ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2025 Управление, вычислительная техника и информатика № 72

Tomsk State University Journal of Control and Computer Science

Научная статья
УДК 519.21
doi: 10.17223/19988605/72/5

# Исследование затухающего дополнительного потока событий в системе с входящим MMPP-потоком методом марковского суммирования

**Анатолий Андреевич Назаров[1], Диана Дамировна Даммер[2]**

*[1, 2] Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия*
*[1] nazarov.tsu@gmail.com*
*[2] di.dammer@yandex.ru*

**Аннотация.** Рассматривается модель массового обслуживания с входящим MMPP-потоком заявок и неограниченным количеством приборов. Заявка в течение времени своего обслуживания независимо от других заявок генерирует события дополнительного потока. С использованием методов марковского суммирования и асимптотического анализа находится характеристическая функция числа событий дополнительного потока, формируемого на промежутке $[0, \infty)$ всеми заявками, поступившими в систему на промежутке времени $(-\infty, T]$, $T > 0$. Задача решается как для экспоненциального времени обслуживания, так и в случае произвольного распределения времени обслуживания. Приводятся численные результаты при заданных значениях параметров системы.

**Ключевые слова:** система массового обслуживания; характеристическая функция; метод марковского суммирования; дополнительный поток.

***Для цитирования*:** Назаров А.А., Даммер Д.Д. Исследование затухающего дополнительного потока событий в системе с входящим MMPP-потоком методом марковского суммирования // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2025. № 72. С. 51–60. doi: 10.17223/19988605/72/5

Original article
doi: 10.17223/19988605/72/5

# Study of the decaying additional flow of events in a system with an input MMPP-flow using the Markov summation method

**Anatoly A. Nazarov[1], Diana D. Dammer[2]**

*[1, 2] National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*
*[1] nazarov.tsu@gmail.com*
*[2] di.dammer@yandex.ru*

**Abstract.** A queuing system with an unlimited number of servers and input MMPP-flow of requests is considered. During the time of service in the system, request generate additional flow events independently of other requests. Using the methods of Markov summation and asymptotic analysis, the characteristic function of the number of events of the additional flow formed on the interval $[0, \infty)$ by all requests received in the system within the interval of time $(-\infty, T]$, $T > 0$ is found. The problem is solved both for exponential service time and for an arbitrary distribution of service time. Numerical results are given for various values of the system parameters.

**Keywords:** queueing system; characteristic function; Markov summation method; additional flow.

***For citation*:** Nazarov, A.A., Dammer, A.A. (2025) Study of the decaying additional flow of events in a system with an input MMPP-flow using the Markov summation method. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 72. pp. 51–60. doi: 10.17223/19988605/72/5

## Введение

Исследования в области теории массового обслуживания демонстрируют разнообразие применяемых моделей и методов с целью прогнозирования, оптимизации и управления реальными процессами и объектами. В качестве таких объектов могут выступать, например, страховые компании и другие коммерческие организации [1–2]. Также с помощью методов теории массового обслуживания моделируют работу железнодорожных станций [3], функционирование телекоммуникационных сетей [4], процессы в военной отрасли [5–6], в сфере интернета вещей [7] и т.д. В качестве предмета исследований в таких моделях могут быть входящие потоки заявок и их параметры [8], число занятых приборов или число обслуживаемых заявок в системе [9], длина очереди на обслуживание [10], выходящие потоки [11–12] и др. Многообразие работ по данной тематике демонстрирует необходимость развития методов и подходов для анализа различных характеристик исследуемых моделей массового обслуживания.

В данной работе рассматривается система массового обслуживания с входящим MMPP-потоком заявок и неограниченным количеством приборов. Каждая заявка в течение времени обслуживания независимо от других заявок генерирует события некоторого дополнительного потока. Такие дополнительные потоки моделируют, например, потоки выплат клиентам страховой компании по факту наступления страховых случаев, потоки денежных операций в рамках накопительного банковского счета, когда клиент в любой момент времени имеет возможность снимать средства или пополнять счет, потоки заказов товаров и услуг, например вызовов такси с установленного мобильного приложения и т.д. Подобные потоки в своих трудах рассматривали М.С. Бартлетт [13] для исследования транспортных потоков и П.А.В. Льюис и Д.Р. Кокс [14] для моделирования отказов вычислительных машин. Также в работах [15–17] с помощью метода марковского суммирования исследуется дополнительный поток, сгенерированный заявками, поступившими в систему после заданного начального момента времени $t = 0$; в [18–19] заявки учитываются и до начального момента в условиях простейшего входящего потока. В данном исследовании впервые с использованием комбинации методов марковского суммирования и асимптотического анализа находится характеристическая функция числа событий дополнительного потока, формируемого на промежутке $[0, \infty)$ всеми входящего MMPP-потока заявками, поступившими в систему на промежутке времени $(-\infty, T]$, $T > 0$. Так как количество событий дополнительного потока после момента времени $T$ с течением времени будет убывать, то такой поток назовем затухающим. Задача решается как для экспоненциального времени обслуживания, так и для произвольного распределения времени обслуживания. Приводятся численные результаты при заданных значениях параметров системы.

## 1. Описание модели и постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания с входящим MMPP-потоком заявок и неограниченным количеством приборов. Время обслуживания имеет экспоненциальный закон распределения с параметром μ или характеризуется произвольной функцией распределения $B(x)$ (рис. 1).

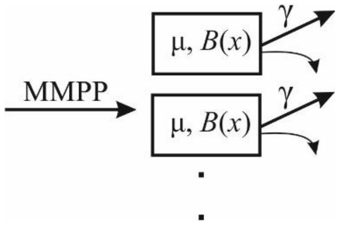


Рис. 1. Модель системы массового обслуживания с $d$-потоком
Fig. 1. Model of a queueing system with $d$-flow

Каждая заявка, приходящая в систему, в течение времени обслуживания на приборе генерирует с интенсивностью γ события дополнительного потока, который будем называть локальным $d$-потоком; суммарным $d$-потоком будем называть дополнительный поток, сформированный всеми заявками [16].

Предполагается, что заявки поступают в систему на промежутке $(-\infty, T]$, $T > 0$, а события формируемого этими заявками дополнительного потока учитываются на интервале $[0, \infty)$.

Обозначим $i(t)$ – число событий локального $d$-потока от заявки, поступившей в момент времени $t$, $n(t)$ – число событий суммарного $d$-потока, сформированных заявками, поступившими в систему на промежутке $(-\infty, t]$; $r(i, t) = \mathrm{P}\{i(t) = i\}$, $P(n, t) = \mathrm{P}\{n(t) = n\}$. Задача состоит в нахождении характеристической функции числа $n(t)$ событий суммарного $d$-потока, сформированного на $[0, \infty)$ заявками входящего потока при условии, что в момент времени $t = 0$ в системе находится какое-то количество заявок. На рис. 2 изображена схема формирования $d$-потока: моменты $t_i$ на оси времени обозначают моменты поступления заявок в систему на промежутке $(-\infty, T]$, точки – моменты наступления событий $d$-потока на промежутке $[0, \infty)$. Для решения поставленной задачи будем использовать метод марковского суммирования, который был введен и описан в [16], а также метод асимптотического анализа [20].

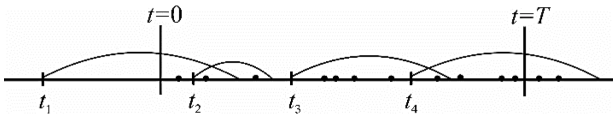


Рис. 2. Схема формирования $d$-потока
Fig. 2. Scheme for generating $d$-flow

## 2. Характеристическая функция числа событий суммарного *d*-потока

### *2.1. Метод марковского суммирования*

Будем считать, что входящий MMPP-поток управляется цепью Маркова $k(t)$ и характеризуется следующими матрицами: диагональной матрицей $\mathbf{\Lambda}$ с элементами $\lambda_k$ на главной диагонали, где $\lambda_k$ – условные интенсивности поступления входящих заявок, когда цепь Маркова $k(t)$ находится в состоянии $k$, $k = 1, 2, \ldots, K$; квадратной размерности $K$ матрицей $\mathbf{Q}$ инфинитезимальных характеристик $q_{vk}$, которая определяет марковскую цепь $k(t)$.

Определим двумерный процесс $\{n(t), k(t)\}$, который в описанных выше условиях является марковским. Согласно методу марковского суммирования [16] необходимо:

1. Определить характеристику числа $n(t)$ суммарного $d$-потока в виде вероятности

$$P_k(n,t) = \mathrm{P}\{n(t) = n, k(t) = k\}, \ k = 1, 2, ..., K.$$

2. Найти вид вероятности $r(i, t)$ для локального $d$-потока и соответствующую характеристическую функцию.

3. Составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей из п. 1.

4. Решить систему уравнений из п. 3, получить искомое распределение из п. 1.

Реализуя первый этап, для вероятностей $P_k(n, t)$ запишем равенства

$$\begin{gathered} P_k(n, t+\Delta t) = P_k(n,t)(1-\lambda_k\Delta t)(1+q_{kk}\Delta t) + \sum_{v\neq k} P_v(n,t)q_{vk}\Delta t + \\ +\lambda_k \Delta t \sum_{i=0}^{n} P_k(n-i, t) r(i,t) + \mathrm{o}(\Delta t), \ k = 1, 2, ..., K. \end{gathered} \tag{1}$$

В (1) присутствует вероятность $r(i, t)$, выражение для которой было получено в работе [18] в виде (2) для модели с простейшим входящим потоком и экспоненциальным обслуживанием (тип входящего потока не будет влиять на вид этой вероятности, так как $r(i, t)$ характеризует локальный $d$-поток, а значит, будет зависеть от распределения обслуживания и интенсивности $d$-потока):

$$r(i,t) = \begin{cases} \mu \int\limits_0^\infty \dfrac{(\gamma x)^i}{i!} e^{-x(\gamma+\mu)} dx, \ t \geq 0, \\ 1 - e^{\mu t} + \dfrac{\mu e^{\mu t}}{\gamma+\mu}, \ t < 0, \ i = 0, \\ \mu e^{-\gamma t} \int\limits_{-t}^\infty \dfrac{(\gamma(z+t))^i}{i!} e^{-z(\gamma+\mu)} dz, \ t < 0, \ i > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Система дифференциальных уравнений Колмогорова после преобразований равенств (1) будет иметь вид:

$$\frac{\partial P_k(n,t)}{\partial t} = \lambda_k \sum_{i=0}^{n} P_k(n-i,t)r(i,t) + \sum_{v} P_v(n,t)q_{vk} - \lambda_k P_k(n,t),\ k = 1,2,..,K\,. \tag{3}$$

Систему (3) для частичных характеристических функций $H_k(u,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{jun} P_k(n,t)$ запишем в виде:

$$\frac{\partial H_k(u,t)}{\partial t} = \left(R(u,t)-1\right) H_k(u,t)\lambda_k + \sum_{v} H_v(u,t)q_{vk}\,,\ k = 1,2,..,K\,, \tag{4}$$

где $R(u, t)$ – характеристическая функция распределения вероятностей (2) локального $d$-потока. Выражение для $R(u, t)$ также получено в работе [18] и имеет следующий вид:

$$R(u,t) = \begin{cases} \dfrac{\mu}{\gamma + \mu - \gamma e^{ju}},\ t \ge 0, \\ 1 - e^{\mu t} + \dfrac{\mu e^{\mu t}}{\gamma + \mu - \gamma e^{ju}},\ t < 0. \end{cases} \tag{5}$$

Введя векторную характеристическую функцию $\mathbf{H}(u, t) = \{H_1(u, t), H_2(u, t), ..., H_K(u, t)\}$, систему (4) можем записать в виде матричного уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial t} = \mathbf{H}(u,t)\left\{\mathbf{Q} + \left(R(u,t)-1\right)\mathbf{\Lambda}\right\} \tag{6}$$

с начальным условием $\mathbf{H}(u, -\infty) = \mathbf{R}$.

Матричное уравнение (6) определяет однородную систему линейных дифференциальных уравнений относительно частичных характеристических функций $H_k(u, t)$ с переменными по $t$ коэффициентами. Аналитическое решение системы (6) записать не представляется возможным, поэтому решение этой системы будем искать методом асимптотического анализа. Таким образом, п. 4 метода марковского суммирования будем реализовывать с использованием метода асимптотического анализа.

### *2.2. Метод асимптотического анализа*

Для реализации метода асимптотического анализа найдем выражение для математического ожидания числа $n(t)$ событий суммарного $d$-потока. Так как

$$\frac{1}{j}\frac{\partial \mathbf{H}(u,t)}{\partial u}\bigg|_{u=0} = \mathbf{m}(t), \quad \frac{1}{j}\frac{\partial R(u,t)}{\partial u}\bigg|_{u=0} = R_1(t),$$

то, дифференцируя уравнение (6) по переменной $u$ в нуле, получим неоднородную систему дифференциальных уравнений относительно $\mathbf{m}(t)$:

$$\mathbf{m}'(t) = \mathbf{m}(t)\mathbf{Q} + \mathbf{R\Lambda}R_1(t)\,. \tag{7}$$

Вектор $\mathbf{R} = \mathbf{H}(0, t)$, присутствующий в (7), есть вектор-строка стационарного распределения вероятностей значений цепи Маркова $k(t)$, удовлетворяющий системе уравнений

$$\mathbf{RQ} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{RE} = 1,$$

где $\mathbf{E}$ – единичный вектор-столбец, $\mathbf{0}$ – нулевая вектор-строка. Умножая систему (7) на $\mathbf{E}$, получим равенство

$$\mathbf{m}'(t)\mathbf{E} = \left(\mathbf{R\Lambda E}\right)\cdot R_1(t),$$

из которого можем записать выражение

$$\mathbf{m}(t)\mathbf{E} = \mathbf{R\Lambda E}\cdot\int_{-\infty}^{t} R_1(x)dx\,.$$

Заметим, что компоненты вектора $\mathbf{m}(t)$ являются частичными математическими ожиданиями числа событий, наступивших в суммарном $d$-потоке, $\mathbf{m}(t)\mathbf{E}$ – полным математическим ожиданием; скаляр $\mathbf{R\Lambda E}$ – интенсивностью входящего MMPP-потока.

Для реализации метода асимптотического анализа в уравнении (6) выполним замену

$$\mathbf{H}(u,t)=\mathbf{H}_2(u,t)\exp\left\{ju\mathbf{R\Lambda E}\cdot\int_{-\infty}^{t}R_1(x)dx\right\},\ -\infty<t\le T, \tag{8}$$

тогда для векторной характеристической функции $\mathbf{H}_2(u, t)$ центрированного случайного процесса $n(t)-Mn(t)$ получим задачу Коши:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\mathbf{H}_2(u,t)}{\partial t}=\mathbf{H}_2(u,t)\left\{\mathbf{Q}+(R(u,t)-1)\mathbf{\Lambda}-ju\mathbf{R\Lambda E}R_1(x)\mathbf{I}\right\},\\ \mathbf{H}_2(u,-\infty)=\mathbf{R},\end{cases} \tag{9}$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица. Для решения этой задачи метод асимптотического анализа реализуем в предельном условии $T\to\infty$. Введем следующие обозначения:

$$\frac{1}{T}=\varepsilon^2,\ u=\varepsilon w,\ \tau=\varepsilon^2 t,\ t=\tau T,\ \mathbf{H}_2(u,t)=\mathbf{F}(w,\tau,\varepsilon),$$

с учетом которых задачу (9) перепишем в виде:

$$\begin{cases}\varepsilon^2\dfrac{\partial\mathbf{F}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}=\mathbf{F}(w,\tau,\varepsilon)\cdot\left\{\mathbf{Q}+\left(R(\varepsilon w,\tau T)-1\right)\mathbf{\Lambda}-j\varepsilon w\cdot\mathbf{R\Lambda E}\cdot R_1(\tau T)\mathbf{I}\right\},\\ \mathbf{F}(w,-\infty,\varepsilon)=\mathbf{R}.\end{cases} \tag{10}$$

Выполняя предельный переход при $\varepsilon\to 0$ и обозначая $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathbf{F}(w,\tau,\varepsilon)=\mathbf{F}(w,\tau)$, для векторной функции $\mathbf{F}(w, \tau)$ получим систему уравнений

$$\begin{cases}\mathbf{F}(w,\tau)\mathbf{Q}=0,\\ \mathbf{F}(w,-\infty)=\mathbf{R}.\end{cases} \tag{11}$$

Решение $\mathbf{F}(w, \tau)$ системы (11) можно записать в виде: $\mathbf{F}(w, \tau) = \Phi(w, \tau)\mathbf{R}$, где $\Phi(w, \tau)$ – скалярная функция. Решение $\mathbf{F}(w, \tau, \varepsilon)$ задачи (10) запишем в виде разложения

$$\mathbf{F}(w,\tau,\varepsilon)=\Phi(w,\tau)\left\{\mathbf{R}+j\varepsilon w\mathbf{f}R_1(\tau T)\right\}+\mathbf{O}\left(\varepsilon^2\right). \tag{12}$$

Подставляя (12) в (10) и производя разложение с точностью до порядка $\varepsilon^2$, получим равенство

$$\mathbf{R}\left\{\mathbf{Q}+j\varepsilon wR_1(\tau T)(\mathbf{\Lambda}-\mathbf{R\Lambda E}\cdot\mathbf{I})\right\}+j\varepsilon w\mathbf{f}R_1(\tau T)\mathbf{Q}=\mathbf{O}\left(\varepsilon^2\right),$$

из которого для вектора $\mathbf{f}$ с учетом свойств вектора $\mathbf{R}$ можем записать неоднородное уравнение

$$\mathbf{fQ}=\mathbf{R}\left(\mathbf{R\Lambda E}\cdot\mathbf{I}-\mathbf{\Lambda}\right).$$

Решение $\mathbf{f}$ этого уравнения можно записать в виде:

$$\mathbf{f}=C\mathbf{R}+\mathbf{f}_0, \tag{13}$$

где $C$ – произвольная константа, а $\mathbf{f}_0$ – частное решение неоднородного уравнения, удовлетворяющее некоторому дополнительному условию, например $\mathbf{f}_0\mathbf{E}=0$.

Далее уравнение из (10) умножим на $\mathbf{E}$ и представим $R(\varepsilon w,\tau T)$ в виде разложения

$$R(\varepsilon w,\tau T)=M\{e^{jwi(\tau T)}\}=1+j\varepsilon wMi(\tau T)+\frac{(j\varepsilon w)^2}{2}Mi^2(\tau T)+O(\varepsilon^3),$$

где $Mi(\tau T) = R_1(\tau T)$, $Mi^2(\tau T) = R_2(\tau T)$, получим

$$\varepsilon^2\frac{\partial\mathbf{F}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}\mathbf{E}=\mathbf{F}(w,\tau,\varepsilon)\cdot\left\{j\varepsilon wR_1(\tau T)\left(\mathbf{\Lambda E}-\mathbf{R\Lambda E}\cdot\mathbf{E}\right)+j^2\frac{(\varepsilon w)^2}{2}R_2(\tau T)\mathbf{\Lambda E}\right\}+\mathbf{O}(\varepsilon^3). \tag{14}$$

Подставляя в (14) разложение (12), запишем

$$\varepsilon^2\frac{1}{\Phi(w,\tau)}\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau}\mathbf{RE}=\frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\left\{2R_1^2(\tau T)\mathbf{f}\left(\mathbf{\Lambda E}-\mathbf{R\Lambda E}\cdot\mathbf{E}\right)+R_2(\tau T)\mathbf{R\Lambda E}\right\}+\mathbf{O}\left(\varepsilon^3\right).$$

В это равенство подставим разложение (13) и, выполнив несложные преобразования, получим уравнение

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau}=\Phi(w,\tau)\frac{(jw)^2}{2}\left\{2\mathbf{f}_0\mathbf{\Lambda E}R_1^2(\tau T)+\mathbf{R\Lambda E}R_2(\tau T)\right\}. \tag{15}$$

Решение $\Phi(w, \tau)$ уравнения (15) имеет вид:

$$\Phi(w,\tau) = \exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\tau T}\left[2\mathbf{f}_0\mathbf{\Lambda E}R_1^2(x) + \mathbf{R\Lambda E}R_2(x)\right]dx\right\}.$$

Возвращаясь к переменным $u$ и $t$, для скалярной функции $\mathbf{H}_2(u, t)\mathbf{E}$ получим аппроксимацию

$$\mathbf{H}_2(u,t)\mathbf{E} = \exp\left\{\frac{(ju)^2}{2}\int_{-\infty}^{t}\left[2\mathbf{f}_0\mathbf{\Lambda E}R_1^2(x) + \mathbf{R\Lambda E}R_2(x)\right]dx\right\}.$$

В силу замены (8) аппроксимацию характеристической функции $Me^{jun(T)}$ числа событий суммарного $d$-потока можно записать в виде:

$$\mathbf{H}(u,T)\mathbf{E} = \exp\left\{ju\mathbf{R\Lambda E}\cdot\int_{-\infty}^{T}R_1(x)dx + \frac{(ju)^2}{2}\int_{-\infty}^{T}\left[2\mathbf{f}_0\mathbf{\Lambda E}R_1^2(x) + \mathbf{R\Lambda E}R_2(x)\right]dx\right\}, \tag{16}$$

т.е. в виде характеристической функции гауссовского распределения с параметрами

$$\kappa_1 = \mathbf{R\Lambda E}\cdot\int_{-\infty}^{T}R_1(x)dx, \quad \kappa_2 = 2\mathbf{f}_0\mathbf{\Lambda E}\int_{-\infty}^{T}R_1^2(x)dx + \mathbf{R\Lambda E}\int_{-\infty}^{T}R_2(x)dx\,, \tag{17}$$

где

$$R_1(t) = \begin{cases}\frac{\gamma}{\mu}e^{\mu t}, & t<0,\\ \frac{\gamma}{\mu}, & t\ge 0,\end{cases} \qquad R_2(t) = \begin{cases}\frac{\gamma}{\mu}\left(1+2\frac{\gamma}{\mu}\right)e^{\mu t}, & t<0,\\ \frac{\gamma}{\mu}\left(1+2\frac{\gamma}{\mu}\right), & t\ge 0.\end{cases}$$

## 3. Характеристическая функция числа событий суммарного *d*-потока для модели с произвольным обслуживанием

Для решения задачи нахождения характеристической функции числа событий суммарного $d$-потока в модели с произвольным временем обслуживания методом марковского суммирования в первую очередь необходимо найти выражения для вероятностей $r(i, t)$ и соответствующей характеристической функции $R(u, t)$. В работе [19] получены выражения для этих функций в рамках задачи исследования числа событий затухающего суммарного $d$-потока в условиях простейшего входящего потока и произвольного времени обслуживания в случае поступления заявок в систему на $(-\infty, T]$. Так как тип входящего потока не влияет на вид $r(i, t)$ и $R(u, t)$, то для задачи с входящим MMPP-потоком и произвольным обслуживанием можно записать полученное в [19] выражение в виде (18) для $R(u, t)$:

$$R(u,t) = \begin{cases}\int_0^{\infty}\exp\{\gamma x(e^{ju}-1)\}dB(x), & t\ge 0,\\ B(-t) + \exp\{\gamma t(e^{ju}-1)\}\int_{-t}^{\infty}\exp\{\gamma z(e^{ju}-1)\}dB(z), & t<0.\end{cases} \tag{18}$$

Общий вид аппроксимации характеристической функции в данных условиях не будет отличаться от вида выражения (16), но, очевидно, параметры (17) теперь будут зависеть от $R_1(t)$ и $R_2(t)$, которые с учетом функции (18) будут определяться следующими выражениями:

$$R_1(t) = \begin{cases}\gamma\int_{-t}^{\infty}(z+t)dB(z), & t<0,\\ \gamma\int_0^{\infty}z\,dB(z), & t\ge 0,\end{cases} \qquad R_2(t) = \begin{cases}\int_{-t}^{\infty}\left(\gamma(z+t)+\gamma^2(z+t)^2\right)dB(z), & t<0,\\ \int_0^{\infty}\left(\gamma z+\gamma^2 z^2\right)dB(z), & t\ge 0.\end{cases}$$

## 4. Численные результаты

С помощью системы Mathcad были реализованы численные эксперименты, в рамках которых при заданных значениях параметров модели было получено дискретное распределение вероятностей числа $n(T)$ событий затухающего $d$-потока, сформированного на промежутке $[0, \infty)$ заявками, поступившими в систему на $(-\infty, T]$.

Для модели с экспоненциальным временем обслуживания и модели с произвольным обслуживанием проведена численная реализация для входящего MMPP-потока заявок, который определяется следующими квадратными размерности $K = 3$ матрицами:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -0,4 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & -0,6 & 0,5 \\ 0,3 & 0,3 & -0,6 \end{bmatrix}, \ \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

и для параметров $T = 15$ и $\mu = 0,5$. В качестве произвольного распределения времени обслуживания рассмотрены гамма-распределение и распределение Вейбулла с такими параметрами формы $\alpha$ и масштаба $\beta$, чтобы среднее время обслуживания для этих распределений совпадало со средним для экспоненциального обслуживания. Для гамма-распределения $\alpha = 2$, $\beta = 1$, для распределения Вейбулла $\alpha = 2$, $\beta = 2{,}257$. На рис. 3–5 представлены дискретные распределения вероятностей $P(n, T)$, аппроксимирующие теоретическое распределение, для трех значений параметра $\gamma$, равных 0,5, 1,0 и 1,5 соответственно: $PE(n, T)$ для экспоненциального распределения времени обслуживания, $PG(n, T)$ – для гамма-распределения, $PW(n, T)$ – для распределения Вейбулла.

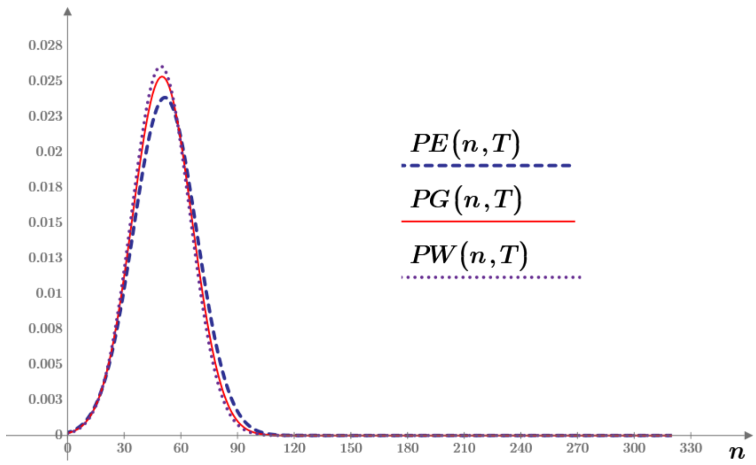


Рис. 3. Распределение вероятностей $P(n, T)$ при $\gamma = 0{,}5$
Fig. 3. Probability distribution $P(n, T)$ for $\gamma = 0{,}5$

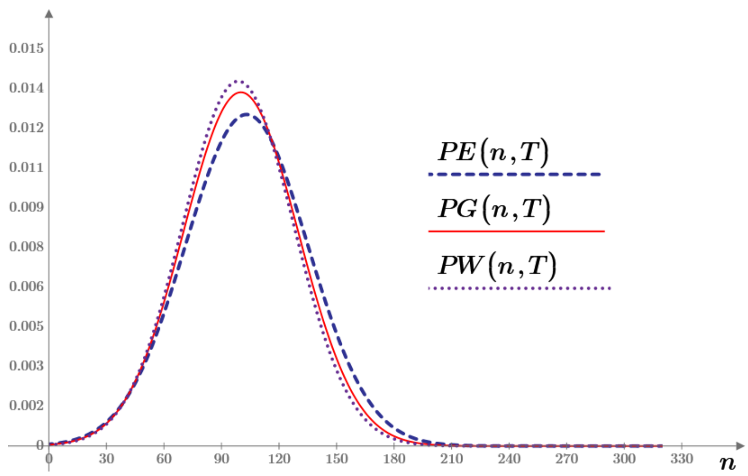


Рис. 4. Распределение вероятностей $P(n, T)$ при $\gamma = 1{,}0$
Fig. 4. Probability distribution $P(n, T)$ for $\gamma = 1{,}0$

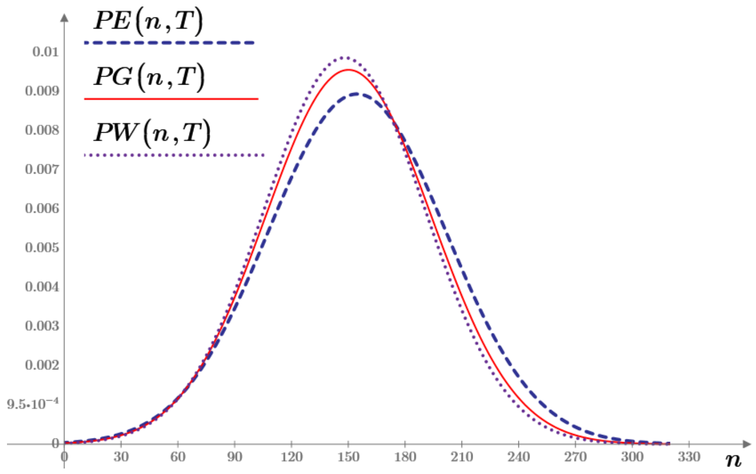


Рис. 5. Распределение вероятностей $P(n, T)$ при $\gamma = 1{,}5$

Fig. 5. Probability distribution $P(n, T)$ for $\gamma = 1{,}5$

**Значения математических ожиданий $Mn(T)$ и средних квадратическое отклонений $\sigma n(T)$**

| | $PE(n, T)$ | $PG(n, T)$ | $PW(n, T)$ |
|---|---|---|---|
| $\gamma = 0{,}5$ | $Mn(t) = 51{,}557$<br>$\sigma n(T) = 16{,}727$ | $Mn(t) = 50{,}041$<br>$\sigma n(T) = 15{,}748$ | $Mn(t) = 49{,}353$<br>$\sigma n(T) = 15{,}306$ |
| $\gamma = 1{,}0$ | $Mn(t) = 103{,}115$<br>$\sigma n(T) = 31{,}876$ | $Mn(t) = 100{,}082$<br>$\sigma n(T) = 29{,}865$ | $Mn(t) = 98{,}707$<br>$\sigma n(T) = 28{,}955$ |
| $\gamma = 1{,}5$ | $Mn(t) = 154{,}672$<br>$\sigma n(T) = 46{,}998$ | $Mn(t) = 150{,}123$<br>$\sigma n(T) = 43{,}952$ | $Mn(t) = 148{,}06$<br>$\sigma n(T) = 42{,}572$ |

В таблице представлены значения математических ожиданий и средних квадратических отклонений числа $n(T)$ событий суммарного $d$-потока при заданных выше значениях параметров для различных распределений времени обслуживания и различных значений интенсивностей локального $d$-потока. По приведенным в таблице данным наблюдается тенденция к увеличению числовых характеристик для всех распределений с увеличением интенсивности локального $d$-потока. Несмотря существенное различие в распределениях времени обслуживания, наблюдается незначительная разница в значениях числовых характеристик с относительной погрешностью в пределах 2–6% для одного значения $\gamma$; причем пределы погрешностей сохраняются и для других значений интенсивности $\gamma$.

## Заключение

В данной работе рассмотрена модель массового обслуживания, в рамках которой исследуется поток дополнительных событий. Найдено выражение аппроксимации в предельном условии $T \to \infty$ характеристической функции числа событий затухающего $d$-потока от заявок, поступивших на промежутке $(-\infty, T]$, $T > 0$. Проведены численные эксперименты, получены кривые дискретных распределений для различных значений параметров модели. Результаты исследований, например, в случае финансовой или информационной нагрузки событий в дополнительных потоках, могут быть полезны для оптимизации и управления экономической деятельностью предприятий с учетом временны́х промежутков поступления клиентов в компанию и генерации событий дополнительных потоков.

### Список источников

1. Afeche P. Incentive-compatible revenue management in queueing systems: Optimal strategic delay // Manufacturing & Service Operations Management. 2013. V. 15 (3). P. 423–443. doi: 10.1287/msom.2013.0449
2. Dammer D. Research of mathematical model of insurance company in the form of queueing system in a random environment // Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications : Proc. of the 16th International Conference. 2017. V. 800. P. 204–214. doi: 10.1007/978-3-319-68069-9_17
3. Жарков М.Л., Павидис М.М. Моделирование железнодорожных станций на основе сетей массового обслуживания // Актуальные проблемы науки Прибайкалья : сб. ст. / отв. ред. И.В. Бычков, А.Л. Казаков. Иркутск : Иркут. гос. ун-т, 2020. Вып. 3. С. 79–84.

4. Вишневский В.М., Дудин А.Н. Системы массового обслуживания с коррелированными входными потоками и их применение для моделирования телекоммуникационных сетей // Автоматика и телемеханика. 2017. № 8. С. 3–59. doi: 10.1134/S000511791708001X
5. Артемов А.С., Герасимов А.В. Применение теории массового обслуживания при исследовании сложных организационно-технических систем военного назначения // Военная мысль. 2011. № 12. С. 3–10.
6. Nikolic N.V. The 110th anniversary of queueing theory: its applications in the military // Military Technical Courier. 2019. V. 67 (4). P. 806–819. doi: 10.5937/vojtehg67-22460
7. Малахов С.В., Якупов Д.О., Осипова А.А., Копылова Д.А., Зеленина Е.А. Применение системы массового обслуживания для исследования характеристик канала связи в IoT-сетях // Вестник Новосибирского государственного университета. Сер. Информационные технологии. 2024. Т. 22, № 1. С. 49–61. doi: 10.25205/1818-7900-2024-22-1-49-61
8. Поспелов П.И., Таташев А.Г., Терентьев А.В., Карелина М.Ю., Яшина М.В. Потоки Бартлетта и математическое описание автотранспортных потоков // Наукоемкие технологии в космических исследованиях земли. Информатика, вычислительная техника и управление. 2021. Т. 13, № 6. С. 34–41. doi: 10.36724/2409-5419-2021-13-6-34-41
9. Постников В.М., Спиридонов С.Б., Семкин П.С. Подход к приближенной оценке числа заявок в системах массового обслуживания типа GI/G/C // Естественные и технические науки. 2019. № 7 (133). С. 185–192.
10. Берговин А.К., Ушаков В.Г. О длине очереди в системе со смешанными приоритетами в условиях критической загрузки // Вестник Московского университета. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2024. № 3. С. 54–59. doi: 10.55959/MSU/0137-0782-15-2024-47-3-54-59
11. Ушаков В.Г., Ушаков Г.Н. Выходящие потоки в однолинейной системе с относительным приоритетом // Информатика и ее применения. 2019. Т. 13, № 4. С. 42–47. doi: 10.14357/19922264190407
12. Лапатин И.Л., Назаров А.А. Выходящий поток RQ-системы M/GI/1 асимптотически рекуррентный // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, № 1. С. 100–110. doi: 10.18500/1816-9791-2021-21-1-100-110
13. Bartlett M.S. The spectral analysis of point processes // Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology. 1963. V. 25 (2). P. 264–281. doi: 10.1111/j.2517-6161.1963.tb00508.x
14. Cox D.R., Lewis P.A.W. The Statistical Analysis of Series of Events. London : Methuen, 1966. 285 p.
15. Nazarov A., Dammer D. Methods of limiting decomposition and Markovian summation in queueing system with infinite number of servers // Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications : Proc. in the 17th International Conference. 2018. V. 912. P. 71–82. doi: 10.1007/978-3-319-97595-5_6
16. Назаров А.А., Даммер Д.Д. Исследование дополнительно формируемого потока в системе с неограниченным числом приборов и рекуррентным обслуживанием методом марковского суммирования // Автоматика и телемеханика. 2019. № 12. С. 133–145. doi: 10.1134/S0005231019120080
17. Даммер Д.Д., Федерягина П.В. Исследование дополнительно формируемого потока в системе с экспоненциальным обслуживанием и неограниченным числом приборов методом марковского суммирования // Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем : материалы междунар. науч. конф. / под общ. ред. И.С. Шмырина. Томск : Изд-во Том. гос. ун-та, 2020. С. 260–265.
18. Даммер Д.Д. Исследование дополнительно формируемого потока на бесконечном интервале в системе с экспоненциальным обслуживанием // Информационные технологии и математическое моделирование : материалы XXII Междунар. конф. им. А.Ф. Терпугова. Томск : Изд-во Том. гос. ун-та, 2023. С. 89–94.
19. Даммер Д.Д. Исследование числа страховых выплат в компании с произвольно распределенной продолжительностью договора // Математическое и компьютерное моделирование в экономике, страховании и управлении рисками : материалы XII Междунар. науч.-практ. конф. / отв. ред. В.А. Балаш. Саратов : Саратов. ун-т, 2023. Вып. 8. С. 39–43.
20. Назаров А.А., Моисеева С.П. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.

## References

1. Afeche, P. (2013). Incentive-compatible revenue management in queueing systems: Optimal strategic delay. *Manufacturing & Service Operations Management*. 15(3). pp. 423–443. DOI: 10.1287/msom.2013.0449
2. Dammer, D. (2017) Research of mathematical model of insurance company in the form of queueing system in a random environment. *Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications.* Proc. of the 16th International Conference. Vol. 800. pp. 204–214. DOI: 10.1007/978-3-319-68069-9_17
3. Zharkov, M.L. & Pavidis, M.M. (2020) Modelirovanie zheleznodorozhnykh stantsiy na osnove setey massovogo obsluzhivaniya [Modelling of railway stations based on queuing networks]. In: Bychkov, I.V. & Kazakov, A.L. (eds) *Aktual'nye problemy nauki Pribaykal'ya* [Topical Issues of Science in Transbaikalia]. Vol. 3. pp. 79–84.
4. Vishnevskiy, V.M. & Dudin, A.N. (2017) Queueing systems with correlated arrival flows and their applications to modeling telecommunication networks. *Automation and Remote Control*. 78(8). pp. 1361–1403. DOI: 10.1134/S000511791708001X
5. Artemov, A.S. & Gerasimov, A.V. (2011) Primenenie teorii massovogo obsluzhivaniya pri issledovanii slozhnykh organizatsionno-tekhnicheskikh sistem voennogo naznacheniya [Application of the queueing theory in the study of complex organizational and technical systems for military purposes]. *Voennaya mysl'.* 12. pp. 3–10.
6. Nikolic, N.V. (2019) The 110th anniversary of queueing theory: its applications in the military. *Military Technical Courier*. 67(4). pp. 806–819. DOI: 10.5937/vojtehg67-22460

7. Malakhov, S.V., Yakupov, D.O., Osipova, A.A., Kopylova, D.A. & Zelenina, E.A. (2024) The use of a queuing system to study the characteristics of the communication channel in iot networks. *Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Informatsionnye tekhnologii.* 22(1). pp. 49–61. DOI: 10.25205/1818-7900-2024-22-1-49-61
8. Pospelov, P.I., Tatashev, A.G., Terentiev, A.V., Karelina, M.Yu. & Yashina, M.V. (2021) Bartlett flows and mathematical description of motor traffic flows. *Naukoyemkie tekhnologii v kosmicheskikh issledovaniyakh zemli. Informatika, vychislitel'naya tekhnika i upravlenie*. 13(6). pp. 34–41. DOI: 10.36724/2409-5419-2021-13-6-34-41
9. Postnikov, V.M., Spiridonov, S.B. & Semkin, P.S. (2019) Podkhod k priblizhennoy otsenke chisla zayavok v sistemakh massovogo obsluzhivaniya tipa GI/G/S [Approach to an approximate estimate of the number of applications in queueing systems type GI/G/C]. *Estestvennye i tekhnicheskie nauki*. 133. pp. 185–192.
10. Bergovin, A.K. & Ushakov, V.G. (2024) O dline ocheredi v sisteme so smeshannymi prioritetami v usloviyakh kriticheskoy zagruzki [On the queue length in a mixed priority system under critical load]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 15. Vychislitel'naya matematika i kibernetika.* 3. pp. 54–59. DOI: 10.55959/MSU/0137-0782-15-2024-47-3-54-59
11. Ushakov, V.G. & Ushakov, G.N. (2019) The output streams in the single server queueing system with a head of the line priority. *Informatika i ee primeneniya*. 13(4). pp. 42–47. DOI: 10.14357/19922264190407
12. Lapatin, I.L., & Nazarov, A.A. (2021). Output process of the M|GI|1 is an asymptotical renewal process. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*. 21(1). pp. 100–110. DOI: 10.18500/1816-9791-2021-21-1-100-110
13. Bartlett, M.S. (1963) The Spectral Analysis of Point Processes. *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology*. 25(2). pp. 264–296. DOI: 10.1111/j.2517-6161.1963.tb00508.x
14. Cox, D.R. & Lewis, P.A.W. (1966) *The Statistical Analysis of Series of Events*. London: Methuen.
15. Nazarov, A.A. & Dammer, D.D. (2018) Methods of limiting decomposition and Markovian summation in queueing system with infinite number of servers. *Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications.* Proc. of the 16th International Conference. Vol. 912. pp. 71–82. DOI: 10.1007/978-3-319-97595-5_6
16. Nazarov, A.A. & Dammer, D.D. (2019) A study of additionally generated flows in systems with unlimited number of devices and recurrent servicing with the Markov summation method. *Automation and Remote Control*. 80(12). pp. 2195–220. DOI: 10.1134/S0005231019120080
17. Dammer, D.D. & Federyagina, P.V. (2020) Study of additionally generated flow in a system with exponential service and unlimited number of devices by the Markov summation method. In: Shmyrin, I.S. (ed.) *Matematicheskoe i programmnoe obespechenie informatsionnykh, tekhnicheskikh i ekonomicheskikh sistem* [Mathematical and software support for information, technical and economic systems]. Tomsk: Tomsk State University. pp. 260–265.
18. Dammer, D.D. (2023) Issledovanie dopolnitel'no formiruemogo potoka na beskonechnom intervale v sisteme s eksponentsial'nym obsluzhivaniem [Study of additionally generated flow on infinite interval in system with exponential service]. *Informatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie* [Information Technology and Mathematical Modeling]. Proc. of the 22nd International Conference. Tomsk. pp. 89–94.
19. Dammer, D.D. (2023) Issledovanie chisla strakhovykh vyplat v kompanii s proizvol'no raspredelennoy prodolzhitel'nost'yu dogovora [Research of the number of insurance payments in a company with an arbitrary distributed duration of the contract]. *Matematicheskoe i komp'yuternoe modelirovanie v ekonomike, strakhovanii i upravlenii riskami* [Mathematical and computer modeling in economics, insurance and risk management]. Proc. of the 12th International Conference. Vol. 8. Saratov. pp. 39–43.
20. Nazarov, A.A. & Moiseeva, C.P. (2006) *Metod asimptoticheskogo analiza v teorii massovogo obsluzhivaniya* [Method of Asymptotic Analysis in Queueing Theory]. Tomsk: NTL.

***Информация об авторах:***

**Назаров Анатолий Андреевич** – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: nazarov.tsu@gmail.com

**Даммер Диана Дамировна** – доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: di.dammer@yandex.ru

***Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.***

***Information about the authors:***

**Nazarov Anatoly A.** (Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: nazarov.tsu@gmail.com

**Dammer Diana D.** (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: di.dammer@yandex.ru

***Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.***

*Поступила в редакцию 22.03.2025; принята к публикации 02.09.2025*

*Received 22.03.2025; accepted for publication 02.09.2025*