякой непрерывной вещественнозначной функции $\lambda(\tau)$. Функцию $\lambda(\tau)$ называют управляющей функцией уравнения Левнера. Это решение $f = f(z,\tau)$ порождает семейство вложенных областей $\Delta(\tau)$. Известно, что для непрерывной функции $\lambda(\tau)$ семейство $\Delta(\tau)$ не всегда представляет собой плоскость с разрезом.

К. Левнер разработал параметрический метод, изучая семейство конформных отображений единичного круга на плоскость с разрезом [1]. Он исследовал знаменитую гипотезу Бибербаха об оценке коэффициентов конформных в единичном круге отображений. Позднее эту гипотезу удалось доказать с помощью параметрического метода Л. де Бранжу. В последнее время область применений параметрического метода расширилась. Возрос интерес к исследованию взаимосвязи между геометрией разреза γ и поведением управляющей функции $\lambda(\tau)$.

В работах [2, 3] показано, что если γ – разрез, не касательный к границе, то управляющая функция $\lambda(\tau)$ удовлетворяет условию Гёльдера $\left|\lambda(\tau)-\lambda(\sigma)\right| \le C\left|\tau-\sigma\right|^{\frac{1}{2}}$, $\forall\ \tau,\sigma \in [0,\tau_0]$. Напротив, если управляющая функция $\lambda(\tau)$ непрерывна по Гёльдеру с показателем 1/2 и $C < 4$, то γ является разрезом (не касательным к границе).

Для касательного разреза поведение управляющей функции отличается. В работе [4] показано, что разрез вдоль дуги окружности

$$\Gamma(\tau) = \left\{ w \in \mathbb{C} : w = i + e^{is(\tau)} : -\frac{\pi}{2} \le s(\tau) \le \frac{\pi}{2} \right\},\ s(0) = -\frac{\pi}{2}, \tag{3}$$

генерируется управляющей функцией $\lambda(\tau)$, непрерывной по Гёльдеру с показателем 1/3: $\lambda(\tau) = C\tau^{\frac{1}{3}} + o\left(\tau^{\frac{1}{3}}\right)$, $C > 0$, $\tau > 0$. В случае касательного разреза на поведение управляющей функции влияет порядок касания. Так, кривая $\Gamma^p(\tau) = \left\{ \xi \in \mathbb{C} : \xi = w^p, w = i + e^{is(\tau)} : -\frac{\pi}{2} \le s(\tau) \le \frac{\pi}{2} \right\}$, $s(0) = -\frac{\pi}{2}$, имеющая касание порядка $(p+1)/p$ к вещественной оси, генерируется [5] управляющей функцией, имеющей разложение

$$\lambda(\tau) = C\tau^{\frac{p}{2p+1}} + o\left(\tau^{\frac{p}{2p+1}}\right),\ C > 0. \tag{4}$$

В работах [4, 5] рассматривается касательный разрез в верхней полуплоскости, т.е. разрез образует углы 0 и π (сопряженный угол) к вещественной оси. Покажем, что сопряженный угол также влияет на поведение управляющей функции.

Теорема 1 [6]. *Пусть* $D_\alpha(\tau)=\{w:0<\arg w<\alpha\pi\}\setminus\Gamma(\tau)$, $\alpha\in(0,2\pi]$, *– семейство двуугольников с разрезом переменной длины вдоль дуги окружности* $\Gamma(\tau)$, *определенной формулой* (3). *Кривая* $\Gamma(\tau)$ *генерируется в секторе* $\{w:0<\arg w<\alpha\pi\}$ *управляющей функцией* $\lambda(\tau)$, *имеющей разложение*

$$\lambda(\tau)=C\tau^{\frac{1}{2+\alpha}}+o\left(\tau^{\frac{1}{2+\alpha}}\right),\quad \tau>0. \tag{5}$$

Доказательство. Композиция $\omega:\Pi^+\to\Pi^+\setminus\Gamma^{\frac{1}{\alpha}}$, $\omega(f(z,\tau)):=(f(z,\tau))^{\frac{1}{\alpha}}$, удовлетворяет уравнению Левнера (2) с начальным условием $\omega(z,0)=z$. Согласно [5] управляющая функция $\lambda(\tau)$, генерирующая $\omega(z,\tau)$, для малых τ имеет вид (4) с $p=1/\alpha$, но $\lambda(\tau)$ также является управляющей функцией для отображения *f*.

Заметим, что исследование управляющей функции $\lambda(\tau)$, генерирующей семейство областей $D_\alpha(\tau)$, эквивалентно исследованию управляющей функции $\lambda(\tau)$, соответствующей семейству областей

$$\Delta_\alpha(\tau)=\{w:(1-\alpha)\pi<\arg w<\pi\}\setminus\{w:\operatorname{Im}w=h,\operatorname{Re}w\le\tau\},$$

так как семейство $D_\alpha(\tau)$ можно отобразить на $\Delta_\alpha(\tau)$ с помощью дробно-линейного отображения.

В данной статье строится семейство отображений $f:\Pi^+\to\Delta_\alpha(\tau)$ верхней полуплоскости на двуугольник с разрезом, выходящим по касательной из угла двуугольника раствором $\alpha\pi\ne0$. Для такого семейства областей найдены управляющая функция $\lambda(\tau)$ и ее разложение для $\tau>0$:

$$\lambda(\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k\tau^{\frac{1+\alpha k}{2+\alpha}},\quad \lambda_0\ne0. \tag{6}$$

Этот результат уточняет теорему 1. В разделе «численный эксперимент» строится семейство отображений полуплоскости на треугольник с разрезом, выходящим по касательной из одного из углов треугольника, в предположении, что управляющая функция имеет вид (6). Случай, когда разрез выпускается из нулевого угла, рассмотрен в работе [7].

Семейство отображений

Рассмотрим семейство областей

$$\Delta_\alpha(t)=\{w:(1-\alpha)\pi<\arg w<\pi\}\setminus\{w:\operatorname{Im}w=h,\operatorname{Re}w\le t\},\ h>0,\ -\infty\le t\le T,$$

где $T<-h\operatorname{ctg}\alpha\pi$, если $0<\alpha<1$, и $T<+\infty$, если $-1\le\alpha\le0$. Концевую точку разреза $t+ih$ обозначим через $\Lambda(t)$.

Найдем семейство отображений $f=f(z,t)$, $f:\Pi^+\times[-\infty,T]\to\Delta_\alpha(t)$. Обозначим прообразы вершин многоугольника $\Delta_\alpha(t)$ через $b(t)$, $\lambda(t)$, $a(t)$ и $c(t)$, где

$f\left(\lambda(t),t\right)=\Lambda(t)$, $b(t)<\lambda(t)<a(t)<c(t)$, $-\infty<t\le T$. Пусть $c(t)=\infty$, $a(-\infty)=$ $=b(-\infty)=\lambda(-\infty)=0$.

Отображение $f=f(z,t)$ при фиксированном *t* переводит верхнюю полуплоскость Π^{+} на многоугольник $\Delta_{\alpha}(t)$ и может быть записано с помощью интеграла Кристоффеля–Шварца в виде:

$$f(z,t)=c_1(t)\int\limits_{\infty}^{z}\frac{\zeta-\lambda(t)}{\left(\zeta-a(t)\right)\left(\zeta-b(t)\right)^{\alpha+1}}d\zeta. \tag{7}$$

Раскладывая отображение f' на бесконечности, получим

$$f'(z,t)=\frac{c_1(t)}{z^{\alpha+1}}\left(1+\frac{a(t)+(1+\alpha)b(t)-\lambda(t)}{z}+\frac{\gamma_2(t)}{z^2}+\ldots\right).$$

Заметим, что для достаточно больших положительных значений *z* $f(z,t)<0$, поэтому $c_1(t)>0$.

Можно нормировать отображения семейства *f*, потребовав, чтобы

$$c_1(t)=A,\ A>0,\ \dot{A}=0, \tag{8}$$

$$a(t)+(1+\alpha)b(t)-\lambda(t)=0. \tag{9}$$

Действительно, всякое отображение $\tilde{f}$ верхней полуплоскости Π^{+} на многоугольник $\Delta_{\alpha}(t)$ такое, что $\tilde{f}(\infty,t)=0$, можно записать как композицию $\tilde{f}(z,t)=f(qz+p,t)$, $q>0$, $p\in\mathbb{R}$. В окрестности бесконечности отображение $\tilde{f}'$ раскладывается в ряд

$$\tilde{f}'(z,t)=\frac{c_1(t)}{q^{\alpha}z^{\alpha+1}}\left(1+\frac{a(t)+(1+\alpha)\left(b(t)-p\right)-\lambda(t)}{qz}+\frac{\gamma_2(t)}{z^2}+\ldots\right).$$

Видим, что можно выбрать *q* и *p* так, чтобы коэффициент при $z^{-\alpha-1}$ равнялся *A* и коэффициент при $z^{-\alpha-2}$ равнялся нулю.

Запишем (7) в виде:

$$f(z,t)=A\int\limits_{\infty}^{z}\frac{1}{\left(\zeta-b(t)\right)^{\alpha+1}}d\zeta+A\left(a(t)-\lambda(t)\right)\int\limits_{\infty}^{z}\frac{1}{\left(\zeta-a(t)\right)\left(\zeta-b(t)\right)^{\alpha+1}}d\zeta.$$

Во втором интеграле выполним замену $\xi=\dfrac{\zeta-z}{z-a(t)}$, получим

$$f(z,t)=A\int\limits_{\infty}^{z}\frac{1}{\left(\zeta-b(t)\right)^{\alpha+1}}d\zeta+A\frac{a(t)-\lambda(t)}{\left(z-b(t)\right)^{\alpha+1}}\int\limits_{\infty}^{0}(\xi+1)^{-1}\left(1+\xi\frac{z-a(t)}{z-b(t)}\right)d\xi.$$

Проинтегрируем, используя [8. С. 72], получим

$$f(z,t)=-\frac{A}{\alpha}\frac{1}{\left(z-b(t)\right)^{\alpha}}-\frac{A}{\alpha+1}\frac{a(t)-\lambda(t)}{\left(z-b(t)\right)^{\alpha+1}}\,{}_2F_1\left(1,1+\alpha;2+\alpha;\frac{a(t)-b(t)}{z-b(t)}\right). \tag{10}$$

Заметим, что $\operatorname{Im}\left(f(a+r)-f(a-r)\right)=h$ и не зависит от r при $0<r<a-\lambda$. Можно записать $f(a+r)-f(a-r)=A\int\limits_{\gamma}\frac{\zeta-\lambda(t)}{\left(\zeta-a(t)\right)\left(\zeta-b(t)\right)^{\alpha+1}}d\zeta$, где γ – верхняя половина окружности, $\gamma(\varphi)=a+re^{i\varphi}$, $\varphi\in[0,\pi]$. Подставим сюда (9), перейдем к переменной φ, получим

$$f(a+r)-f(a-r)=iA\int\limits_{0}^{\pi}g(r,\varphi)\,d\varphi,$$

где $g(r,\varphi)=\frac{re^{i\varphi}-(1+\alpha)b(t)}{\left(re^{i\varphi}+a(t)-b(t)\right)^{\alpha+1}}$ – непрерывная на $[0,r]\times[0,\varphi]$ функция. Перейдем к пределу при $r\to 0$, получим

$$a(t)=b(t)+c\left(-b(t)\right)^{\frac{1}{1+\alpha}},\ b(t)<0 \text{ при } t\in(-\infty,T),\ c=\left((1+\alpha)A\frac{\pi}{h}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}. \quad (11)$$

Из условия $\operatorname{Re} f\left(\lambda(t),t\right)=t$, используя (10), найдем уравнение для параметра b:

$$\frac{1}{(-b)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\left(c-(1+\alpha)(-b)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\right)^{\alpha}}+\frac{\alpha}{\left(c-(1+\alpha)(-b)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\right)^{1+\alpha}}\times$$
$$\times\operatorname{Re}\left({}_2F_1\left(1,1+\alpha;2+\alpha;\frac{c}{c-(1+\alpha)(-b)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}\right)\right)=-\frac{\alpha}{A}t. \quad (12)$$

Перейдем к стандартной параметризации. Семейство $\tilde{f}=\tilde{f}(z,\tau)=f\left(z,t(\tau)\right)$, $\tau=\tau(t)$, $\tau\in[0,\tau_0]$, удовлетворяет уравнению (2), $\tau(-\infty)=0$, и параметр $\tilde{b}(\tau)=b\left(t(\tau)\right)$ удовлетворяет уравнению $\frac{d\tilde{b}(\tau)}{d\tau}=\frac{1}{\tilde{b}(\tau)-\tilde{\lambda}(\tau)}$ [9]. Подставляя сюда (9) и (11), получим $\left((\alpha+1)\tilde{b}(\tau)+c\left(-\tilde{b}(\tau)\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}\right)\frac{d\tilde{b}(\tau)}{d\tau}=-1$. Интегрируя это уравнение с начальным условием $\tilde{b}(0)=0$, получим

$$c\frac{1+\alpha}{2+\alpha}\left(-\tilde{b}(\tau)\right)^{\frac{2+\alpha}{1+\alpha}}-\frac{1+\alpha}{2}\left(\tilde{b}(\tau)\right)^{2}=\tau. \quad (13)$$

Перепишем это равенство в виде $\left(-\tilde{b}(\tau)\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\left(\frac{1+\alpha}{2+\alpha}c-\frac{1+\alpha}{2}\left(-\tilde{b}(\tau)\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}=\tau^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}$.

Введем обозначения $\tau^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}=s$, $\left(-\tilde{b}\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}=x$ и разложим левую часть этого равенства в окрестности точки $x=0$, получим $\gamma x-\frac{\alpha\gamma}{2c}x^2-\frac{\alpha\gamma}{4c^2}x^3-\ldots=s$, $\gamma=\left(c\frac{1+\alpha}{2+\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}$.

Обращая этот ряд, получим $\frac{1}{\gamma}s+\frac{\alpha}{2c\gamma^2}s^2+\frac{\alpha(2\alpha+1)}{4c^2\gamma^3}s^3+\ldots=x.$ Возвращаясь к параметру $\tilde b$, $\tilde b=-x^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}$, используя (9) и (11), получим

$$\tilde\lambda(s)=(2+\alpha)s^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{\alpha}{2c\gamma^2}s+\frac{\alpha(2\alpha+1)}{4c^2\gamma^3}s^2+\ldots\right)\times$$
$$\times\left(\frac{c}{2+\alpha}-\frac{1}{\gamma}s-\frac{\alpha}{2c\gamma^2}s^2-\frac{\alpha(2\alpha+1)}{4c^2\gamma^3}s^3-\ldots\right).$$

Раскладывая правую часть в точке $s=0$ и возвращаясь к параметру τ, получим

$$\tilde\lambda(\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k\tau^{\frac{1+k\alpha}{2+\alpha}},\text{ где }\lambda_0=\left(A(2+\alpha)\frac{\pi}{h}\right)^{\frac{1}{2+\alpha}}. \tag{14}$$

Зависимость $t(\tau)$ можно найти из условия $\operatorname{Re}\tilde f\left(\tilde\lambda(\tau),\tau\right)=t$. Используя (10) и (11), получим

$$\frac{1+\alpha}{\theta(c-\theta)^{\alpha}}+\frac{\alpha}{(c-\theta)^{1+\alpha}}\operatorname{Re}\left({}_2F_1\left(1,1+\alpha;2+\alpha;\frac{c}{c-\theta}\right)\right)=-\frac{\alpha}{A}t, \tag{15}$$

где $\theta=(1+\alpha)\left(-\tilde b(\tau)\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}$, $c=\left((1+\alpha)A\frac{\pi}{h}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}$.

Подытожим результаты в следующей теореме.

Теорема. *Семейство отображений* $\tilde f=\tilde f(z,\tau)=f(z,t(\tau))$, $\tau\in[0,\tau_0]$, *переводящее при фиксированном* τ *верхнюю полуплоскость на область* $\Delta_\alpha(t)=\{w:(1-\alpha)\pi<\arg w<\pi\}\setminus\{w:\operatorname{Im}w=h,\operatorname{Re}w\le t(\tau)\}$, *имеющее на бесконечности разложение* $\tilde f(z,\tau)=-\frac{A}{\alpha z^{\alpha}}\left(1+\frac{\gamma_2(\tau)}{z^2}+\ldots\right)$, *имеет вид:*

$$\tilde f(z,\tau)=A\frac{\tilde b}{\left(z-\tilde b\right)^{\alpha+1}}{}_2F_1\left(1,1+\alpha;2+\alpha;\frac{c\left(-\tilde b\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}}{z-\tilde b}\right)-\frac{A}{\alpha}\frac{1}{\left(z-\tilde b\right)^{\alpha}},$$

где $c=\left((1+\alpha)A\frac{\pi}{h}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}$, $\tilde b$ *определяются из* (13), *и* τ =τ(*t*) *определяется из* (15).

Кроме того, семейство $\tilde f$ *удовлетворяет уравнению Левнера*

$$\frac{\partial\tilde f(z,\tau)}{\partial\tau}=\frac{1}{\tilde\lambda(\tau)-z}\frac{\partial\tilde f(z,\tau)}{\partial z},\quad \tilde f(z,0)=-\frac{A}{\alpha z^{\alpha}},$$

где управляющая функция $\tilde\lambda(\tau)=(2+\alpha)\tilde b(\tau)+c\left(-\tilde b(\tau)\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}$, *имеет разложение* (14).

Замечание. Разложение (14) управляющей функции $\tilde\lambda$ согласуется с (5).

Численный эксперимент

Рассмотрим семейство областей

$$\Delta(\tau)=\{w\in\mathbb{C}: w=u+iv, u>0, v>0, v>1-u\}\setminus\{w\in\mathbb{C}: w=u+iv, u\ge t(\tau), v=2\},$$

$$\tau\in[0,\tau_0].$$

Концевую точку разреза обозначим через $\Lambda=\Lambda(\tau)$.

Рассмотрим семейство отображений $f=f(z,\tau)$, $f:\Pi^+\times[0,\tau_0]\to\Delta(\tau)$. Прообразы вершин *B*, $\Lambda(\tau)$, *A*, *D*, *C* многоугольника $\Delta(\tau)$ со внутренними углами соответственно 0, 2π, –απ, γπ, γπ, $\alpha=\frac{1}{2}$, $\gamma=\frac{3}{4}$, обозначим через $b(\tau)$, $\lambda(\tau)$, $a(\tau)$, $d(\tau)$ и $c(\tau)$, где $f(\lambda(\tau),\tau)=\Lambda(\tau)$, $b(\tau)<\lambda(\tau)<a(\tau)<d(\tau)<c(\tau)$, $0<\tau\le\tau_0$. Пусть $c(\tau)=\infty$, т.е. $f(\infty,\tau)=1$, и $a(0)=b(0)=\lambda(0)=0$, $d(0)=d_0=1$.

Отображение $f=f(z,\tau)$, $\tau\in[0,\tau_0]$, можно записать с помощью формулы Кристоффеля–Шварца

$$f(z,\tau)=c_1(\tau)\int_{\infty}^{z}\frac{(\lambda(\tau)-\zeta)(d(\tau)-\zeta)^{\gamma-1}}{(b(\tau)-\zeta)(a(\tau)-\zeta)^{\alpha+1}}d\zeta. \tag{16}$$

Отображение $f=f(z,0)$ имеет вид:

$$f(z,0)=ic_1(0)\int_{\infty}^{z}\frac{(d_0-\zeta)^{\gamma-1}}{\zeta^{1+\alpha}}d\zeta=2c_1(0)iz^{-\frac{1}{2}}\,{}_2F_1\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4};\frac{1}{2};z\right).$$

Из условия $f(1,0)=i$ найдем $c_1(0)=\dfrac{\Gamma(1/4)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(3/4)}=:A$, где Γ – гамма-функция.

Функция $f'(z,0)$ раскладывается на бесконечности в ряд

$$f'(z,0)=Ae^{-i\frac{\pi}{4}}\left(z^{-\frac{3}{4}}+\frac{1}{4}z^{-\frac{7}{4}}+\ldots\right).$$

Функция $f'(z,\tau)$ раскладывается на бесконечности в ряд

$$f'(z,\tau)=c_1(\tau)e^{-i\frac{\pi}{4}}\left(z^{-\frac{3}{4}}+\left(\frac{3}{2}a(\tau)+b(\tau)+\frac{1}{4}d(\tau)-\lambda(\tau)\right)z^{-\frac{7}{4}}+\ldots\right).$$

Нормируем отображения семейства *f*, полагая $c_1(\tau)=A$ и

$$\frac{3}{2}a(\tau)+b(\tau)+\frac{1}{4}d(\tau)-\lambda(\tau)=\frac{1}{4}. \tag{17}$$

Запишем $f(b+r)-f(b-r)=A\int_{\gamma}\frac{(\lambda(\tau)-\zeta)(d(\tau)-\zeta)^{\gamma-1}}{(b(\tau)-\zeta)(a(\tau)-\zeta)^{\alpha+1}}d\zeta,$ где γ – верхняя половина окружности $\gamma(\varphi)=b+re^{i\varphi}$, $\varphi\in[0,\pi]$. Заметим, что $\mathrm{Im}(f(b+r)-f(b-r))=-h$ и не зависит от *r* при $0<r<\lambda-b$. Перейдем к переменной φ и устремим *r* к нулю, получим

$$\lambda(\tau)-b(\tau)=\frac{h}{\pi A}\left(d(\tau)-b(\tau)\right)^{\frac{1}{4}}\left(a(\tau)-b(\tau)\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{18}$$

Параметры a, b и d удовлетворяют [9] системе дифференциальных уравнений

$$\dot{a}(\tau)=\frac{1}{a(\tau)-\lambda(\tau)},\ \dot{b}(\tau)=\frac{1}{b(\tau)-\lambda(\tau)},\ \dot{d}(\tau)=\frac{1}{d(\tau)-\lambda(\tau)}. \tag{19}$$

Положим, что параметры a, b, d и λ раскладываются в ряды

$$\lambda(\tau(x))=x^2\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k x^k,\ \ a(\tau(x))=x^2\sum_{k=1}^{\infty}a_k x^k,$$

$$b(\tau(x))=x^2\sum_{k=1}^{\infty}b_k x^k,\ \ d(\tau(x))=1+\sum_{k=1}^{\infty}d_k x^k,$$

где $x=\tau^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}$. Подставляя эти ряды в систему (17), (19), получим единственное решение, удовлетворяющее условиям $b(\tau(x))<\lambda(\tau(x))<a(\tau(x))<d(\tau(x))$. Найдем $\lambda_k=\lambda_k(\lambda_1)$, $k=2,3,\ldots$, $a_k=a_k(\lambda_1)$, $b_k=b_k(\lambda_1)$, $d_k=d_k(\lambda_1)$, $k=1,2,\ldots$ Таким образом, из системы (17), (19) можно найти все коэффициенты рядов, кроме λ_1. Коэффициент λ_1 можно найти, подставив эти ряды в (18). Пусть $t=5$, т.е. разрез в полуполосе $\{w\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}w>0, 0<\operatorname{Im}w<\pi\}$ проходит по лучу $\{w\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}w\geq 5, \operatorname{Im}w=2\}$. Найдем приближенное значение параметра $x=\tau^{\frac{1}{2}}\approx 0.305414$ по формуле (15). Вычисляя первые десять коэффициентов рядов при $x=0.305414$, получаем

$$b(x)=-0.132452\ldots,\ \lambda(x)=-0.078114\ldots,\ a(x)=0.035809\ldots,\ d(x)=1.0025\ldots$$

Значение отображения (16) в точке $\lambda(x)$ с найденными параметрами $b(x)$, $\lambda(x)$, $a(x)$, $d(x)$ отличается от $\Lambda(\tau(x))=5+2i$ на 10^{-4}.

На основании рассмотренных примеров можно сформулировать следующую гипотезу.

Гипотеза. *В односвязной области D разрез вдоль дуги окружности, выходящей из угла области D раствора* $\alpha\pi\neq 0$, *генерируется функцией* λ, *имеющей разложение* (6).

Список источников

1. *Löwner K.* Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises // Math. Ann. 1923. V. 89. P. 103–121. doi: 10.1007/BF01448091
2. *Marshall D.E., Rohde S.* The Loewner differential equation and slit mappings // J. Amer. Math. Soc. 2005. V. 18 (4). P. 763–778. doi: 10.1090/S0894-0347-05-00492-3
3. *Lind J.* A sharp condition for the Loewner equation to generate slits // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 2005. V. 30 (1). P. 143–158.
4. *Prokhorov D., Vasil'ev A.* Singular and tangent slit solutions to the Löwner equation // Anal. Math. Phys. 2009. P. 455–463. doi: 10.1007/978-3-7643-9906-1_23
5. *Lau K.S., Wu H.H.* On tangential slit solution of the Loewner equation // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 2016. V. 41. P. 681–691. doi: 10.5186/aasfm.2016.4142
6. *Колесников И.А.* Конформное отображение полуплоскости на круговой многоугольник с нулевыми углами // Известия вузов. Математика. 2021. № 6. С. 11–24. doi: 10.26907/0021-3446-2021-6-11-24

7. *Кармуши М., Колесников И.А., Лобода Ю.А.* Управляющая функция в уравнении Левнера, генерирующая разрез, выходящий из нулевого угла // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 94. С. 24–32. doi: 10.17223/19988621/94/2
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1965.
9. *Александров И.А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976.

References

1. Löwner K. (1923) Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. *Mathematische Annalen*. 89. pp. 103–121. DOI: 10.1007/BF01448091.
2. Marshall D.E., Rohde S. (2005) The Loewner differential equation and slit mappings. *Journal of the American Mathematical Society*. 18(4). pp. 763–778. DOI: 10.1090/S0894-0347-05-00492-3.
3. Lind J. (2005) A sharp condition for the Loewner equation to generate slits. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica.* 30(1). pp. 143–158.
4. Prokhorov D., Vasil'ev A. (2009) Singular and tangent slit solutions to the Löwner equation. *Analysis and Mathematical Physics.* pp. 455–463. DOI: 10.1007/978-3-7643-9906-1_23.
5. Lau K.S., Wu H.H. (2016) On tangential slit solution of the Loewner equation. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica.* 41. pp. 681–691. DOI: 10.5186/aasfm.2016.4142.
6. Kolesnikov I.A. (2021) Conformal mapping from the half-plane onto a circular polygon with cusps. *Russian Mathematics* (*Iz. VUZ)*. 65(6). pp. 8–20. DOI: 10.3103/S1066369X21060025.
7. Karmushi M., Kolesnikov I.A., Loboda Yu.A. (2025) *Upravlyayushchaya funktsiya v uravnenii Levnera, generiruyushchaya razrez, vykhodyashchiy iz nulevogo ugla* [The driving function of the Loewner equation generating slit emanating from a zero corner]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 94. pp. 24–32. DOI: 10.17223/19988621/94/2.
8. Bateman H., Erdelyi A. (1953) *Higher Transcendental Functions*. Vol. 1. New York: McGraw-Hill.
9. Aleksandrov I.A. (1976) *Parametricheskiye prodolzheniya v teorii odnolistnykh funktsii* [Parametric continuations in the theory of univalent functions]. Moscow: Nauka.

***Сведения об авторах*:**
Кармуши Махер – аспирант Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: maherkarmoushi1996@gmail.com
Колесников Иван Александрович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, доцент кафедры математического анализа и теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ia.kolesnikov@mail.ru
Лобода Юлия Анатольевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики механико-математического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: ysenchurova@yandex.ru

***Information about the authors*:**
Karmushi Maher (Phd Student, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation) E-mail: maherkarmoushi1996@gmail.com
Kolesnikov Ivan A. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ia.kolesnikov@mail.ru
Loboda Yulia A. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: ysenchurova@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 07.04.2025; принята к публикации 09.06.2025

The article was submitted 07.04.2025; accepted for publication 09.06.2025