

Научная статья

УДК 532.5-1/-9

doi: 10.17223/19988621/95/8

Математическая модель развития и стабилизации трещины автогидроразрыва пласта

Александр Янович Гильманов¹, Руслан Жаканович Касеинов²,
Артем Валерьевич Кузнецов³, Александр Павлович Шевелёв⁴

^{1, 2, 3, 4} Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия

¹ a.y.gilmanov@utmn.ru

² stud0000243578@study.utmn.ru

³ stud0000219214@study.utmn.ru

⁴ a.p.shevelev@utmn.ru

Аннотация. Статья посвящена разработке модели развития трещины автогидроразрыва пласта. Разработаны стационарная и нестационарная модели. Обе модели основаны на использовании законов сохранения массы и импульса, а также краевого условия, соответствующего балансу притока и оттока суспензии. Решение системы уравнений проводится с помощью численных методов. Проведено сравнение динамики длины трещины с использованием разных моделей.

Ключевые слова: развитие трещины автогидроразрыва пласта, нестационарная модель, закон сохранения массы, закон сохранения импульса, длина трещины, давление гидроразрыва, явная конечно-разностная схема

Для цитирования: Гильманов А.Я., Касеинов Р.Ж., Кузнецов А.В., Шевелёв А.П. Математическая модель развития и стабилизации трещины автогидроразрыва пласта // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 95. С. 81–96. doi: 10.17223/19988621/95/8

Original article

A mathematical model of hydraulic fracture growth and stabilization

Aleksandr Ya. Gil'manov¹, Ruslan Zh. Kaseinov²,
Artyom V. Kuznetsov³, Aleksandr P. Shevelev⁴

^{1, 2, 3, 4} University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation

¹ a.y.gilmanov@utmn.ru

² stud0000243578@study.utmn.ru

³ stud0000219214@study.utmn.ru

⁴ a.p.shevelev@utmn.ru

Abstract. This paper considers stationary and non-stationary models of hydraulic fracture growth and stabilization. For the first time, the length of an elliptical section fracture is

determined in terms of the balance of fluid inflow into and outflow from the fracture. The stationary model assumes that the fracture formation time is much less than the characteristic time of water injection into the reservoir, and the rate of further fracture growth is much less than the rate of the outflow and is negligible. The non-stationary model takes into account the stage of the fracture growth. Both mathematical models are developed using the laws of conservation of mass and momentum. Darcy's law is applied to describe the leaks into the reservoir. The boundary conditions consider the constancy of the injected water flow rate and the balance between the fluid inflow into and outflow from the fracture. It is established that over time, the half-length of the fracture calculated by the non-stationary model gradually reaches a stationary value corresponding to that determined by the stationary model.

Keywords: hydraulic fracture growth, non-stationary model, mass conservation law, momentum conservation law, fracture length, hydraulic fracturing pressure, explicit finite difference scheme

For citation: Gil'manov, A.Ya., Kaseinov, R.Zh., Kuznetsov, A.V., Shevelev, A.P. (2025) A mathematical model of hydraulic fracture growth and stabilization. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 95. pp. 81–96. doi: 10.17223/19988621/95/8

Введение

В настоящее время ряд месторождений находится на поздних стадиях разработки, что требует закачки воды для вытеснения нефти из пласта [1]. Скорость фильтрации воды зависит от забойного давления нагнетательной скважины, пластового давления, фильтрационно-емкостных свойств пласта и вязкости воды [2]. В случае загрязнения призабойной зоны ее проницаемость снижается, что приводит к снижению расхода скважины, поэтому для его поддержания на прежнем уровне повышают забойное давление [3]. Результатом таких мероприятий может быть превышение давления разрыва породы [4, 5]. Тогда происходит образование техногенных трещин, которые в нефтегазовой отрасли называются трещинами автогидроразрыва пласта (автоГРП) [6–9].

Снижение фильтрационно-емкостных свойств вблизи скважины возможно вследствие продолжительного нагнетания в пласт неочищенной от примесей воды [10]. Дополнительно частицы могут оседать вблизи границ трещины автоГРП, что будет приводить к возрастанию давления в этой трещине и увеличению ее длины [9, 11]. По такой трещине в силу ее низкого фильтрационного сопротивления будет происходить опережающий по сравнению с движением флюида по пласту прорыв закачиваемой воды в добывающие скважины [9].

Таким образом, прогнозирование развития трещин автоГРП является важной и актуальной задачей для повышения охвата пласта заводнением. Предложены различные мероприятия, направленные на ограничение эффективных размеров таких трещин [12], однако для этого нужно знать, как увеличивается длина трещины, чтобы отследить момент времени, требующий применения указанных мероприятий.

Первоначально для моделирования динамики развития трещин автоГРП с целью предсказания контроля их роста были предложены одномерные модели, получившие широкое распространение [13–17]. Предложенные позднее многомерные модели [18, 19] не всегда применимы для экспресс-оценок развития трещин и могут быть с достаточной степенью точности заменены одномерными моделями,

поскольку длина трещины существенно превышает ее ширину и, как правило, высоту [15].

В первой одномерной модели трещины предполагается, что ее сечение является прямоугольным. Данная геометрия основана на двух допущениях: высота трещины много больше ее полной длины и, как следствие, возможно пренебречь верхней и нижней границами трещины. Такая модель носит название KGD (модель Khristianovich–Geertsma–De Klerk – по трем ее авторам) [15, 20]. В ней геометрическая форма трещины представляет собой прямоугольный параллелепипед шириной w , используется закон сохранения массы фаз, а скорость потока ньютоновской жидкости по трещине рассчитывается по закону Пуазейля для канала прямоугольного сечения. Граничные условия на скважине обычно соответствуют заданному расходу, при котором давление превышает давление разрыва породы и инициируется трещина. Обычно предполагается, что фронт жидкости, имеющий координату L , отстает от конца трещины, но в некоторых случаях этим фактом пренебрегают [15].

В другой модели PKN (модель Perkins–Kern–Nordgren) сечение трещины в вертикальной плоскости считается эллиптическим [15, 21]. Такая модель в большинстве случаев соответствует реальным условиям, поскольку в ней длина трещины должна на порядки превосходить высоту, причем считается, что трещина вскрывает весь продуктивный интервал либо высота трещины не меняется с течением времени. Как и в модели KGD, используются законы сохранения массы и импульса, однако в последнем учитывается эллиптическое сечение, перпендикулярное потоку. Утечки жидкости из трещины учтены Нордгреном [15] с использованием нестационарного закона Картера и уравнения неразрывности, в котором жидкость предполагается несжимаемой. В данной модели граница трещины является подвижной, что сильно усложняет саму задачу. В таком случае конец трещины фиксируют и его координату обозначают за L' , а ширину трещины в промежутке $L' \leq x \leq L(t)$ считают нулевой [15].

Обе описанные модели основаны на законах сохранения массы, импульса и геомеханических соотношениях между шириной трещины и давлением в ней.

Более сложные гибридные модели предполагают геометрию модели PKN и осложнены дополнительными соотношениями для утечек жидкости в пласт на некоторую глубину [22, 23]. Некоторые модели [24], наоборот, учитывают приток флюида в трещину, однако они применяются уже для стадий разработки месторождения, а не формирования и развития техногенных трещин.

Рассмотренные математические модели гидроразрыва пласта, описывающие прямолинейное распространение трещины, характеризуются различными подходами к обоснованию поставленной задачи. Как отмечалось, модели PKN и KGD отличаются формой трещины, кроме того, в модели KGD ширина трещины зависит от распределения давления по всей трещине, а в PKN – только от давления в рассматриваемой точке. Гибридные модели, хотя и основаны на базе вышеописанных моделей, но отличаются от них усложнением соотношений утечек жидкости гидроразрыва в пласт. В таких моделях не используют закон Картера, заменяя его на поршневой механизм проникновения частиц в пласт [15]. Еще одним направлением изучения механизма развития трещины является добавление в систему дополнительных условий, таких как учет налпания проппанта на стенки трещины [22].

Расчеты по всем перечисленным моделям направлены на определение динамики развития техногенной трещины [20, 21]. При этом считается, что трещина

изначально распространяется до бесконечности и давление формирования трещины задается на бесконечном удалении от скважины. При таком подходе не рассматриваются вопросы стабилизации длины трещины при равенстве расхода, закачиваемого в скважину и попадающего в трещину, и утечек воды через стенки трещины. Для анализа этих процессов необходимо рассмотрение иных граничных условий, детально учитывающих протяженность трещины. Этим вопросам и посвящена данная работа. Впервые длина трещины эллиптического сечения определяется из баланса притока жидкости в трещину и оттока из нее, что является развитием подхода, описанного в работе [25], где, однако, не учитывалась стадия роста трещины.

Стационарная модель определения размеров техногенной трещины

Рассматривается изотропный пласт, имеющий абсолютную проницаемость k , мощность (толщину) h и пластовое давление P_r , в который пробурена нагнетательная скважина для закачки воды с постоянным расходом Q_m . Этот расход таков, что забойное давление превышает давление гидроразрыва, которое принимается равным

$$P_{hf} = 1,5P_r. \quad (1)$$

Данный факт приводит к формированию техногенной трещины, скорость развития которой достаточно высока. При этом имеется выделенное направление распространения трещины, вдоль которого и направлена ось координат x . Учитывается симметрия относительно нагнетательной скважины, и далее рассматривается только половина трещины (рис. 1), поэтому начало координат ставится на забое нагнетательной скважины.

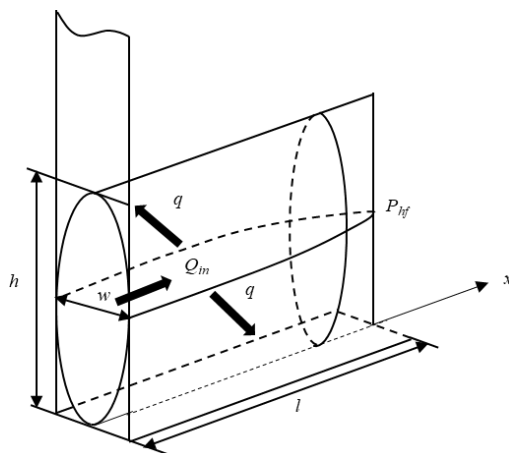


Рис. 1. Геометрия трещины с указанием направлений потоков

Fig. 1. Fracture geometry with indicated flow directions

Рост трещины прекратится при достижении баланса притока воды в трещину и оттока из нее, тогда полудлина трещины станет равной l . Поэтому саму трещину можно считать стационарной. Боковая поверхность трещины является прямоугольной, сечения в двух остальных плоскостях – эллиптическими, что соответствует модели РКН. Поток воды с динамической вязкостью μ по трещине

обусловлен закачкой воды с расходом Q_{in} , удельный отток воды из трещины на единицу ее длины обозначается как q . В пласте произошло вытеснение нефти, и ее остаточная нефтенасыщенность равна S_{or} , поэтому относительная фазовая проницаемость воды k_r берется при остаточной нефтенасыщенности $k_r(S_{or})$. Расстояние от трещины до контура питания равно L . В пласте имеются непроницаемые глинистые прослои, поэтому эффективная толщина, доступная для фильтрации жидкости, равна h_e . Описание рассматриваемого процесса с учетом введенных допущений возможно в рамках стационарной модели определения размеров трещины автоГРП, которая состоит из основных уравнений механики сплошных сред. Аналогично модели РKN рассматривается сечение трещины с максимальной шириной w . Известны характеристики горной породы: модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν .

При использовании стационарного приближения математическая модель для определения размеров трещины автоГРП состоит из закона сохранения массы, закона сохранения импульса для трещины эллиптического сечения [15], закона Дарси для описания удельного оттока воды из трещины в пористую среду, соотношения, связывающего ширину трещины с избыточным давлением для трещины эллиптического сечения [15]:

$$\frac{d(hw u)}{dx} = -q, \quad (2)$$

$$u = -\frac{w^2}{16\mu} \frac{dP}{dx}, \quad (3)$$

$$q = \frac{kk_r(S_{or})h_e}{\mu L} (P - P_r), \quad (4)$$

$$w = 2 \frac{1-\nu^2}{E} (P - P_{hf}) h, \quad (5)$$

где u – скорость потока воды по трещине, P – давление; давление гидроразрыва определяется из (1).

В этой системе уравнений искомыми функциями являются ширина трещины, давление, скорость потока воды и удельный отток воды из трещины.

Система уравнений (2)–(5) при подстановке (3)–(5) в (2) требует задания двух граничных условий по давлению. В начале координат на нагнетательной скважине в соответствии с постановкой задачи задан постоянный расход, т.е. граничное условие второго рода. Другая граница соответствует максимальной полудлине трещины l_{max} , на которой ставится граничное условие первого рода, т.е. постоянное значение давления, равное давлению гидроразрыва, поскольку в этом случае ширина трещины становится нулевой. l_{max} достигается при балансе притока воды в трещину и оттока из нее, который представляет собой дополнительное интегральное условие. Тогда граничные условия имеют вид:

$$\left. \frac{dP}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{64\mu Q_{in}}{\pi w^3 \Big|_{x=0} h}, \quad (6)$$

$$P(x=l_{max}) = P_{hf}, \quad (7)$$

$$Q_{in} = \int_0^{l_{max}} q(x) dx. \quad (8)$$

Для того чтобы решить систему уравнений (2)–(5), можно воспользоваться методом последовательного исключения неизвестных. Тогда в закон сохранения массы (2) из формулы (3) можно подставить u , а из закона Дарси (4) – q , после чего при учете связи ширины трещины и давления (5) получится уравнение, в котором неизвестным является только давление:

$$\frac{h^4(1-v^2)^3}{2E^3} \frac{d}{dx} \left((P - P_{hf})^3 \frac{dP}{dx} \right) = \frac{kk_r(S_{or})h_e}{L} (P - P_r). \quad (9)$$

В уравнении (9) можно упростить производную, если занести разность давлений под знак дифференциала, тогда после преобразований можно получить обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно избыточного давления

$$\frac{d^2(P - P_{hf})^4}{dx^2} = \frac{8E^3kk_r(S_{or})h_e}{Lh^4(1-v^2)^3} (P - P_r). \quad (10)$$

В силу нелинейности уравнения (10) поиск аналитического решения может быть трудоемким, поэтому рациональнее использовать численные методы его решения. Для упрощения дальнейших преобразований можно ввести замену, при которой избыточное давление в четвертой степени заменяется новой функцией

$$y = (P - P_{hf})^4. \quad (11)$$

В таком случае с учетом (11) в (10) будет иметься вторая производная от функции y по координате, которая при численном решении обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка традиционно аппроксимируется центральной разностью. Пусть ось x разбита на N отрезков, индекс узла по координате i , шаг по координате

$$\Delta x = \frac{l_{\max}}{N}, \quad (12)$$

а замена (11) имеет вид:

$$y_i = (P_i - P_{hf})^4, i = \overline{0, N}. \quad (13)$$

В результате получится уравнение

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2} = \frac{8E^3kk_r(S_{or})h_e}{Lh^4(1-v^2)^3} \left(\sqrt[4]{y_i} + P_{hf} - P_r \right), i = \overline{1, N-1}. \quad (14)$$

Граничные условия (6) и (7) с учетом (5) и (13) принимают вид:

$$\frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = -\frac{32\mu Q_{in} E^3}{\pi(1-v^2)^3 h^4}, \quad (15)$$

$$y_N = 0. \quad (16)$$

Краевое условие (8) переписывается при подстановке q из (4), интеграл рассчитывается численно по формуле трапеций:

$$Q_{in} = \frac{kk_r(S_{or})h_e}{\mu L} \Delta x \left(\frac{P_0 + P_N - 2P_r}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} (P_i - P_r) \right). \quad (17)$$

Неизвестными в системе $2N + 4$ уравнений (12)–(17) являются y_i , P_i , $i = 0, 1, \dots, N$, $l_{\max}$ и Δx . Количество этих неизвестных $2N + 4$. Уравнения остаются нелинейными

относительно u_i , поэтому решение системы (12)–(17) возможно с использованием метода простой итерации с относительной погрешностью 1%. Тогда становятся известными распределение давления по координате и максимальная полудлина трещины. Ширина трещины определяется из (5) после подстановки полученных значений давления.

Нестационарная модель развития и стабилизации техногенной трещины

Стационарная модель техногенной трещины рассчитывает полудлину трещины, но не позволяет определить время, за которое наступает баланс расхода закачиваемой воды и ее оттока из трещины. Пока такой баланс не наступит, трещина будет возрастать, если приток воды в нее превышает отток. Описание указанного явления возможно только в рамках нестационарной модели развития и стабилизации техногенной трещины.

Закон сохранения массы в рамках такой модели имеет вид:

$$\frac{\partial(hw)}{\partial t} + \frac{\partial(hwu)}{\partial x} = -q, \quad (18)$$

где t – время. Поток по трещине по-прежнему описывается скоростью u , рассчитываемой из закона (3), однако теперь для нестационарной модели уравнение (3) следует переписать с учетом того, что обыкновенную производную от давления по пространственной координате следует заменить на частную производную:

$$u = -\frac{w^2}{16\mu} \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (19)$$

Уравнения (4) и (5) остаются неизменными. Тогда в системе уравнений (4), (5), (18), (19) искомые функции совпадают с теми, что были в стационарной модели, но зависят от двух аргументов: x и t .

В силу зависимости функций от времени необходимо задать начальное условие, которое соответствует заданию нулевой ширины трещины, т.е. давления гидроразрыва пласта:

$$P(t = 0, x > 0) = P_{hf}. \quad (20)$$

Граничные условия соответствуют (6) и (7), однако в (6) также необходимо учесть частную производную:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{64\mu Q_{in}}{\pi w^3 \Big|_{x=0} h}. \quad (21)$$

Недостатком классических нестационарных одномерных моделей является сложность задания правого граничного условия при численных расчетах. В частности, в модели PKN граничное условие представляет собой нулевую длину трещины на бесконечном удалении от скважины либо считается задача с подвижной границей. В рамках более однозначного подхода можно определить максимальную полудлину трещины из балансового соотношения (8), позволяющего определить максимальную длину трещины $l_{\max}$, при этом текущая длина трещины $l(t)$ определяется как точка, в которой давление становится равным давлению гидроразрыва пласта. Система уравнений является интегро-дифференциальной и замкнутой.

Аналогично стационарной модели для решения описанной системы уравнений можно использовать метод последовательного исключения неизвестных. В резуль-

тате получится уравнение, в котором искомой функцией будет только давление в трещине:

$$\frac{\partial(P - P_{hf})}{\partial t} - \frac{h^2(1-v^2)^2}{16\mu E^2} \frac{\partial^2(P - P_{hf})^4}{\partial x^2} = -\frac{kk_r(S_{or})h_e E}{2\mu L h^2(1-v^2)}(P - P_r). \quad (22)$$

Уравнение (22) – нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, поэтому для его решения целесообразно использовать численные методы. Наиболее простым среди таких методов является явная конечно-разностная схема с шагом по времени Δt :

$$\begin{aligned} \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} - \frac{h^2(1-v^2)^2}{16\mu E^2} \frac{(P_{i+1}^n - P_{hf})^4 - 2(P_i^n - P_{hf})^4 + (P_{i-1}^n - P_{hf})^4}{(\Delta x)^2} = \\ = -\frac{kk_r(S_{or})h_e E}{2\mu L h^2(1-v^2)}(P_i^n - P_r), \end{aligned} \quad (23)$$

где n – индекс узла вычислительной сетки по времени. Для шага по координате справедлива формула (12).

Численная аппроксимация интеграла в краевом условии (8) проводится по формуле трапеций аналогично выражению (17) при подстановке уравнений (4), (12):

$$Q_{in} = \frac{kk_r(S_{or})h_e l_{\max}^{n+1}}{\mu L N} \left(\frac{P_0^{n+1} + P_N^{n+1} - 2P_r}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} (P_i^{n+1} - P_r) \right). \quad (24)$$

Начальное условие (20) аппроксимируется как

$$P_i^0 = P_{hf}, i = \overline{1, N-1}. \quad (25)$$

Чтобы переписать граничное условие (21), необходимо учесть связь ширины трещины и давления (5), тогда

$$\left. \frac{\partial(P - P_{hf})^4}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{32\mu Q_{in} E^3}{\pi h^4(1-v^2)^3}.$$

В результате граничные условия запишутся как

$$\frac{(P_1^n - P_{hf})^4 - (P_0^n - P_{hf})^4}{\Delta x} = -\frac{32\mu Q_{in} E^3}{\pi h^4(1-v^2)^3}, \forall n, \quad (26)$$

$$P_N^n = P_{hf}, \forall n. \quad (27)$$

Если учесть (12), то $l_{\max}$ входит в уравнения (23) и (24), поэтому получившаяся система уравнений с начальным условием (25) и граничными условиями (26) и (27) решается методом простой итерации.

Результаты расчетов длины трещины

Для расчетов длины трещины по стационарной и нестационарной моделям, разработанным авторами, взяты следующие данные: $P_r = 10$ МПа, $\mu = 1$ МПа·с, $Q_{in} = 0,001$ м³/с, $E = 50$ ГПа, $v = 0,2$, $h = 30$ м, $h_e = 20$ м, $k_r(S_{or}) = 0,5$, число шагов по координате равно 100. Шаг по времени для нестационарной модели равен 0,0005 с. При заданных параметрах объем утечек из трещины за 1 с составляет порядка 10^{-3} м³,

а прирост объема трещины за это же время имеет порядок 10^{-5} м^3 , что свидетельствует о справедливости допущения о малой скорости роста трещины по сравнению со скоростью утечек.

В рамках стационарной модели полудлина трещины автоГРП определяется балансом притока воды из скважины в трещину и ее оттока из трещины в пористую среду (17). При заданных выше параметрах полудлина трещины равна 47 м, распределение давления в ней показано на рис. 2.

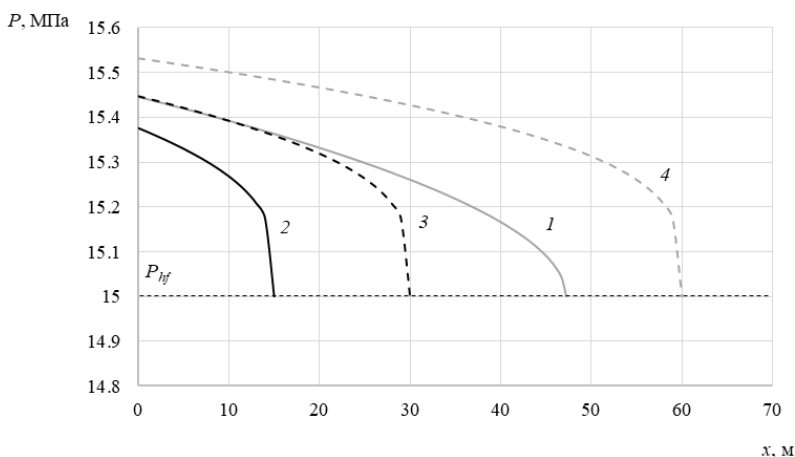


Рис. 2. Распределение давления в трещине для стационарной модели, разработанной авторами (кривая 1), и стационарной модели PKN при различных полудлинах трещины: кривая 2 – при $l = 15$ м, кривая 3 – при $l = 30$ м, кривая 4 – при $l = 45$ м

Fig. 2. Pressure distribution within the fracture in the stationary model developed by the authors (1) and a stationary PKN model for various half-lengths of the fracture: $l =$ (2) 15, (3) 30, and (4) 45 m

Распределение давления также может быть рассчитано по стационарной модели PKN, получаемой из классической модели PKN [15] при $t \rightarrow \infty$. Распределения давления, посчитанные при различном выборе l , для такой модели приведены на рис. 2. Остальные параметры аналогичны стационарной модели. В целом эти распределения качественно повторяют зависимость, полученную по разработанной в статье стационарной модели. Значение давления на забое нагнетательной скважины определяется расходом воды. Далее давление снижается до давления гидроразрыва в точке в точке $x = l$. При $l = 30$ м модель PKN воспроизводит при $x < 20$ м распределение давления, соответствующее стационарной модели, но ближе к правой границе трещины значения давления отличаются из-за различия размеров трещины.

В случае классической нестационарной модели PKN полудлина трещины определяется по точке, в которой давление становится равным давлению гидроразрыва, при этом правая граница расчетной области удаляется далеко, имитируя бесконечность, поскольку ее влияние мало [15]. При вышеприведенных параметрах была рассчитана динамика развития трещины по нестационарной модели PKN при различных расстояниях от нагнетательной скважины до правой границы расчетной области L (рис. 3). С течением времени полудлина трещины возрастает, причем значение L практически не влияет на динамику роста трещины.

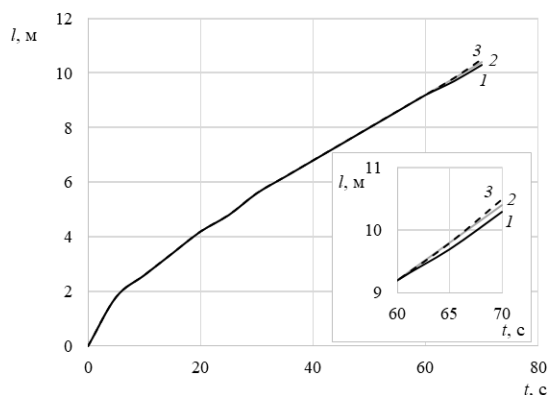


Рис. 3. Динамика роста трещины по модели PKN при различных значениях координаты правой границы: кривая 1 соответствует $L = 50$ м, кривая 2 – $L = 100$ м, кривая 3 – $L = 200$ м

Fig. 3. Dynamics of the fracture growth according to the PKN model at different right boundary coordinates: $L = (1) 50$, $(2) 100$, and $(3) 200$ m

Расчет зависимости полудлины трещины от времени по нестационарной модели, разработанной авторами, при вышеприведенных параметрах показывает, что со временем длина трещины возрастает медленнее, чем по модели PKN, хотя до 50 с значения полудлин по обеим моделям практически совпадают. Этот эффект замедления роста полудлины трещины связан с постепенной стабилизацией размеров трещины по нестационарной модели, учитывающей баланс расхода нагнетаемой жидкости и оттока из трещины. В модели PKN стабилизация размеров трещины не наступает, что, однако, не соответствует практике [9].

Расчеты по нестационарной модели при различном числе ячеек по горизонтальной координате показывают, что динамика развития трещины не зависит от крупности разбиения численной сетки (рис. 4), поэтому и при 100 ячейках модель воспроизводит результаты достоверно.

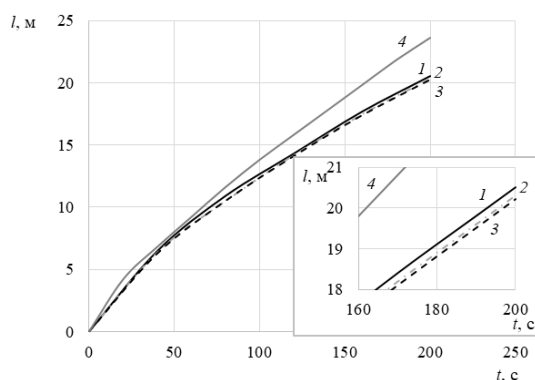


Рис. 4. Влияние числа ячеек на динамику роста трещины по нестационарной модели в сравнении с моделью PKN: кривая 1 соответствует 100 ячейкам, кривая 2 – 250 ячейкам, кривая 3 – 500 ячейкам, кривая 4 – модели PKN

Fig. 4. Effect of the number of cells on the fracture growth dynamics according to the non-stationary model in comparison with the PKN model: $(1) 100$, $(2) 250$, and $(3) 500$ cells, (4) PKN model

Влияние числа ячеек на результаты расчетов можно также рассмотреть на примере распределения давления по координате в момент времени 200 с (рис. 5). В целом распределение давления сохраняет практически неизменный вид при разном выборе крупности численной сетки, однако при более мелкой сетке размытие фронта давления меньше.

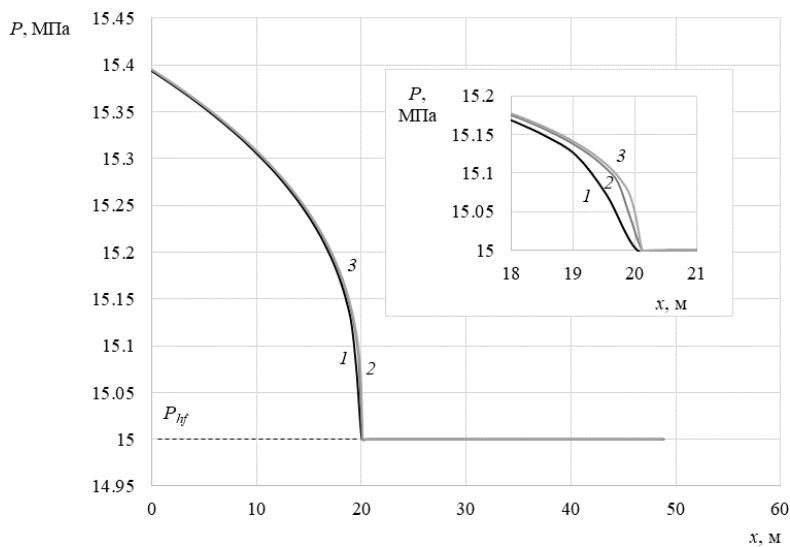


Рис. 5. Влияние числа ячеек на распределение давления, полученное по нестационарной модели (кривая 1 – 100 ячеек, кривая 2 – 250 ячеек, кривая 3 – 500 ячеек)

Fig. 5. Effect of number of cells on the pressure distribution obtained using the non-stationary model: (1) 100, (2) 250, and (3) 500 cells

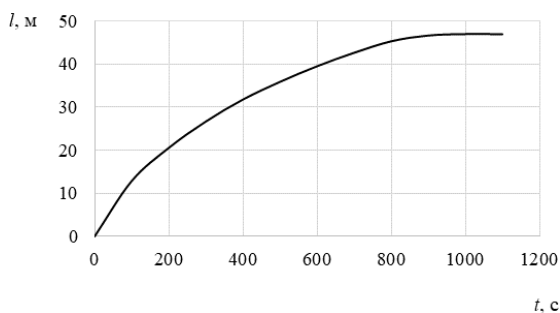


Рис. 6. Зависимость полудлины трещины от времени для нестационарной модели

Fig. 6. Time dependence of the fracture half-length in the non-stationary model

Дальнейшие расчеты по нестационарной модели показывают, что со временем полудлина трещины выходит на стационарное значение, согласующееся со значением, определенным по стационарной модели (рис. 6). При вышеприведенных параметрах в обоих случаях это значение равно 47 м и обусловлено балансом расхода закачиваемой жидкости и оттока из трещины в пласт. При этом распределения давления для стационарной и нестационарной моделей при выходе на стационарное значение полудлины трещины (в момент времени $t = 1\,000$ с) также дают близкие

результаты, расходящиеся по относительной величине (по отношению к разности давления и давления гидроразрыва) на 5% (рис. 7), что обусловлено наличием итерационных процедур для нахождения давления в обоих случаях.

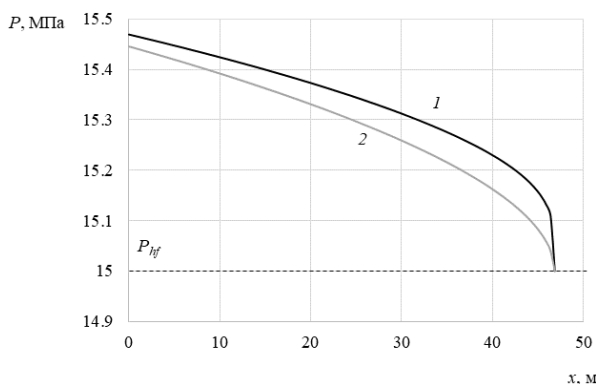


Рис. 7. Сравнение распределения давления для стационарной (кривая 1) и нестационарной модели (кривая 2) при стабилизации трещины

Fig. 7. Comparison of pressure distributions in the (1) stationary and (2) non-stationary models under fracture stabilization conditions

Выводы

1. Разработаны стационарная и нестационарная модели стабилизации трещины автоГРП, позволяющие однозначно определить длину трещины из баланса расхода закачиваемой жидкости и оттока из трещины в пласт.

2. Проанализирована динамика развития трещины автоГРП, определенная по нестационарной модели, проведено сравнение с классической моделью PKN. Длина трещины по нестационарной модели растет медленнее, чем по модели PKN, поскольку в случае модели PKN не наблюдается выход на стационарные значения длины трещины из-за требования удаления правой границы расчетной области.

3. Показано, что количество ячеек численной сетки практически не влияет на динамику роста трещины, однако укрупнение сетки приводит к размытию фронта давления.

4. Определено, что при моделировании развития трещины автоГРП по нестационарной модели длина трещины ограничена значением, при котором отток воды из трещины в пласт компенсирует приток флюида из скважины. Это значение согласуется с результатами расчетов по стационарной модели.

Список источников

1. Петухов Н.Ю., Кулушев М.М., Емельянов А.Г., Мироненко А.А. Опыт реализации программы ограничения закачки рабочего агента на Приобском месторождении // Нефтяное хозяйство. 2020. № 10. С. 54–58. doi: 10.24887/0028-2448-2020-10-54-58
2. Yang Y., Xiao W., Bernabe Y., Xie Q., Wang J., He Y., Li M., Chen M., Ren J., Zhao J., Zheng L. Effect of pore structure and injection pressure on waterflooding in tight oil sandstone cores using NMR technique and pore network simulation // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2022. V. 217. Art. 110886. doi: 10.1016/j.petrol.2022.110886

3. Андреева А.И., Афанасьев А.А. Сравнение оптимальных режимов водогазового воздействия в рамках одномерной и двумерной постановок задачи фильтрации // Вычислительная механика сплошных сред. 2022. Т. 15, № 3. С. 253–262. doi: 10.7242/1999-6691/2022.15.3.19
4. Yan X., Yu H. Numerical simulation of hydraulic fracturing with consideration of the pore pressure distribution based on the unified pipe-interface element model // Engineering Fracture Mechanics. 2022. V. 275. Art. 108836. doi: 10.1016/j.engfracmech.2022.108836
5. Lv M., Xue B., Guo W., Guan B. Novel calculation method to predict gas–water two-phase production for the fractured tight-gas horizontal well // Journal of Petroleum Exploration and Production Technology. 2023. V. 13. P. 1–15. doi: 10.1007/s13202-023-01696-1
6. Chang X., Xu E., Guo Y., Yang C., Hu Z., Guo W. Experimental study of hydraulic fracture initiation and propagation in deep shale with different injection methods // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2022. V. 216. Art. 110834. doi: 10.1016/j.petrol.2022.110834
7. Feng N., Chang Y., Wang Z., Liang T., Guo X., Zhu Y., Hu L., Wan Y. Comprehensive evaluation of waterflooding performance with induced fractures in tight reservoir: a field case // Geofluids. 2021. V. 2021. P. 1–11. doi: 10.1155/2021/6617211
8. Шель Е.В., Кабанова П.К., Ткаченко Д.Р., Базыров И.Ш., Логвинюк А.В. Моделирование инициации и распространения трещины гидроразрыва пласта на нагнетательной скважине для не трещиноватых терригенных пород на примере Приобского месторождения // ПРОНЕФТЬ. Профессионально о нефти. 2020. № 2 (16). С. 36–42. doi: 10.7868/S2587739920020056
9. Давлетбаев А.А., Байков В.А., Бикбулатова Г.Р., Асмандияров Р.Н., Назаргалин Э.Р., Слабейкий А.А., Сергейчев А.В., Нуриев Р.И. Промысловые исследования по изучению самопроизвольного развития техногенных трещин в нагнетательных скважинах // Российская техническая нефтегазовая конференция и выставка SPE по разведке и добыче, Москва, Россия, 14–16 октября 2014. М., 2014. Статья SPE-171232-RU. С. 1–9. doi: 10.2118/171232-RU
10. Гараева А.Н., Королев Э.А., Храмченков М.Г. Особенности кольматации порового пространства в напряженно-деформируемых глинистых коллекторах // Нефтяное хозяйство. 2017. № 8. С. 72–74. doi: 10.24887/0028-2448-2017-8-72-74
11. Шляпкин А.С. Подход к моделированию гидроразрыва пласта в скважинах с горизонтальным окончанием // Нефтепромысловое дело. 2020. № 9. С. 14–19.
12. Seright R. Gel propagation through fractures // Society of Petroleum Engineers, SPE/DOE Improved Oil Recovery Symposium, April 3–5, 2000, Tulsa, USA. 2000. Conference paper SPE 59316. P. 1–9. doi: 10.2118/59316-MS
13. Шляпкин А.С., Татосов А.В. О решении задачи гидроразрыва пласта в одномерной математической постановке // Нефтяное хозяйство. 2020. № 12. С. 118–121. doi: 10.24887/0028-2448-2020-12-118-121
14. Черный С.Г., Лапин В.Н., Есипов Д.В., Куранаков Д.С. Методы моделирования зарождения и распространения трещин. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016.
15. Есипов Д.В., Куранаков Д.С., Лапин В.Н., Черный С.Г. Математические модели гидроразрыва пласта // Вычислительные технологии. 2014. Т. 19, № 2. С. 33–61.
16. Ивашинов О.Е., Смирнов Н.Н. Формирование трещины гидроразрыва в пористой среде // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2003. № 6. С. 28–36.
17. Ентов В.М., Зазовский А.Ф., Стелин И.Б., Хараидзе Д.М. Одномерная модель распространения трещины гидроразрыва // Численные методы решения задач фильтрации. Динамика многофазных сред: материалы IX Всесоюз. семинара, 1989, Новосибирск, ИТПМ СО АН СССР, 1989. С. 91–95.
18. Paullo Munoz L.F., Mejia C., Rueda J., Roehl D. Pseudo-coupled hydraulic fracturing analysis with displacement discontinuity and finite element methods // Engineering Fracture Mechanics. 2022. V. 274. Art. 108774. doi: 10.1016/j.engfracmech.2022.108774
19. Zhou Y., Yang D., Zhang X., Chen W., Xia X. Numerical investigation of the interaction between hydraulic fractures and natural fractures in porous media based on an enriched FEM // Engineering Fracture Mechanics. 2020. V. 235. Art. 107175. doi: 10.1016/j.engfracmech.2020.107175

20. Geertsma J., de Klerk F. A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures // *Journal of Petroleum Technology*. 1969. V. 12. P. 1571–1581.
21. Detournay E., Cheng A.H.-D., McLennan J.D. A poroelastic PKN hydraulic fracture model based on an explicit moving mesh algorithm // *Journal of Energy Resources Technology*. 1990. V. 112 (4). P. 224–230.
22. Татосов А.В., Шляпкин А.С. Движение проппанта в раскрывающейся трещине гидроразрыва пласта // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2018. Т. 18, № 2. С. 217–226. doi: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-217-226
23. Parchei-Esfahani M., Gee B., Gracie R. Dynamic hydraulic stimulation and fracturing from a wellbore using pressure pulsing // *Engineering Fracture Mechanics*. 2020. V. 235. Art. 107152. doi: 10.1016/j.engfracmech.2020.107152
24. Хабибуллин И.Л., Хисамов А.А. Моделирование нестационарной фильтрации в системе пласт – трещина гидроразрыва // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2022. № 77. С. 158–168. doi: 10.17223/19988621/77/12
25. Анурьев Д.А., Фёдоров К.М., Гильманов А.Я., Шевелёв А.П., Морозовский Н.А., Торопов К.В. Анализ возможности блокирования трещин автоГРП суспензионной системой // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2023. № 84. С. 36–51. doi: 10.17223/19988621/84/4

References

1. Petukhov N.Yu., Kulushev M.M., Emel'yanov A.G., Mironenko A.A. (2020) Opyt realizatsii programmy ogranicheniya zakachki rabocheho agenta na Priobskom mestorozhdenii [Experience in implementation a program for limiting the injection of a working agent at the Priobskoye field]. *Neftyanoe khozyaystvo – Oil Industry*. 10. pp. 54–58. doi: 10.24887/0028-2448-2020-10-54-58
2. Yang Y., Xiao W., Bernabe Y., Xie Q., Wang J., He Y., Li M., Chen M., Ren J., Zhao J., Zheng L. (2022) Effect of pore structure and injection pressure on waterflooding in tight oil sandstone cores using NMR technique and pore network simulation. *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 217. Article 110886. doi: 10.1016/j.petrol.2022.110886
3. Andreeva A.I., Afanasyev A.A. (2022) Comparison of optimal modes of water-gas impact within the framework of one-dimensional and two-dimensional formulations of the filtration problem. *Computational Continuum Mechanics*. 15(3). pp. 253–262. doi: 10.7242/1999-6691/2022.15.3.19
4. Yan X., Yu H. (2022) Numerical simulation of hydraulic fracturing with consideration of the pore pressure distribution based on the unified pipe-interface element model. *Engineering Fracture Mechanics*. 275. Article 108836. doi: 10.1016/j.engfracmech.2022.108836
5. Lv M., Xue B., Guo W., Guan B. (2023) Novel calculation method to predict gas–water two-phase production for the fractured tight-gas horizontal well. *Journal of Petroleum Exploration and Production Technology*. 13. pp. 1–15. doi: 10.1007/s13202-023-01696-1
6. Chang X., Xu E., Guo Y., Yang C., Hu Z., Guo W. (2022) Experimental study of hydraulic fracture initiation and propagation in deep shale with different injection methods. *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 216. Article 110834. doi: 10.1016/j.petrol.2022.110834
7. Feng N., Chang Y., Wang Z., Liang T., Guo X., Zhu Y., Hu L., Wan Y. (2021) Comprehensive evaluation of waterflooding performance with induced fractures in tight reservoir: a field case. *Geofluids*. 2021. pp. 1–11. doi: 10.1155/2021/6617211
8. Shel' E.V., Kabanova P.K., Tkachenko D.R., Bazyrov I.Sh., Logvinyuk A.V. (2020) Modelirovanie initsiatsii i rasprostraneniya treshchiny gidrorazryva plasta na nagnetatel'noy skvazhine dlya ne treshchinovatykh terrigennykh porod na primere Priobskogo mestorozhdeniya [Modeling the initiation and propagation of a hydraulic fracturing at an injection well for non-fractured terrigenous rocks using the example of the Priobskoye field]. *PRONEFT*.

- Professional'no o nefti – PRONEFT. Professionally about Oil.* 2(16). pp. 36–42. doi: 10.7868/S2587739920020056
9. Davletbaev A.Ya., Baykov V.A., Bikbulatova G.R., Asmandiyarov R.N., Nazargalin E.R., Slabetsky A.A., Sergeychev A.V., Nuriev R.I. (2014) Field studies of spontaneous growth of induced fractures in injection wells. *Russian Oil and Gas Exploration and Production Technical Conference and Exhibition, Moscow, Russia.* Article SPE-171232-MS. pp. 1–9. doi: 10.2118/171232-MS
 10. Garaeva A.N., Korolev E.A., Khranchenkov M.G. (2017) Osobennosti kol'matatsii porovogo prostranstva v napryazhenno-deformiruemyykh glinistykh kollektorakh [Some peculiarities of pore space colmatation process in stress heterogeneous clayey reservoirs]. *Neftyanoe khozyaystvo – Oil Industry.* 8. pp. 72–74. doi: 10.24887/0028-2448-2017-8-72-74
 11. Shlyapkin A.S. (2020) Podkhod k modelirovaniyu gidrorazryva plasta v skvazhinakh s gorizontalmym okonchaniem [An approach to modeling hydraulic fracturing in wells with horizontal completion]. *Neftpromyslovoye delo – Oilfield Engineering.* 9. pp. 14–19.
 12. Seright R. (2000) Gel propagation through fractures. *Society of Petroleum Engineers.* Article SPE 59316. pp. 1–9. doi: 10.2118/59316-MS
 13. Shlyapkin A.S., Tatosov A.V. (2020) O reshenii zadachi gidrorazryva plasta v odnomernoy matematicheskoy postanovke [On solving the fracturing problem in a hybrid PKN-KGD formulation]. *Neftyanoe khozyaystvo – Oil Industry.* 12. pp. 118–121. doi: 10.24887/0028-2448-2020-12-118-121
 14. Chyorny S.G., Lapin V.N., Esipov D.V., Kuranakov D.S. (2016) *Metody modelirovaniya zarozhdeniya i rasprostraneniya treshchin* [Methods of modeling the initiation and propagation of fractures]. Novosibirsk: Izdatel'stvo SO RAN.
 15. Esipov D.V., Kuranakov D.S., Lapin V.N., Chyorny S.G. (2014) Matematicheskie modeli gidrorazryva plasta [Mathematical models of hydraulic fractures]. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies.* 19(2). pp. 33–61.
 16. Ivashnev O.E., Smirnov N.N. (2003) Formirovanie treshchiny gidrorazryva v porистой srede [Formation of a hydraulic fracturing in a porous medium]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika – Moscow University Mechanics Bulletin.* 6. pp. 28–36.
 17. Entov V.M., Zazovskiy A.F., Stelin I.B., Kharaidze D.M. (1989) Odnomernaya model' rasprostraneniya treshchiny gidrorazryva [One-dimensional model of hydraulic fracture propagation]. *Materiyy IX Vsesoyuznogo seminar «Chislennyye metody resheniya zadach fil'tratsii. Dinamika mnogofaznykh sred» – Proceedings of the IX All-Union Seminar “Numerical methods for solving filtration problems. Dynamics of Multiphase Media.”.* Novosibirsk, ITPM SO AN USSR. pp. 91–95.
 18. Paulo Munoz L.F., Mejia C., Rueda J., Roehl D. (2022) Pseudo-coupled hydraulic fracturing analysis with displacement discontinuity and finite element methods. *Engineering Fracture Mechanics.* 274. Article 108774. doi: 10.1016/j.engfracmech.2022.108774
 19. Zhou Y., Yang D., Zhang X., Chen W., Xia X. (2020) Numerical investigation of the interaction between hydraulic fractures and natural fractures in porous media based on an enriched FEM. *Engineering Fracture Mechanics.* 235. Article 107175. doi: 10.1016/j.engfracmech.2020.107175
 20. Geertsma J., de Klerk F. (1969) A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures. *Journal of Petroleum Technology.* 12. pp. 1571–1581. doi: 10.2118/2458-PA
 21. Detournay E., Cheng A.H.-D., McLennan J.D. (1990) A poroelastic PKN hydraulic fracture model based on an explicit moving mesh algorithm. *Journal of Energy Resource Technology.* 112(4). pp. 224–230. doi: 10.1115/1.2905762
 22. Tatosov A.V., Shlyapkin A.S. (2018) Dvizhenie proppanta v raskryvayushchey treshchine gidrorazryva plasta [The motion of propping agent in an opening crack in hydraulic fracturing plast]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika – Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics.* 18(2). pp. 217–226. doi: 10.18500/1816-9791-2018-18-2-217-226

23. Parchei-Esfahani M., Gee B., Gracie R. (2020) Dynamic hydraulic stimulation and fracturing from a wellbore using pressure pulsing. *Engineering Fracture Mechanics*. 235. Article 107152. doi: 10.1016/j.engfracmech.2020.107152
24. Khabibullin I.L., Khisamov A.A. (2022) Modelirovanie nestatsionarnoy fil'tratsii v sisteme plast – treshchina gidrorazryva [Modeling of unsteady filtration in a formation–hydraulic fracture system]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 77. pp. 158–168. doi: 10.17223/19988621/77/12
25. Anur'ev D.A., Fedorov K.M., Gil'manov A.Ya., Shevelev A.P., Morozovskiy N.A., Toropov K.V. (2023) Analiz vozmozhnosti blokirovaniya treshchin avtoGRP suspenzionnoy sistemoy [Analysis of the possibility of technogenic fracture blocking using a suspension system]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 84. pp. 36–51. doi: 10.17223/19988621/84/4

Сведения об авторах:

Гильманов Александр Янович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры моделирования физических процессов и систем Школы естественных наук Тюменского государственного университета (Тюмень, Россия). E-mail: a.y.gilmanov@utmn.ru

Касенинов Руслан Жаканович – студент магистратуры по направлению «Техническая физика» Школы естественных наук Тюменского государственного университета (Тюмень, Россия). E-mail: stud0000243578@study.utmn.ru

Кузнецов Артем Валерьевич – аспирант Школы естественных наук Тюменского государственного университета (Тюмень, Россия). E-mail: stud0000219214@study.utmn.ru

Шевелёв Александр Павлович – кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры моделирования физических процессов и систем Школы естественных наук Тюменского государственного университета (Тюмень, Россия). E-mail: a.p.shevelev@utmn.ru

Information about the authors:

Gil'manov Aleksandr Ya. (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation). E-mail: a.y.gilmanov@utmn.ru

Kaseinov Ruslan Zh. (School of Natural Sciences, University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation). E-mail: stud0000243578@study.utmn.ru

Kuznetsov Artyom V. (School of Natural Sciences, University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation). E-mail: stud0000219214@study.utmn.ru

Shevelev Aleksandr P. (Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation). E-mail: a.p.shevelev@utmn.ru

Статья поступила в редакцию 16.05.2024; принята к публикации 09.06.2025

The article was submitted 16.05.2024; accepted for publication 09.06.2025