ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2025 Математика и механика № 95
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Научная статья
УДК 517.55
MSC: 32A10, 32A20, 32A26, 32A27
doi: 10.17223/19988621/95/5

Формула Вейля для матричных функций

Баходир Аллабердиевич Шаимкулов[1],
Мафтуна Комилжоновна Расулова[2]

[1] *Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан*
[2] *Институт математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан*
[1] *shoimkba@rambler.ru*
[2] *maftunakomiljonovnaa@gmail.com*

Аннотация. Рассматривается локальный вычет в пространстве матриц порядка $m \times m$, и определен матричный полиэдр в этом пространстве. С помощью локального вычета получены формула Вейля и ее модификация для голоморфной функции в матричном полиэдре.
Ключевые слова: матричный поликруг, матричный полиэдр, формула Вейля, локальный вычет

Для цитирования: Шоимкулов Б.А., Расулова М.К. Формула Вейля для матричных функций // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 95. С. 52–58. doi: 10.17223/19988621/95/5

Original article

The Weyl formula for matrix functions

Bakhodir A. Shoimkulov[1], Maftuna K. Rasulova[2]

[1] *National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*
[2] *V.I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*
[1] *shoimkba@rambler.ru*
[2] *maftunakomiljonovnaa@gmail.com*

Abstract. Let $C[m \times m]$ be the space of square $[m \times m]$ matrices, and let $\mathbb{C}^n[m \times m]$ be the direct product of n copies of the space $C[m \times m]$. In this work, a new integral representation for the local residue in the space $C^n[m \times m]$ is given, based on the Bochner–Hua–Loken integral formula for the matrix polydisk. Moreover, a matrix polyhedron in this space is defined. It is worth noting that the classical Weyl integral representation in the space $\mathbb{C}^n$ is related to transformation formula for Grothendieck's local residue and can be derived using this formula from the multiple Cauchy integral representation for the polydisk. We apply the same approach to the local residue in the space $\mathbb{C}^n[m \times m]$ and obtain a generalization of the Bochner–Hua–Loken integral representation for the matrix polydisk, which shares the same nature as the well-known Weyl integral representations in polyhedra. In the obtained Weyl integral representation, the integral is taken over the skeleton of the polyhedron, and it is reduced to the classical Weyl formula for the polyhedron in $C[m\times m]$ when n = 1. Furthermore, a modification of the Weyl integral formula is derived, in which the integral is taken over the face of the polyhedron in the space $C^n[m\times m]$.

Keywords: matrix polydisk, matrix polyhedron, Weyl formula, local residue

For citation: Shoimkulov, B.A., Rasulova, M.K. (2025) The Weyl formula for matrix functions. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 95. pp. 52–58. doi: 10.17223/19988621/95/5

Введение

Пусть $\mathbb{C}[m\times m]$ – пространство [m × m]-матриц, $T_r=\left\{z\in\mathbb{C}[m\times m]: r^2I-zz^*>0\right\}$ – матричный круг радиуса r, r > 0, $S(T_r)=\left\{z\in\mathbb{C}[m\times m]: zz^*=r^2I\right\}$ – его остов, где I – единичная матрица порядка m, $z^*=\bar{z}'$ – матрица, комплексно сопряженная к транспонированной матрице z. Неравенство H > 0 для эрмитовой матрицы означает, как обычно, что данная матрица положительно определена.

Матричным поликругом радиуса r в пространстве $\mathbb{C}^n[m\times m]$ называется прямое произведение матричных кругов

$$T_{n,r}=\left\{z=\left(z^1,z^2,...,z^n\right)\in\mathbb{C}^n[m\times m]: r^2I-z^j\left(z^j\right)^*>0,\ j=\overline{1,n}\right\},$$

множество $S_{n,r}=\left\{z=\left(z^1,z^2,...,z^n\right)\in\mathbb{C}^n[m\times m]: r^2I-z^j\left(z^j\right)^*=0,\ j=\overline{1,n}\right\}$ называется остовом матричного поликруга $T_{n,r}$.

Известно [1. С. 37], что если функция $F\left(z^1,...,z^n\right)$ голоморфна в замыкании матричного поликруга $T_{n,r}$, то для любой $z\in T_{n,r}$ верна интегральная формула

$$F(z)=\int\limits_{S_{n,r}}\frac{F(\xi)d\mu(\xi)}{\prod\limits_{j=1}^{n}\det^m\left(\xi^j-z^j\right)},\qquad(1)$$

где, $d\mu(\xi)$ – мера Хаара на остове $S_{T,r}$.

Формула (1) обобщает интегральную Бохнера–Хуа Локена для матричного круга ([2. Гл. 4]) и превращается в нее, если n = 1.

Пусть U_a – некоторая окрестность точки $a\in\mathbb{C}^n[m\times m]$, $f=\left(f^1,...,f^n\right):\mathbb{C}^n[m\times m]\to\mathbb{C}^n[m\times m]$ – голоморфное отображение в U_a, и f имеет в точке a изолированный нуль.

Обозначим через $\Gamma_{f,\varepsilon}=\{z\in U_a: f^j(z)\left(f^j(z)\right)^*=\varepsilon^2I,\ j=\overline{1,n},$ ε – достаточно малое$\}$ цикл, содержащий нули отображения f и лежащий в U_a.

Для ростка $h:U_a \to \mathbb{C}$ и отображения *f* действие локального вычета в точке *a* определяется по формуле [3]

$$\underset{a\ \ f}{res}(h) = \int\limits_{\Gamma_{f,\varepsilon}} \frac{hd\mu(\xi)}{\prod\limits_{j=1}^{n} \det^m f^j(\xi)}. \qquad (2)$$

Из теоремы Сарда следует, что циклы $\Gamma_{f,\varepsilon}$ для почти всех достаточно малых ε являются гладкими многообразиями, поэтому в этом определении можно считать, что $\Gamma_{f,\varepsilon}$ – гладкий цикл.

В данной работе мы получим обобщение интегрального представления (1), которое имеет такую же природу, как и известные интегральные представления Вейля в полиэдрах (см.: [4. С. 205; 5; 6]).

Введем определение специального аналитического полиэдра в пространстве $\mathbb{C}^n[m\times m]$.

Пусть $G\subset\mathbb{C}^n[m\times m]$ – некоторая область, и на *G* задано голоморфное отображение

$$f:G\to\mathbb{C}^n[m\times m].$$

Обозначим через $f^{-1}(T_{n,r}) = \left\{z\in G: r^2I - f^j(z)\left(f^j(z)\right)^* > 0,\ j=\overline{1,n}\right\}$ прообраз матричного поликруга $T_{n,r}$. Если множество $f^{-1}(T_{n,r})$ компактно в *G*, то оно называется матричным полиэдрическим множеством, ассоциированным с отображением *f*.

Связная компонента матричного полиэдрического множества $f^{-1}(T_{n,r})$ называется специальным аналитическим матричным полиэдром, обозначим его $\Pi_{f,r}$. Остовом специального аналитического матричного полиэдра $\Pi_{f,r}$ называется множество

$$\Gamma_{f,r} = \left\{\xi\in G: f^j(z)\left(f^j(z)\right)^* = r^2I,\ j=\overline{1,n}\right\}.$$

По теореме Хефера [3] для некоторой окрестности *U* матричного полиэдра $\Pi_{f,r}$ существуют такие функции $P_{s,l,t}^{i,j,k}(\xi,z)\in Hol(U\times U)$, что при всех $(\xi,z)\in(U\times U)$ справедливы равенства

$$f_{ij}^k(\xi) - f_{ij}^k(z) = \sum_{s,l=1}^{m}\sum_{t=1}^{n}\left(\xi_{s,l}^t - z_{s,l}^t\right)P_{slt}^{ijk}(\xi,z) \quad i,j=\overline{1,m};k=\overline{1,n}.$$

Обозначим через $H(\xi,z)$ определитель матрицы $\left\|P_{slt}^{ijk}(\xi,z)\right\|$ порядка $nm^2\times nm^2$, строки которой нумеруются тройками *i, j, k*, а столбцы – тройками *s, l, t*.

Основные результаты

Теорема 1. Пусть функция *h* голоморфна в $\overline{\Pi}_{f,r}$. Тогда для любой $z\in\Pi_{f,r}$ верна формула

$$h(z) = \int\limits_{\Gamma_{f,r}} \frac{h(\xi)H(\xi,z)d\mu(\xi)}{\det^m\left(f(\xi)-f(z)\right)}, \qquad (3)$$

где $\Gamma_{f,r}=\left\{z\in G: f(z)f^*(z)=r^2I\right\}$ – остов матричного полиэдра $\Pi_{f,r}$; $\det^m\left(f(\xi)-f(z)\right)=\prod_{k=1}^{n}\det^m\left(f^k(\xi)-f^k(z)\right)$.

В случае $f(z)\equiv z$ формула (3) превращается в формулу Бохнера–Хуа Локена (1) для матричного поликруга, а при $n=1$ –в формулу Вейля? полученную в работе [5]. Отметим, что аналогичная формула с несколько другим ядром получена в [6] для полиэдра из $\mathbb{C}^n$.

Доказательство теоремы 1. Пусть z – фиксированная точка полиэдра $\Pi_{f,r}$. Тогда $r^2I-f^j(z)\left(f^j(z)\right)^*$, и цикл $\Gamma_{f,r}$ гомологичен в области регулярности подынтегральной формы в (3) циклу

$$\Gamma_{f(\xi)-f(z),\delta}=\left\{\xi\in\Gamma_{f,r}:\left(f^j(\xi)-f^j(z)\right)\left(f^j(\xi)-f^j(z)\right)^*=\delta^2 I,\, j=\overline{1,n}\right\},$$

где δ – любое достаточно малое положительное число [1. Гл. 6]. В свою очередь, цикл $\Gamma_{f(\xi)-f(z),\delta}$ распадается при малых δ на сумму циклов $\sum\Gamma_\nu$, где $\Gamma_\nu=\left\{\xi\in U_{\xi^{(\nu)}(z)}:\left(f^j(\xi)-f^j(z)\right)\left(f^j(\xi)-f^j(z)\right)^*=\delta^2 I,\, j=\overline{1,n}\right\}$ – цикл в окрестности нуля $\xi^{(\nu)}(z)$ отображения $f(\xi)-f(z)$. Заметим, что среди этих нулей есть и $\xi=z$. Известно [4], что определитель $H(\xi,z)$ принадлежит идеалу $I_{\xi^{(\nu)}(z)}\left(f(\xi)-f(z)\right)$ для всех $\xi^\nu(z)\neq z$. Следовательно, по формулам (1), (2) и формуле преобразования локального вычета [7. С. 31] имеем

$$h(z)=\int\limits_{\Gamma_{f-z,\delta}}\frac{h(\xi)d\mu(\xi)}{\prod_{j=1}^{n}\det^m\left(\xi^j-z^j\right)}=\underset{z\ \ f(\xi)-f(z)}{res}\left(h(\xi)H(\xi,z)\right)=\sum_\nu \underset{\xi^{(\nu)}(z)\, f(\xi)-f(z)}{res}\left(h(\xi)H(\xi,z)\right).$$

Вычеты в последней сумме – это интегралы по циклам Γ_ν, сумма которых гомологична циклу $\Gamma_{f,r}$ в области регулярности подынтегральной формы. По теореме Стокса указанная сумма вычетов совпадает с интегралом в (3). Теорема 1 доказана.

Пусть $\Pi_{f,r}$ – матричный полиэдр в области $G\subset\mathbb{C}^n[m\times m]$, соответствующий отображению $f=\left(f^1,...,f^n\right):G\to\mathbb{C}^n[m\times m]$. Зафиксируем натуральное число $0\le p\le n$ и представим f в виде $f=\left(f',f''\right)$, где $f'=\left(f^1,...,f^p\right)$, $f''=\left(f^{p+1},...,f^n\right)$.

Рассмотрим матричный полиэдр

$$\Pi^{(p)}_{f,r+\varepsilon}=$$

$$=\left\{z\in G: r^2I-f^j(z)\left(f^j(z)\right)^*>0,\, j=\overline{1,p},(r+\varepsilon)^2I-f^k(z)\left(f^k(z)\right)^*>0, k=\overline{p+1,n}\right\},$$

компактно лежащий в *G*. Указанный полиэдр назовем ε-продолжением матричного полиэдра $\Pi_{f,r}$ вдоль f''.

Теорема 2. Пусть $\Pi_{f,r}$ – специальный аналитический матричный полиэдр в области $G\subset\mathbb{C}^n[m\times m]$, $\Pi^{(p)}_{f,r+\varepsilon}$ – его ε-продолжение вдоль f''. Тогда существует гладкая $\bar{\partial}$-замкнутая форма $\psi_z^{(p)}$, коэффициенты которой голоморфно зависят от $z \in \Pi_{f,r}$, причем для всякой функции h, голоморфной в замыкании $\Pi_{f,r+\varepsilon}^{(p)}$, и для $z \in \Pi_{f,r}$ верна формула

$$h(z) = \int\limits_{\Gamma_{f,r}^{(p)}} \frac{\psi_z(\xi)}{\prod\limits_{j=1}^{p} \det^m \left(f^j(\xi) - f^j(z) \right)}, \tag{4}$$

где $\Gamma_{f,r}^{(p)} = \left\{ \xi \in \Pi_{f,r}^{(p)} : f^j(\xi)\left(f^j(\xi) \right)^* = r^2 I,\ j = \overline{1,p} \right\}$ – грань матричного полиэдра $\Pi_{f,r+\varepsilon}^{(p)}$.

Доказательство теоремы 2. Для каждого $j = \{p+1,...,n\}$ построим гладкую в области G функцию $\varphi_j(\xi)$, обладающую свойствами

$$\varphi_j \Big|_{\left\{ \left(f^j\right)\left(f^j\right)^* \le r^2 I \right\}} \equiv 0, \quad \varphi_j \Big|_{\left\{ \left(f^j\right)\left(f^j\right)^* \ge (r+\varepsilon)^2 I \right\}} \equiv 1,$$

и определим форму

$$\psi_z^{(p)}(\xi) = \frac{\bar{\partial}\varphi_{p+1} \wedge ... \wedge \bar{\partial}\varphi_n \wedge H(\xi, z)\, d\mu(\xi)}{\prod\limits_{k=p+1}^{n} \det^m \left(f^k(\xi) - f^k(z) \right)}, \tag{5}$$

где $H(\xi, z)$ – определитель матрицы, составленный из коэффициентов P_{slt}^{ijk} разложений Хефера для функции f_{ij}^k. В случае $p = n$ считаем $\psi_z^{(p)}(\xi) = H(\xi, z)\, d\mu(\xi)$.

Если z фиксировано и лежит в $\Pi_{f,r}$, то знаменатель в (5) может обращаться в нуль лишь в тех точках ξ, в которых $r^2 I - f^j(\xi)\left(f^j(\xi) \right)^* > 0$ хотя бы для одного j от $p + 1$ до n. Однако в окрестностях таких точек ξ числитель тождественно равен нулю. Значит, для $z \in \Pi_{f,r}$ форма $\psi_z^{(p)}(\xi)$ гладкая в G. Очевидно, она $\bar{\partial}$-замкнутая и голоморфно зависит от $z \in \Pi_{f,r}$.

Формулу (4) докажем по индукции по $k = n - p$. Для $k = 0$ формула (4) совпадает с формулой (3). Предположим, что формула (4) верна для $k = n - (p + 1)$. Из определения формы $\psi_z^{(p)}$ следует, что такая формула верна и в

$$\Pi_{f,r+\varepsilon} =$$

$$= \left\{ z \in G : r^2 I - f^j(z)\left(f^j(z) \right)^* > 0,\ j \ne p+1; (r+\varepsilon)^2 I - f^{p+1}(z)\left(f^{p+1}(z) \right)^* > 0, \varepsilon > 0 \right\},$$

т.е.

$$h(z) = \int\limits_{\Gamma_{f,r+\varepsilon}^{(p+1)}} h(\xi) \frac{\psi_z^{(p)}(\xi)}{\prod\limits_{j=1}^{p+1} \det^m \left(f^j(\xi) - f^j(z) \right)},\ z \in \Pi_{f,r+\varepsilon}, \tag{6}$$

с интегрированием по грани

$$\Gamma_{f,r+\varepsilon}^{(p+1)} = \left\{ \xi \in \overline{\Pi}_{f,r+\varepsilon}^{(p+1)} : r^2 I = f^j(\xi)\left(f^j(\xi) \right)^*, j = \overline{1,p}, (r+\varepsilon)^2 I = f^{(p+1)}(\xi)\left(f^{(p+1)}(\xi) \right)^* \right\}$$

полиэдра $\Pi^{(p+1)}_{f,r+\varepsilon}$, являющегося ε-продолжением полиэдра $\Pi_{f,r+\varepsilon}$, вдоль $f" = \left(f^{p+2},...,f^{n}\right)$, или, что то же самое, ε-продолжением полиэдра $\Pi_{f,r}$ вдоль $f"$.

Обозначим через Γ^{j} – j-ю грань полиэдра $\Pi^{(p)}_{f,r+\varepsilon}$ размерности $2m^2n-1$, а через $\Gamma_{j_1,...,j_k}$ – грань, равную пересечению $\Gamma^1 \cap \Gamma^2 \cap ... \cap \Gamma^k$. В этих обозначениях грань $\Gamma^{(p)}_{f,r}$ в (4) совпадает с $\Gamma_{1,...,p}$, а грань $\Gamma^{(p+1)}_{f,r+\varepsilon}$ в (6) – с $\Gamma_{1,...,p+1}$. Граница $\Gamma^{(p)}_{f,r} = \partial\Gamma_{1,...,p}$ равна $\partial\Gamma^{(p)}_{f,r} = \partial\Gamma^{(p+1)}_{f,r+\varepsilon} - \Gamma_{1,...,p,p+2} + ... + \Gamma_{1,..,p,n}$.

Заметим, что форма $\psi^{(p+1)}_{z}(\xi)$ равна нулю на гранях $\Gamma_{1,...,p,j}$, $j = p+2,...,n$. Далее, функция φ_{p+1} равна единице на $\Gamma^{(p+1)}_{f,r+\varepsilon}$, поэтому в (6) перед формой $\psi^{(p+1)}_{z}$ можно поставить множитель φ_{p+1}, а $\Gamma^{(p+1)}_{f,r+\varepsilon}$ заменить на $\partial\Gamma^{(p)}_{f,r}$.

После умножения на φ_{p+1} подынтегральная форма в (6) станет гладкой на γ при всех $z \in \Pi_{f,r}$. Применяя формулу Стокса, получаем

$$h(z) = \int\limits_{\Gamma^{(p)}_{f,r}} h(\xi) \frac{\bar{\partial}\varphi_{p+1} \wedge \psi^{(p+1)}_{z}(\xi)}{\prod\limits_{j=1}^{p+1} \det{}^{m}\left(f^{j}(\xi) - f^{j}(z)\right)}, z \in \Pi_{f,r}$$

т.е., с учетом определения $\psi^{(p)}_{z}$, формулу (4).

Список источников

1. *Худайберганов Г., Кытманов А.М., Шаимкулов Б.А.* Анализ в матричных областях. Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2017.
2. *Хуа Локен.* Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
3. *Цих А.К., Шаимкулов Б.А.* Интегральные реализации вычета Гротендика и его преобразование при композициях // Вестник Красноярского государственного университета. Сер. Физико-математические науки. 2005. Вып. 1. С. 151–155.
4. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1976. Т. 2.
5. *Шаимкулов Б.А.* Интегральное представление Коши-Вейля для матричных функций // Известия высших учебных заведений. Математика. 2003. № 2. С. 68–71.
6. *Шаимкулов Б.А., Махкамов Э.М.* Об одном аналоге интегральной формулы Вейля для полиэдров с не кусочно гладкой границей // Сибирский математический журнал. 2011. Т. 52, № 2. С. 476–479.
7. *Цих А.К.* Многомерные вычеты и их применения. Новосибирск: Наука, 1988.

References

1. Khudayberganov G., Kytmanov A., Shoimkulov B. (2011) Analiz v matrichnykh oblastyakh [Analysis in matrix domains]. Krasnoyarsk: Siberian Federal University.
2. Hua L.K. (1963) *Harmonic Analysis of Functions of Several Complex Variables in Classical Domains,* American Mathematical Society.
3. Tsikh A.K. Shoimkulov B.A. (2005) Integral realization of the Grothendieck residue and its transformation under composition. *Vestnik Krasnoyarskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskiye nauki*. 1. pp. 140–144.

4. Shabat B.V. (1992) *Introduction to complex analysis. Part II*. American Mathematical Society.
5. Shaimkulov B.A. (2003) The integral Cauchy–Weil representation for matrix functions. *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*. 47(2), pp. 68–71
6. Shaimkulov B.A., Makhkamov E.M. (2011) On an analog of the Weyl integral formula for the polyhedra having not piecewise smooth boundaries *Siberian Mathematical Journal*. 52(2). pp. 377–380.
7. Tsikh A.K. (1992) *Multidimensional Residues and Their Applications*. American Mathematical Society.

***Сведения об авторах*:**
Шаимкулов Баходир Аллабердиевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа Национального университета Узбекистана (Ташкент, Узбекистан). E-mail: shoimkba@rambler.ru
Расулова Мафтуна Комилжоновна – стажер Института математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (Ташкент, Узбекистан) E-mail: maftunakomiljonovnaa @gmail.com

***Information about the authors*:**
Shoimkulov Bakhodir A. (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Mathematical Analysis at the National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: shoimkba@rambler.ru
Rasulova Maftuna K. (Junior Researcher at the V.I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: maftunakomiljonovnaa@gmail.com

Статья поступила в редакцию 16.11.2024; принята к публикации 09.06.2025

The article was submitted 16.11.2024; accepted for publication 09.06.2025