

Научная статья

УДК 534.1

doi: 10.17223/19988621/95/13

Вертикальные колебания жесткой полосы на вязкоупругой полуплоскости

Исмоил Иброхимович Сафаров¹, Мухсин Худойбердиевич Тешаев²,
Баходир Негматиллаев³, Максуд Шарипович Ахмедов⁴

¹ Ташкентский химико-технологический институт, Ташкент, Узбекистан

² Институт математики им. В.И. Романовского Академии наук
Республики Узбекистан, Бухара, Узбекистан

^{3,4} Бухарский инженерно-технологический институт, Бухара, Узбекистан

¹ safarov54@mail.ru

² muhsin_5@mail.ru

³ proins@mail.ru

⁴ maksud.akhmedov.1985@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются вертикальные колебания жесткой полосы на вязкоупругой полуплоскости под действием вертикальной нагрузки. Цель исследования – разработка методики решения задачи и алгоритма для определения нормальной реакции основания, перемещения полосы и вязкоупругой полуплоскости. Методом двойного преобразования Лапласа и Фурье решается задача Лэмба для вязкоупругой полуплоскости. Динамическая контактная задача решена с привлечением численных методов. Установлено, что учет вязкоупругих свойств основания (или полупространства) в значительной мере влияет на динамическую реакцию.

Ключевые слова: жесткий штамп, вертикальная нагрузка, контактное напряжение, вязкоупругая плоскость

Для цитирования: Сафаров И.И., Тешаев М.Х., Негматиллаев Б.Н., Ахмедов М.Ш. Вертикальные колебания жесткой полосы на вязкоупругой полуплоскости // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 95. С. 152–163. doi: 10.17223/19988621/95/13

Original article

Oscillations of a rigid strip on a viscoelastic half-plane under the vertical load

Ismoil I. Safarov¹, Mukhsin Kh. Teshayev²,
Bakhadir Negmatillaev³, Maksud Sh. Akhmedov⁴

¹ Tashkent Institute of Chemical Technology, Tashkent, Uzbekistan

² Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan, Bukhara, Uzbekistan

^{3,4} Bukhara Institute of Engineering and Technology, Bukhara, Uzbekistan

¹ safarov54@mail.ru

² muhsin_5@mail.ru

³ proins@mail.ru

⁴ maqsud.axmedov.1985@mail.ru

Abstract. The oscillations of a rigid strip on a viscoelastic half-plane under the action of a vertical load are considered. The strip is exposed to a time-dependent vertical force. The aim of this study is to develop a problem-solving technique and an algorithm to determine the normal response of the base and the displacement of the strip and viscoelastic half-plane. The contact stress of the half-plane is specified as a series expansion by Chebyshev polynomials of the first kind. The Lamb problem for a viscoelastic plane is solved using the method of double Laplace and Fourier transforms. The problem of oscillations of rigid and viscoelastic beam slabs on a viscoelastic half-plane is considered using the Fourier series method. It is concluded that the Fourier series and Fourier transform methods allow analytical solving of dynamic contact problems for arbitrary viscoelastic kernels. However, when applying this methodology, certain restrictions are placed on the type of loading function. The determination of displacements and stresses from the obtained analytical expressions is a separate and rather complicated computational problem. Thus, the dynamic contact problem is solved using numerical methods.

Keywords: rigid die, vertical load, contact stress, viscoelastic plane

For citation: Safarov, I.I., Teshae, M.Kh., Negmatillaev, B.N., Akhmedov, M.Sh. (2025) Oscillations of a rigid strip on a viscoelastic half-plane under the vertical load. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 95. pp. 152–163. doi: 10.17223/19988621/95/13

Введение

В литературе подробно освещены исследования колебаний штампа, когда основание упругое. В [1–4] рассматриваются задачи гармонических колебаний круглого штампа, лежащего на упругом полупространстве. В этих работах парные интегральные уравнения сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма II рода, которые решены двумя методами: методом последовательных приближений и заменой полученной системы системой алгебраических уравнений.

В работе [5] анализируется задача взаимного влияния двух круглых штампов, совершающих гармонические колебания, когда напряжения под штампами распределены равномерно, а в [6] в приближенной постановке изучены свободные колебания штампа.

В работах [7–10] рассмотрены задачи, когда подошва штампа не плоская, и при наличии сцепления. В [11–14] исследованы нестационарные колебания круглого штампа и для контактных напряжений получены приближенные выражения. В работах [15–17] рассматривается невесомый квадратный штамп, когда на него действуют импульсные нагрузки. В этом случае методом Б.Н. Жемочкина определены контактные напряжения в нескольких точках в заданные моменты времени. Им же в приближенной постановке исследованы нестационарные колебания двух массивов [18, 19]. Способ определения нормальных контактных напряжений под жестким штампом, расположенным на упругом полупространстве, приводится в работах [20–23]. Исследованы колебания балочных плит конечной жесткости, лежащих на упругой полуплоскости, методом ортогональных полиномов Чебышева.

В работе [24] предложен эффективный итерационный подход для расчета балок и плит на нелинейно-упругом неоднородном основании. Этот подход позволяет полностью найти НДС основания, внутренние усилия и осадки плиты. В [25] разработан универсальный алгоритм решения контактной задачи о действии штампа на границу упругого штампа. В работе [26] рассмотрена пространственная контактная задача об одновременном действии на грани упругого клина эллиптического в плане штампа и сосредоточенной силы, приложенной вне области контакта на ребре клина.

В вышеприведенном обзоре работ по статическим и динамическим контактным задачам основание штампа рассматривается как упругое полупространство, на которое действует внешняя нагрузка. Однако при использовании этой теории не учитывается деформирование во времени, т.е. внутреннее трение материала.

Постановка задачи и методы решения

Пусть на жесткую полосу с шириной, равной единице, и длиной $2a$ воздействует динамическая нагрузка $P(t)$ в вертикальном направлении. Требуется определить нормальную реакцию основания $p(x, t)$ и вертикальное перемещение полосы $\omega(t)$.

Дифференциальное уравнение движения полосы

$$M_0 \frac{C_2^2}{a^2} \frac{d^2 \omega(t)}{dt^2} = P(t) - R(t), \quad (1)$$

и условие плотного прилегания поверхности плиты к основанию

$$\omega(t) = v(x, 0, t), \quad |x| \leq 1, \quad (2)$$

где $R(t) = 2a \int_0^1 p(x, t) dx$, M_0 – масса полосы, $C_2 = \sqrt{\mu / \rho}$ – скорость распространения поперечных волн, μ , ρ – модуль упругости и плотность материала полосы, $p(x, t)$ – реактивное давление основания.

Для решения задачи воспользуемся уравнениями движения полуплоскости в перемещениях:

$$\begin{aligned} (1 - K^*) \left[\frac{d^2 u}{dx^2} + (1 - \beta^2) \frac{d^2 v}{dx dy} + \beta^2 \frac{d^2 u}{dy^2} \right] &= \beta^2 \frac{d^2 u}{dt^2}; \\ (1 - K^*) \left[\beta^2 \frac{d^2 v}{dx^2} + (1 - \beta^2) \frac{d^2 u}{dx dy} + \frac{d^2 v}{dy^2} \right] &= \beta^2 \frac{d^2 v}{dt^2}, \end{aligned}$$

где K – интегральный оператор вида:

$$\begin{aligned} K^* f &= \int_0^t K(t - \tau) f(\tau) d\tau; \\ \beta^2 &= \frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{2} \frac{1 - 2\nu_0}{1 - \nu_0}; \quad C_1 = \frac{\sqrt{\lambda + 2\mu}}{\rho_0}; \quad C_2 = \frac{\sqrt{\mu}}{\rho_0}, \end{aligned} \quad (3)$$

C_1 и C_2 – скорости продольной и поперечной волн; λ , μ , ρ_0 – коэффициенты Ламе и плотность материала полуплоскости соответственно.

Применяя к уравнениям (1) преобразование Лапласа по времени, при нулевых начальных условиях получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} + (1 - \beta^2) \frac{d^2 \bar{v}}{dx dy} + \beta^2 \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} &= \frac{\beta^2 v}{1 - \bar{K}} \bar{u}; \\ \beta^2 \frac{d^2 \bar{v}}{dx^2} + (1 - \beta^2) \frac{d^2 \bar{u}}{dx dy} + \frac{d^2 \bar{v}}{dy^2} &= \frac{\beta^2 v}{1 - \bar{K}} \bar{v}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\bar{u}, \bar{v}, \bar{K}$ – Лаплас-образы функций $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $K(t)$; δ – параметр Лаплас-преобразования.

В дальнейшем вводятся в рассмотрение функции $\bar{\varphi}(x, y, \delta)$ и $\bar{\psi}(x, y, \delta)$:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{a} \frac{d \bar{\varphi}}{dx} + \frac{1}{a} \frac{d \bar{\psi}}{dy}; \\ \bar{v} &= \frac{1}{a} \frac{d \bar{\varphi}}{dy} - \frac{1}{a} \frac{d \bar{\psi}}{dx}. \end{aligned} \quad (5)$$

Тогда уравнения (4) приводятся к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{\varphi}}{dx^2} + \frac{d^2 \bar{\varphi}}{dy^2} &= \frac{\beta^2 \delta^2}{1 - \bar{K}} \bar{\varphi}; \\ \frac{d^2 \bar{\psi}}{dx^2} + \frac{d^2 \bar{\psi}}{dy^2} &= \frac{\delta^2}{1 - \bar{K}} \bar{\psi}. \end{aligned} \quad (6)$$

Применяя к уравнениям (6) преобразование Фурье (ПФ), получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{\bar{\varphi}}}{dy^2} - \left(\xi^2 + \frac{\beta^2 \delta^2}{1 - \bar{K}} \right) \bar{\bar{\varphi}} &= 0; \\ \frac{d^2 \bar{\bar{\psi}}}{dy^2} - \left(\xi^2 + \frac{\delta^2}{1 - \bar{K}} \right) \bar{\bar{\psi}} &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где ПФ функций $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\varphi}}(\xi, y, \delta) &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(x, y, \delta) e^{i\xi x} dx; \\ \bar{\bar{\psi}}(\xi, y, \delta) &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(x, y, \delta) e^{i\xi x} dx. \end{aligned}$$

здесь ξ – параметр ПФ.

Учитывая условия затухания напряжений при $y \rightarrow \infty$, решение уравнений (7) представим в виде:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\varphi}} &= A(\xi, \delta) e^{-y \sqrt{\xi^2 + \frac{\beta^2 \delta^2}{1 - \bar{K}}}}; \\ \bar{\bar{\psi}} &= B(\xi, \delta) e^{-y \sqrt{\xi^2 + \frac{\delta^2}{1 - \bar{K}}}}, \end{aligned} \quad (8)$$

где коэффициенты $A(\xi, \delta)$ и $B(\xi, \delta)$ находятся из граничных условий

$$\bar{\sigma}_y(x, 0, \delta) = -\bar{P}(x, \delta); \quad \bar{\tau}_{x,y}(x, 0, \delta) = 0. \quad (9)$$

Выражения напряжений σ_y и τ_{xy} через функции $\varphi(x, y, \delta)$ и $\psi(x, y, \delta)$:

$$\begin{aligned}\sigma_y(x, y, t) &= \frac{\lambda}{a^2} (1 - K^*) \Delta \varphi + \frac{2\mu}{a^2} (1 - K^*) \left(\frac{d^2 \varphi}{dy^2} - \frac{d^2 \psi}{dx^2} \right); \\ \tau_{xy}(x, y, t) &= \frac{\mu}{a^2} (1 - K^*) \left(2 \frac{d^2 \varphi}{dx dy} + \frac{d^2 \psi}{dy^2} - \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right).\end{aligned}\quad (10)$$

Подставляя на граничные условия (9), получаем:

$$\begin{aligned}\left(\xi^2 + \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{1 - \bar{K}} \right) A(\xi, \delta) - i \xi \sqrt{\xi^2 + \frac{\delta^2}{1 - \bar{K}}} B(\xi, \delta) &= - \frac{a^2 \bar{P}(\xi, \delta)}{2\mu(1 - \bar{K})}; \\ i \xi \sqrt{\xi^2 + \frac{\beta^2 \delta^2}{1 - \bar{K}}} A(\xi, \delta) + \left(\xi^2 + \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{1 - \bar{K}} \right) B(\xi, \delta) &= 0,\end{aligned}\quad (11)$$

где двойное преобразование заданной функции $P(x, t)$ имеет вид:

$$\bar{P}(\xi, \delta) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} p(x, t) e^{i\xi x - \delta t} dt dx. \quad (12)$$

Из системы (11) очевидно, что

$$\begin{aligned}A(\xi, \delta) &= - \frac{a^2}{\mu(1 - \bar{K})} \frac{2\xi^2 + \frac{\delta^2}{1 - \bar{K}}}{F_1(\xi, \delta)} \bar{P}(\xi, \delta); \\ B(\xi, \delta) &= \frac{2ia^2}{\mu(1 - \bar{K})} \frac{\xi \sqrt{\xi^2 + \frac{\beta^2 \delta^2}{1 - \bar{K}}}}{F_1(\xi, \delta)} \bar{P}(\xi, \delta).\end{aligned}\quad (13)$$

Здесь

$$F_1(\xi, \delta) = \left(2\xi^2 + \frac{\delta^2}{1 - \bar{K}} \right)^2 - 4\xi^2 \sqrt{\xi^2 + \frac{\beta^2 \delta^2}{1 - \bar{K}}} \sqrt{\xi^2 + \frac{\delta^2}{1 - \bar{K}}}.$$

Подставляя (13) в выражение (9), после некоторых математических преобразований для определения вертикальных $v(x, 0, t)$ и горизонтальных $u(x, 0, t)$ перемещений вязкоупругой полуплоскости имеем

$$\begin{aligned}v(x, 0, t) &= \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta^2 \sqrt{\xi^2 + \frac{\beta^2 \delta^2}{1 - \bar{K}}}}{(1 - \bar{K}) F_1(\xi, \delta)} \bar{P}(\xi, \delta) e^{\delta t - i\xi x} d\xi d\delta; \\ u(x, 0, t) &= \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\pi i} \times \\ &\times \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(2\xi^2 + \frac{\delta^2}{1 - \bar{K}} \right) - 2 \sqrt{\xi^2 + \frac{\beta^2 \delta^2}{1 - \bar{K}}} \sqrt{\xi^2 + \frac{\delta^2}{1 - \bar{K}}} \right] \frac{\bar{P}(\xi, \delta) e^{\delta t - i\xi x}}{(1 - \bar{K}) F_1(\xi, \delta)} d\xi d\delta.\end{aligned}\quad (14)$$

Таким образом, применение метода двойного преобразования Лапласа и Фурье к решению динамических задач вязкоупругости создает ряд сложностей в получении численных результатов.

Следуя [16], решение уравнений (14), т.е., контактное напряжение полуплоскости, ищем в виде:

$$P(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m}(t) \frac{T_{2m}(x)}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (15)$$

Разложив (15) по координате t в ряд Фурье и применяя ПФ по координате x , получим

$$\bar{P}(\xi, t) = a \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m A_{2m,k} J_{2m}(\xi) \exp\left(\frac{ik\pi}{T} t\right), \quad (16)$$

где

$$A_{2m,k} = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} A_{2m}(t) \exp\left(\frac{ik\pi}{T} t\right) dt.$$

Подставляя (16) в уравнения (14) и учитывая, что

$$\begin{aligned} R(t) &= \pi a \sum_{k=1}^{\infty} A_{0,k} \exp\left(\frac{ik\pi}{T} t\right) dt; \\ P(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} P_k \exp\left(\frac{ik\pi}{T} t\right) dt, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$A_{2m,k} = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} P(t) \exp\left(\frac{ik\pi}{T} t\right) dt,$$

имеем

$$A_{0,k} - \frac{k^2 \pi^2}{T^2} m_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m A_{2m,k}}{1-K} \int_0^{\infty} \frac{\delta^2 \sqrt{\xi^2 + \beta^2 \delta^2}}{F_k(\xi)} J_{2m} \cos x \xi d\xi = \frac{P_k}{\pi a}.$$

Учитывая условие (2), подставляем (3) в уравнение (1):

$$\begin{aligned} -\frac{k^2 \pi^2}{T^2} M_0 \sqrt{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta^2}{1-K} \exp\left(\frac{ik\pi}{T} t\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{P}_k(\xi) \sqrt{\xi^2 + \beta^2 \delta^2}}{F_k(\xi)} \cos x \xi d\xi &= P(t) - R(t); \\ (|x| \leq 1); \quad \int_0^{\infty} \bar{P}_k(\xi) \cos x \xi d\xi &= 0; \quad (|x| > 1). \end{aligned}$$

Здесь

$$m_0 = \frac{2}{\pi} \frac{h\rho}{a\rho_0}.$$

В соответствии с результатами, полученными для вертикального перемещения на границе полуплоскости, имеем

$$v(x, 0, t) = \frac{1}{\mu \sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta^2}{1-K} \exp\left(\frac{ik\pi}{T} t\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{P}_k(\xi) \sqrt{\xi^2 + \beta^2 \delta^2}}{F_k(\xi)} e^{i\xi x} d\xi. \quad (18)$$

Интеграл в выражении (18), в соответствии с [23], может быть записан в виде:

$$\int_0^{\infty} \frac{\delta^2 \sqrt{\xi^2 + \beta^2 \delta^2}}{F_k(\xi)} J_{2m} \cos x \xi d\xi = (-1)^m \left[C_{2m,0} + 2 \sum_{r=1}^{\infty} C_{2m,2r} T_{2r}(x) \right], \quad (|x| \leq 1), \quad (19)$$

где

$$C_{2m,2r} = \frac{2}{\pi} \left[-\pi \frac{\sqrt{\eta_1^2 - \beta^2}}{F'(\eta_1)} Z_{2m}(\delta\eta_1) + \int_0^\beta \frac{\sqrt{\beta^2 - \eta^2}}{F(\eta)} Z_{2m}(\delta\eta) d\eta + \right. \\ \left. + \int_\beta^1 \frac{4\eta^2 (\eta^2 - \beta^2) \sqrt{1 - \eta^2}}{f(\eta) F(\eta)} Z_{2m}(\delta\eta) K_{2r}(\delta\eta) d\eta \right]; \quad (20)$$

$$F(\eta) = (2\eta^2 - 1)^2 - 4\eta^2 \sqrt{(\eta^2 - \beta^2)} \sqrt{\eta^2 - 1};$$

$$f(\eta) = (2\eta^2 - 1)^2 + 4\eta^2 \sqrt{(\eta^2 - \beta^2)} \sqrt{\eta^2 - 1};$$

η_1 – наибольший действительный положительный корень (НДПК) уравнения

$$(2\eta^2 - 1)^2 - 4\eta^2 \sqrt{(\eta^2 - \beta^2)} = 0.$$

Подставляя разложение (18) в (1)

$$A_{0,k} - \frac{k^2 \pi^2}{T^2} m_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_{2m,k}}{1-K} \left[C_{2m,0} + 2 \sum_{r=1}^{\infty} C_{2m,2r} T_{2r}(x) \right] = \frac{P_k}{\pi a}; \quad (|x| \leq 1), \quad (21)$$

умножаем равенства (21) на $T_i(x)$ и с учетом ортогональности полиномов Чебышева, получаем

$$A_{0,k} - \frac{k^2 \pi^2}{T^2} m_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_{2m,k}}{1-K} C_{2m,0} = \frac{P_k}{\pi a}; \\ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_{2m,k}}{1-K} C_{2m,2r} = 0. \quad (22)$$

Подставляя решения уравнений (22) в выражения (14), контактные напряжения полуплоскости и перемещений полосы можно вычислить по формуле

$$\omega(t) = \frac{1}{\mu \pi m_0} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t (t-\tau) [P_k - \pi a A_{0,k}] \exp\left(\frac{ik\pi}{T} \tau\right) d\tau.$$

Результаты и анализ

На основе разработанного алгоритма получены численные результаты в программном комплексе MATLABe. В расчетах использовалось трехпараметрное ядро релаксации Колтунова–Ржаницина $K(t) = A e^{-\beta t} / t^{1-\alpha}$. Расчеты по соотношениям (15)–(22) проводились при следующих значениях основных параметров задачи: $\beta = 0.05$; $\alpha = 0.1$; $h = 0.5$; $\Delta t = 0.01$, $h/l = 0.1$, $\chi = 1.15$. Коэффициент Пуассона материала полупространства принят постоянным: $\nu = 0.25$. Вертикальная сила принята в виде треугольника

$$P(t) = P_0 \left(1 - \frac{t}{\tau_0} \right),$$

где P_0 – амплитуда вертикальной нагрузки, τ_0 – время воздействия нагрузок.

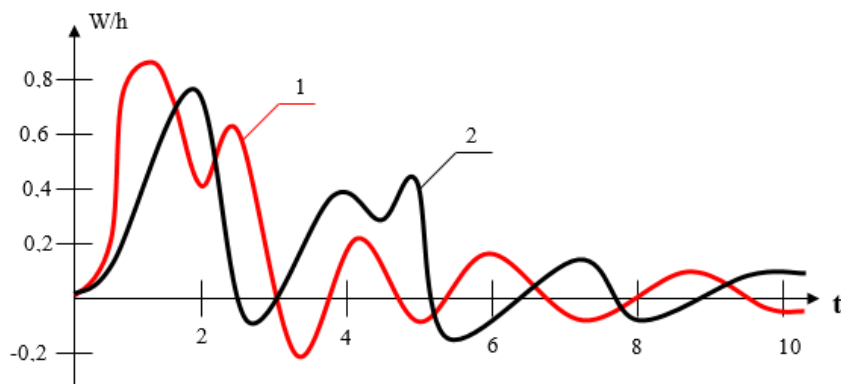


Рис. 1. Изменение перемещений жесткой полосы в функции от времени:
 $A = 0.0048$ (1); $A = 0.48$ (2)

Fig. 1. Displacement of a rigid strip as a function of time: $A =$ (1) 0.0048 and (2) 0.48

Воздействующая нагрузка принята нестационарной, в форме треугольника. На рис. 1 показано изменение перемещений жесткой полосы от времени при различной вязкости полупространства. Результаты расчетов показывают, что учет вязкоупругих свойств основания (или полупространства) в значительной мере влияет на динамическую реакцию.

Заключение

Разработаны методика и алгоритм решения задачи исследования вертикальных колебаний жесткой полосы на вязкоупругой полуплоскости под действием вертикальной нагрузки. Переход от изображений к оригиналам осуществляется приближенно. Методом рядов Фурье и преобразований Фурье контактные задачи аналитически решаются при произвольных ядрах вязкоупругости. Однако при применении этого метода ставятся определенные ограничения на вид функции нагружения. Определение смещений и напряжений по полученным аналитическим выражениям представляет собой отдельную, достаточно сложную вычислительную задачу. Найдено, что учет вязкоупругих свойств материалов полупространства оказывает существенное влияние на реакцию основания.

Список источников

1. Mitra M., Gopalakrishnan S. Guided Wave Based Structural Health Monitoring: Review. Smart Materials and Structures. 2016. V. 25 (5). P. 1–27. doi: 10.1088/0964-1726/25/5/053001
2. Учебные руководства и пособия по использованию COMSOL Multiphysics // COMSOL.ru. URL: <https://www.comsol.ru/documentation>
3. Umek A. Dynamic responses of building foundations to incident elastic waves: PhD Thesis. Illinois: Ill. Inst. Technol., 1973.
4. Рылько М.А. О движении в упругой среде жесткого прямоугольного включения под действием плоской волны // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1977. № 1. С. 158–164.
5. Вязов С.С. Вопросы теории деформируемости связных грунтов // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1966. Вып. 3. С. 1–4.

6. Бережной Д.В., Коноплев Ю.Г., Паймушин В.Н., Секаева Л.Р. Исследование взаимодействия бетонного коллектора с сухими и водонасыщенными грунтами // Математическое моделирование и краевые задачи: тр. Всерос. науч. конф. Самара: СамГТУ, 2004. Ч. 1: Математические модели механики, прочность и надежность конструкций. С. 37–39.
7. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. М.: Физматлит, 2004.
8. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975.
9. Сафаров И.И., Тешаев М.Х. Динамическое гашение колебаний твердого тела, установленного на вязкоупругих опорах // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2023. Т. 31 (1). С. 63–74. doi: 10.18500/0869-6632-003021.
10. Safarov I., Teshaev M. Control of resonant oscillations of viscoelastic systems // Theoretical and Applied Mechanics. 2023. V. 51 (1). P. 1–12. doi: 10.2298/TAM220510007S
11. Снеддон И. Преобразования Фурье. М.: Изд-во иностр. лит., 1955.
12. Оценка вибрации при проектировании, строительстве и эксплуатации объектов метрополитена: свод правил по проектированию и строительству СП 23-105–2004. М.: Госстрой России, 2004.
13. Залётов В.В. Распределение напряжений в изотропном полупространстве при заданных граничных условиях смешанного типа // Труды ИПММ НАН Украины. 2006. Т. 13. С. 83–91.
14. Chigirinsky V., Naumenko O. Studying the stressed state of elastic medium using the argument functions of a complex variable // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2019. V. 5/7 (101). P. 27–35.
15. Chigirinsky V., Naizabekov A., Lezhnev S., Kuzmin S., Naumenko O. Solving applied problems of elastic theory in geomechanics using the method of argument functions of a complex variable // Eastern European Journal of Enterprise Technologies. 2022. V. 5/7 (119). P. 105–113.
16. Chigirinsky V., Naizabekov A., Lezhnev S. Closed problem of plasticity theory // Journal of Chemical Technology and Metallurgy. 2021. V. 56 (4). P. 867–876.
17. Chigirinsky V., Putnoki A. Development of a dynamic model of transients in mechanical systems using argument functions // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2017. V. 3/7 (87). P. 11–21.
18. Safarov I.I., Teshaev M.Kh. Unsteady Motions of Spherical Shells in a Viscoelastic Medium // Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. 2023. № 83. P. 166–179. doi: 10.17223/19988621/83/14
19. Safarov I.I., Almuratov Sh.N., Teshaev M.Kh., Homidov F.F., Rayimov D.G. On the dynamic stress-strain state of isotropic rectangular plates on an elastic base under vibration loads // Indian Journal of Engineering. 2020. V. 17 (47). P. 127–133.
20. Феоктистов С.И., Андрианов И.К. Оценка верхнего и нижнего уровней допустимых деформаций при изготовлении листовых и тонкостенных деталей на основе диаграммы предельных деформаций // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 86. С. 136–148. doi: 10.17223/19988621/86/10
21. Usmonov B.Sh., Safarov I.I., Teshaev M.Kh. Nonlinear flutter of the transient process of hereditarily deformable systems in supersonic flight mode // Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. 2024. № 88. P. 124–137. doi: 10.17223/19988621/88/10
22. Mirsaidov M.M., Safarov I.I., Teshaev M.Kh. Oscillations of multilayer viscoelastic composite toroidal pipes // Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics. 2019. V. 13 (2). P. 105–116. doi: 10.24874/jsscm.2019.13.02.08.
23. Сеймов В.М. Динамические контактные задачи. Киев: Наукова думка, 1976.
24. Босаков С.В., Козунова О.В. Вариационно-разностный подход в решении контактной задачи для нелинейно-упругого неоднородного основания. Плоская деформация. Теория расчета // Вестник Белорусского национального технического университета. 2009. № 1. С. 5–13.

25. Дмитриева К.В. Контактная задача для штампа на упругом клине со свободными гранями // Вестник Белорусского национального технического университета. 2010. № 4. С. 24–29.
26. Молчанов А.А., Пожарский Д.А. Обсуждения контактной задачи Галина и взаимодействие штампов // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4 (4). С. 1636–1638.

References

1. Mitra M., Gopalakrishnan S. (2016) Guided wave based structural health monitoring: Review. *Smart Materials and Structures*. 25(5). pp. 1–27. doi: 10.1088/0964-1726/25/5/053001
2. *Uchebnye rukovodstva i posobiya po ispol'zovaniyu COMSOL Multiphysics* [Training guides and tutorials on how to use COMSOL Multiphysics]. URL: <https://www.comsol.ru/documentation>
3. Umek A. (1973) *Dynamic Responses of Building Foundations to Incident Elastic Waves*. PhD Thesis. Illinois: Illinois Institute of Technology.
4. Ryl'ko M.A. (1977) O dvizhenii v uprugoy srede zhestkogo pryamougol'nogo vklyucheniya pod deystviem ploskoy volny [About motion in an elastic medium of a rigid rectangular inclusion under the action of a plane wave]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela – Mechanics of Solids*. 1. pp. 158–164.
5. Vyalov S.S. (1966) Voprosy teorii deformiruемости svyazannykh gruntov [Questions of the theory of deformability of cohesive soils]. *Osnovaniya, fundamenty i mekhanika gruntov – Soil Mechanics and Foundation Engineering*. 3. pp. 1–4.
6. Berezhnoy D.V., Konoplev Yu.G., Paymushin V.N., Sekaeva L.R. (2004) Issledovanie vzaimodeystviya betonnoho kollektora s sukhimi i vodonasyshennymi gruntami [Investigation of interaction of a concrete collector with dry and water-saturated soils]. *Trudy Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii «Matematicheskoe modelirovanie i kraevye zadachi»*. Samara: SamGTU. pp. 37–39.
7. Gorshkov A.G., Medvedskiy A.L., Rabinskiy L.N., Tarlakovskiy D.V. (2004) *Volny v sploshnykh sredakh* [Waves in continuous media]. Moscow: FIZMATLIT.
8. Timoshenko S.P., Gud'er J. (1975) *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow: Nauka.
9. Safarov I.I., Teshaeв M.Kh. (2023) Dinamicheskoe gashenie kolebaniy tvyordogo tela, ustanovlennogo na vyazkouprugikh oporakh [Dynamic damping of vibrations of a solid body mounted on viscoelastic supports]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Prikladnaya nelineynaya dinamika – Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 31(1). pp. 63–74. doi: 10.18500/0869-6632-003021
10. Safarov I., Teshaeв M. (2024) Control of resonant oscillations of viscoelastic systems. *Theoretical and Applied Mechanics*. 51(1). pp. 1–12. doi: 10.2298/TAM220510007S
11. Sneddon E. (1955) Preobrazovaniya Fur'e [*Fourier transformations*]. Moscow: Izdatel'stvo inostrannoy literatury.
12. *Svod pravil po proektirovaniyu i stroitel'stvu SP 23-105-2004 “Otsenka vibratsii pri proektirovani, stroitel'stve i ekspluatatsii ob'ektov metropolitena* [Code of rules for design and construction SP 23-105-2004 “Vibration assessment during design, construction, and operation of metro facilities”] (2004) Moscow: Gosstroy Rossii
13. Zalyotov V.V. (2006) Raspredelenie napryazheniy v izotropnom poluprostranstve pri zadannykh granichnykh usloviyakh smeshannogo tipa [Distribution of stresses in isotropic half-space at the given boundary conditions of mixed type]. *Trudy IPMM NAN Ukrainy – Proceedings of IPMM NAS of Ukraine*. 13. pp. 83–91.
14. Chigirinsky V., Naumenko O. (2019) Studying the stressed state of elastic medium using the argument functions of a complex variable. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 5/7(101). pp. 27–35. doi: 10.15587/1729-4061.2019.177514
15. Chigirinsky V., Naizabekov A., Lezhnev S., Kuzmin S., Naumenko O. (2022) Solving applied problems of elastic theory in geomechanics using the method of argument functions of

- a complex variable. *Eastern European Journal of Enterprise Technologies*. 5/7(119). pp. 105–113. doi: 10.15587/1729-4061.2022.265673
16. Chigirinsky V., Naizabekov A., Lezhnev S. (2021) Closed problem of plasticity theory. *Journal of Chemical Technology and Metallurgy*. 56(4). pp. 867–876.
 17. Chigirinsky V., Putnoki A. (2017) Development of a dynamic model of transients in mechanical systems using argument functions. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 3/7(87). pp. 11–21. doi: 10.15587/1729-4061.2017.101282
 18. Safarov I.I., Tshaev M.Kh. (2023) Nestatsionarnye dvizheniya sfericheskikh obolochek v vyazkoupругoy srede [Unsteady motions of spherical shells in a viscoelastic medium]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 83. pp. 166–179. doi: 10.17223/19988621/83/14
 19. Safarov I.I., Almuratov Sh.N., Tshaev M.Kh., Homidov F.F., Rayimov D.G. (2020) On the dynamic stress-strain state of isotropic rectangular plates on an elastic base under vibration loads. *Indian Journal of Engineering*. 17(47). pp. 127–133.
 20. Feoktistov S.I., Andrianov I.K. (2023) Otsenka verkhnego i nizhnego urovney dopustimyykh deformatsiy pri izgotovlenii listovykh i tonkostennykh detaley na osnove diagrammy predel'nykh deformatsiy [Estimation of the upper and lower levels of permissible deformations at manufacturing of sheet and thin-walled parts on the basis of the diagram of limiting deformations]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University. Journal of Mathematics and Mechanics*. 86. pp. 136–148. doi: 10.17223/19988621/86/10
 21. Usmonov B.Sh., Safarov I.I., Tshaev M.Kh. (2024) Nelineynyy flatter perekhodnogo protsessa nasledstvenno-deformiruemyykh sistem pri sverkhzvukovom rezhime poleta [Nonlinear flutter of the transient process of hereditarily deformable systems in supersonic flight mode]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University. Journal of Mathematics and Mechanics*. 88. pp. 124–137. doi: 10.17223/19988621/88/10
 22. Mirsaidov M.M., Safarov I.I., Tshaev M.Kh. (2019) Oscillations of multilayer viscoelastic composite toroidal pipes. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*. 13(2). pp. 105–116. doi: 10.24874/jsscm.2019.13.02.08
 23. Seymov V.M. (1976) *Dinamicheskie kontaktnye zadachi* [Dynamic contact problems]. Kyiv: Naukova Dumka.
 24. Bosakov S.V., Kozunova O.V. (2009) Variatsionno-raznostnyy podkhod v reshenii kontaktnoy zadachi dlya nelineyno-uprugogo neodnorodnogo osnovaniya. Ploskaya deformatsiya. Teoriya rascheta. [Variation-difference approach in solving the contact problem for nonlinear-elastic inhomogeneous base. Flat deformation. Theory of calculation]. *Vestnik BNTU – Repository BNTU*. 1. pp. 5–13.
 25. Dmitrieva K.V. (2010) Kontaktnaya zadacha dlya shchampa na uprugom kline so svobodnymi granyami [Contact problem for a stamp on an elastic wedge with free faces]. *Vestnik BNTU – Repository BNTU*. 4. pp. 24–29.
 26. Molchanov A.A., Pozharskiy D.A. (2011) Obsuzhdeniya kontaktnoy zadachi Galina i vzaimodeystvie shtampov. [Discussions of the Galin contact problem and die interaction]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I.Lobachevskogo – Bulletin of Nizhny Novgorod Lobachevsky University*. 4(4). pp. 1636–1638.

Сведения об авторах:

Сафаров Исмоил Иброхимович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики Ташкентского химико-технологического института (Ташкент, Узбекистан). E-mail: safarov54@mail.ru

Тешаев Мухсин Худойбердиевич – доктор физико-математических наук, доцент, главный научный сотрудник Бухарского отделения Института математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (Бухара, Узбекистан). E-mail: muhsin_5@mail.ru

Негматиллаев Бахадир – кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры архитектуры Бухарского инженерно-технологического института (Бухара, Узбекистан). E-mail: proins@mail.ru

Ахмедов Максуд Шарипович – доктор философии (PhD) по физико-математическим наукам, и.о. зав. кафедрой высшей математики Бухарского инженерно-технологического института (Бухара, Узбекистан). E-mail: maqsud.axmedov.1985@mail.ru

Information about the authors:

Safarov Ismoil I. (Doctor of Physics and Mathematics, Tashkent Institute of Chemical Technology, Tashkent, Uzbekistan). E-mail: safarov54@mail.ru

Teshaev Mukhsin Kh. (Doctor of Physics and Mathematics, Bukhara Branch of the Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Uzbekistan, Bukhara, Uzbekistan). E-mail: muhsin_5@mail.ru

Negmatillaev Bakhadir (Candidate of Technical Sciences, Bukhara Institute of Engineering and Technology, Bukhara, Uzbekistan). E-mail: proins@mail.ru

Akhmedov Maksud Sh. (Doctor of Physics and Mathematics, Bukhara Institute of Engineering and Technology, Bukhara, Uzbekistan). E-mail: maqsud.axmedov.1985@mail.ru

Статья поступила в редакцию 28.05.2024; принята к публикации 09.06.2025

The article was submitted 28.05.2024; accepted for publication 09.06.2025