ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2025 Управление, вычислительная техника и информатика № 72
Tomsk State University Journal of Control and Computer Science

Научная статья
УДК 519.2
doi: 10.17223/19988605/72/8

Робастное управление на финансовых рынках с транзакционными издержками при логарифмических функциях полезности

Сергей Алексеевич Гондин[1], Алена Андреевна Мурзинцева[2], Сергей Маркович Пергаменщиков[3], Евгений Анатольевич Пчелинцев[4]

[1, 2, 3, 4] *Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия*
[3] *Universite de Rouen, Rouen, France*
[1] *gondin02@mail.ru*
[2] *alshishkovatomsk@gmail.com*
[3] *serge.pergamenchtchikov@univ-rouen.fr*
[4] *evgen-pch@yandex.ru*

Аннотация. Рассматривается задача оптимального управления инвестиционным портфелем при логарифмических функциях полезности на финансовых рынках Блэка–Шоулса. Формулируется соответствующая теорема верификации и строятся оптимальные стратегии инвестирования и потребления в явном виде. Затем, основываясь на подходе Леланда–Лепинетта, эти стратегии модифицируются и показывается, что полученные стратегии инвестирования и потребления являются оптимальными в асимптотической постановке, когда число пересмотров портфеля стремится к бесконечности. Изучены случаи малых и больших транзакций. Устанавливается, что построенные стратегии робастны, т.е. устойчивы при изменении параметров рынка. Приводятся результаты численного моделирования Монте-Карло, которые на практике подтверждают теоретические выводы.

Ключевые слова: финансовый рынок; оптимальное потребление и инвестирование; робастное стохастическое управление; динамическое программирование; уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана; транзакционные издержки.

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта № 24-11-00191.

Для цитирования: Гондин С.А., Мурзинцева А.А., Пергаменщиков С.М., Пчелинцев Е.А. Робастное управление на финансовых рынках с транзакционными издержками при логарифмических функциях полезности // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2025. № 72. С. 80–91. doi: 10.17223/19988605/72/8

Original article
doi: 10.17223/19988605/72/8

Robust control in financial markets with transaction costs under logarithmic utility functions

Serguei A. Gondin[1], Alyona A. Murzintseva[2], Serguei M. Pergamenshchikov[3], Evgeny A. Pchelintsev[4]

[1, 2, 3, 4] *National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation*
[3] *Universite de Rouen, Rouen, France*
[1] *gondin02@mail.ru*
[2] *alshishkovatomsk@gmail.com*
[3] *serge.pergamenchtchikov@univ-rouen.fr*
[4] *evgen-pch@yandex.ru*

Abstract. The problem of portfolio optimization under logarithmic utilities for Black-Scholes financial markets is considered. The corresponding verification theorem is formulated and optimal consumption/investment strategies are constructed explicitly. Then, based on the Leland-Lepinette approach, these strategies are modified and it is shown that the obtained investment and consumption strategies are optimal in the asymptotic setting when the number of portfolio revisions tends to infinity. Cases of small and large transactions were studied. It is established that the constructed strategies are robust, i.e. stable when market parameters change. The results of Monte Carlo numerical simulation are given which in practice confirm theoretical conclusions.

Keywords: financial market; optimal consumption and investment; robust stochastic control; dynamic programming; Hamilton-Jacobi-Bellman equation; transaction costs.

***Acknowledgments*:** The research was carried out with the financial support of the RSF as part of a scientific project № 24-11-00191.

***For citation*:** Gondin, S.A., Murzintseva, A.A., Pergamenshchikov, S.M., Pchelintsev, E.A. (2025) Robust control in financial markets with transaction costs under logarithmic utility functions. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 72. pp. 80–91. doi: 10.17223/19988605/72/8

Введение

В статье изучается задача оптимального управления на финансовом рынке Блэка–Шоулса, состоящем из безрискового и рискового активов, определяемых уравнениями

$$\begin{cases} dB_t = r(t)B_t dt,\ B_0 = 1, \\ dS_t = \mu(t)S_t dt + \sigma(t)S_t dW_t,\ S_0 > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где процентная ставка $r(t)$, тренд $\mu(t)$ и волатильность $\sigma(t)$ – неслучайные непрерывные $[0, T] \to \mathbb{R}$ функции, $(W_t)_{t\geq 0}$ – стандартный скалярный винеровский процесс.

Задачи стохастического управления на финансовых рынках очень важны для финансовой индустрии, и имеется ряд работ, в которых разработаны эффективные методы их решения (см., напр.: [1] и ссылки в ней). В отличие от существующих работ, здесь предлагается построить робастные оптимальные стратегии потребления и инвестирования для рынков с транзакционными издержками и логарифмической функцией полезности. Следует отметить, что в задачах хеджирования робастные финансовые стратегии применяются сравнительно давно (см., напр.: [2–6] и ссылки в них). При этом в таких задачах робастность понимается как устойчивость с вероятностью единица относительно изменений в стоимостях рисковых активов, т.е. финансовая робастность. В данной работе используется статистическое определение робастности, означающее устойчивость свойств синтезируемых стратегий относительно изменений распределений рисковых активов в достаточно широких пределах. Для этого применяется подход из [7], разработанный для случая степенной функции полезности. К сожалению, сложность полученных оптимальных стратегий не дает возможности изучить вопрос об их робастности, и, кроме того, невозможно непосредственно без дополнительных условий применить теорему верификации, доказанную в [7], для модели с логарифмической функцией полезности, поскольку в данном случае, в отличие от степенных полезностей, целевые функционалы могут принимать сколь угодно малые отрицательные значения, стремящиеся к минус бесконечности. Поэтому для анализа целевых функционалов требуются дополнительные конструктивные условия, при которых возможно построение оптимальных стратегий. Следовательно, сначала доказывается соответствующая теорема верификации. Затем, чтобы учесть наличие транзакционных издержек, используется метод, разработанный для степенных полезностей в [7] на основе аппроксимирующих стратегий, предложенных Леландом [8] и Лепинеттом [9] для задач хеджирования на финансовых рынках с издержками.

Чтобы описать проблему робастного управления, определим рыночный параметр $\lambda = (\lambda(t))_{0\leq t\leq T}$ с $\lambda(t) = (r(t), \mu(t), \sigma(t)) \in \mathbb{R}^3$. Обозначим через Λ – некоторый компакт в $\mathbf{C}^1([0, T], \mathbb{R}^3)$. Пусть α_t – количество рискового актива S_t и β_t – количество безрискового актива B_t в портфеле инвестора в момент времени t. Тогда капитал портфеля $X_t = \alpha_t S_t + \beta_t B_t$. Применяя принцип самофинасируемости с потреблением (см., напр.: [1]) имеем, что капитал удовлетворяет СДУ:

$$dX_t = \alpha_t dS_t + \beta_t dB_t - \zeta_t dt,\ X_0 = x, \tag{2}$$

где $x > 0$ – начальный капитал, ζ_t – интенсивность потребления, т.е. неотрицательный интегрируемый процесс, для которого интеграл $\int_0^t \zeta_s ds$ – это общая сумма капитала, потребляемого инвестором на временном интервале [0, t]. Следуя [10], определим дробные финансовые стратегии инвестирования и потребления

$$\theta_t = \frac{\alpha_t S_t}{X_t} \text{ и } c_t = \frac{\zeta_t}{X_t}.$$

Заметим, что $1 - \theta_t = \beta_t B_t / X_t$. Поэтому, используя равенства из (1) в (2), получаем уравнение

$$\begin{cases} dX_t = X_t(r(t) + \theta_t \tilde{\mu}(t) - c_t)dt + \sigma(t) X_t \theta_t dW_t, \\ X_0 = x > 0, \end{cases} \tag{3}$$

где $\tilde{\mu}(t) = \mu(t) - r(t)$. Заметим, что введение дробных стратегий позволяет записать уравнение для капитала портфеля (3), в котором нет цены рискового актива S_t.

Чтобы сформулировать задачу оптимального управления потреблением и инвестированием, введем целевую функцию

$$J_\lambda(x, v) := \mathbf{E}_{x,\lambda}\left(\int_0^T \ln(\zeta_t)dt + \ln X_T \right), \tag{4}$$

где $\mathbf{E}_{x,\lambda}$ – условное математическое ожидание, соответствующее рыночному параметру $\lambda \in \Lambda$ при заданном $X_0 = x$, интенсивность потребления $\zeta_t = c_t X_t$, случайный процесс $v=(\theta_t, c_t)_{0\le t\le T}$ – *стратегия инвестирования и потребления*. В работе решаем задачу максимизации целевой функции (4) на основе метода стохастического динамического программирования (СДП), согласно которому необходимо решать задачи оптимизации на интервалах [t, T] для всех $0 \le \le t \le T$ для финансовых стратегий, согласованных с естественными фильтрациями $(\mathcal{F}_{t,u})_{t\le u\le T}$ с $\mathcal{F}_{t,u} = \sigma\{W_s - W_t, t \le s \le u\}$ – наименьшими σ -алгебрами, порожденными приращениями винеровского процесса. Всюду далее также $\mathcal{F}_u = \mathcal{F}_{0,u}$. Определим допустимые стратегии. Пусть $\Theta \subseteq \mathbb{R}$ – некоторое замкнутое выпуклое множество.

Определение. Случайный процесс $v = (\theta_u, c_u)_{t\le u\le T}$ называется *допустимой стратегией* на промежутке [t, T] для некоторого фиксированного $x > 0$, если он является согласованным с $(\mathcal{F}_{t,u})_{t\le u\le T}$ процессом со значениями в $\Theta \times \mathbb{R}_+$, процесс $(c_u)_{t\le u\le T}$ интегрируемый п.н. и такой, что уравнение (3) имеет единственное положительное сильное решение на [t, T] с $X_t = x$. Более того $\int_0^T \left|\ln(c_u X_u)\right| du < \infty$ п.н. и

$$\mathbf{E}_{t,x,\lambda}\left(\int_t^T \left(\ln(c_u X_u)\right)^- du + \sup_{t\le u\le T}\left(\ln X_u\right)^- \right) < \infty. \tag{5}$$

Здесь $\mathbf{E}_{t,x,\lambda}$ – условное математическое ожидание, соответствующее рыночному параметру $\lambda \in \Lambda$ при заданных $X_t = x$ и $(a)^- = -\min(a, 0)$ – отрицательная часть a.

Обозначим множество допустимых стратегий как $\mathcal{V}_t$ и $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0$. Для любого $v \in \mathcal{V}$ по формуле Ито из (3) находим

$$X_t = x e^{\int_0^t (r(s) + \theta_s \tilde{\mu}(s) - c_s)ds} \mathcal{E}_t(V),$$

где $\mathcal{E}_t(V) = e^{V_t - \frac{1}{2}\langle V \rangle_t}$ – экспонента Долеан процесса $V_t = \int_0^t \theta_s \sigma(s) dW_s$, и скобка $\langle V \rangle_t = \int_0^t \theta_s^2 \sigma^2(s) ds$ (подробнее см., напр.: в [11]). Наша цель – максимизировать целевую функцию (4) на множестве $\mathcal{V}$, т.е. найти такую стратегию $v^* \in \mathcal{V}$, что

$$J_\lambda(x, v^*) = \sup_{v \in \mathcal{V}} J_\lambda(x, v) =: J_\lambda^*(x). \tag{6}$$

Ввиду метода СДП, чтобы найти такую стратегию, нужно изучить значения функций на интервалах $[t,\ T]$ для всех $0 \le t \le T$:

$$J^*_\lambda(t,x) := \sup_{v \in \mathcal{V}_t} J_\lambda(t,x,v), \quad \lambda \in \Lambda, \tag{7}$$

где для $v \in \mathcal{V}_t$

$$J_\lambda(t,x,v) := \mathbf{E}_{t,x,\lambda}\left(\int_t^T \ln(c_u X_u)du + \ln X_T\right).$$

При этом функционал $J_\lambda(t,x,v)$ может принимать бесконечные значения для некоторых стратегий v. Отметим, что в работе [7] эта задача решена для степенной функции полезности.

Далее в разд. 1 формулируется теорема верификации и строятся стратегии управления. В разд. 2 приводятся основные результаты для задачи робастной оптимизации на финансовых рынках с учетом транзакционных издержек. В разд. 3 приводятся результаты численного моделирования Монте-Карло.

1. Теорема верификации. Стратегии инвестирования и потребления

Обобщим процесс $\begin{cases} dX_t = X_t(r(t) + \theta_t\tilde{\mu}(t) - c_t)dt + \sigma(t)X_t\theta_t dW_t, \\ X_0 = x > 0, \end{cases}$ (3) и определение допустимых стратегий. Определим процесс X_t со значениями в открытом выпуклом множестве $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$ и процесс v_t со значениями в замкнутом множестве $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^2$. Пусть $X = (X_t)_{0 \le t \le T}$, $X_t \in \mathcal{X}$, является непрерывным процессом, который задается СДУ

$$dX_t = a(t, X_t, v_t)dt + b(t, X_t, v_t)dW_t. \tag{8}$$

Функции $a:[0,T]\times\mathcal{X}\times\mathcal{K}\to\mathbb{R}$ и $b:[0,T]\times\mathcal{X}\times\mathcal{K}\to\mathbb{R}$ являются неслучайными непрерывными и такими, что для любой неслучайной $\mathbf{v}\in\mathcal{K}$ уравнение (8) при $v\equiv\mathbf{v}$ имеет единственное сильное решение, при котором $X_t\in\mathcal{X}$ на интервале $[0,T]$ и

$$\int_0^T \left(|a(u, X_u, \mathbf{v})| + b^2(u, X_u, \mathbf{v})\right)du < \infty \quad \text{п.н.}$$

Зафиксируем функции полезности $U_1:[0,T]\times\mathcal{X}\times\mathcal{K}\to\mathbb{R}$ и $U_2:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ такие, что для любой постоянной стратегии $v_t\equiv\mathbf{v}\in\mathcal{K}$ для процесса (8) при $0\le t\le T$ и любого $x\in\mathcal{X}$ выполняется следующее условие:

$$\mathbf{E}_{t,x}\left(\int_0^T \left(U_1(u, X_u, \mathbf{v})\right)^- du + \sup_{t\le u\le T}\left(U_2\left(X_u\right)\right)^-\right) < \infty.$$

Чтобы применить метод СДП для задач оптимизации в модели (8), необходимо ввести определение допустимых стратегий на интервале $[t,T]$ при $0\le t\le T$.

Определение. Случайный процесс $v=(v_u)_{t\le u\le T}$ называется *допустимым* на промежутке $[t,T]$ для $0\le t\le T$ и для некоторого фиксированного $x\in\mathcal{X}$, если он является согласованным с $(\mathcal{F}_{t,u})_{t\le u\le T}$ процессом с непрерывными траекториями со значениями во множестве $\mathcal{K}$ и такой, что уравнение (8) имеет единственное положительное сильное решение на $[t,\ T]$ с $X_t = x$, для которого $X_u\in\mathcal{X}$ при $t\le u\le T$ и выполняются следующие условия:

$$\int_t^T \left(|a(u, X_u, v_u)| + b^2(u, X_u, v_u) + |U_1(u, X_u, v_u)|\right)du < \infty \quad \text{п.н.}$$

и

$$\mathbf{E}_{t,x}\left(\int_t^T \left(U_1(u, X_u, v_u)\right)^- du + \sup_{t\le u\le T}\left(U_2\left(X_u\right)\right)^-\right) < \infty.$$

Напомним, что $\mathcal{V}_t$ обозначает множество допустимых стратегий. Заметим, что для любых $0 \le t \le T$ множество $\mathcal{V}_t \ne \varnothing$, так как по меньшей мере стратегия $v_t \equiv \mathbf{v} \in \mathcal{V}_t$. Обозначим $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0$. Далее для любого $v \in \mathcal{V}_t$ зададим целевую функцию как

$$J(t,x,v) := \mathbf{E}_{t,x}\left(\int_t^T U_1(u, X_u, v_u)du + U_2(X_T)\right).$$

Цель – найти допустимую стратегию $v^* \in \mathcal{V}_t$ такую, что для любого $0 \le t \le T$

$$J^*(t,x) := \sup_{v \in \mathcal{V}_t} J(t,x,v) = J(t,x,v^*). \tag{9}$$

Пусть далее $g:[0,T]\times\mathcal{X} \to \mathbb{R}$ – дважды непрерывно дифференцируемая по x функция. Определим функционал Гамильтона $H(t,x,g) := \sup_{\mathbf{v}\in\mathcal{K}} H_0(t,x,g,\mathbf{v})$, где

$$H_0(t,x,g,\mathbf{v}) = a(t,x,\mathbf{v})g_x(t,x) + g_{xx}(t,x)\frac{\sigma^2(t)b^2(t,x,\mathbf{v})}{2} + U_1(t,x,\mathbf{v}).$$

Здесь g_x, g_{xx} – соответствующие производные функции $g(t,x)$. Запишем уравнение Гамильтона–Якоби–Белмана (HJB):

$$\begin{cases} z_t(t,x) + H(t,x,z) = 0, & t \in [0,T], \\ z(T,x) = U_2(x), & x \in \mathcal{X}. \end{cases} \tag{10}$$

Далее потребуются следующие условия:

H₁. Существует решение $z \in \mathcal{C}^{1,2}([0,T]\times\mathcal{X},\mathbb{R})$ уравнения (10) такое, что для некоторого $0 < \gamma < 1$:

$$\sup_{0\le t\le T}\sup_{x\in\mathcal{X}}\frac{|z(t,x)|}{|x|^{-\gamma} + |x|} < \infty.$$

H₂. Существует измеримая функция $\mathbf{v}_0 : [0,T]\times\mathcal{X} \to \mathcal{K}$ такая, что для решения $z = z(t,x)$ уравнения (10) функционал Гамильтона $H(t,x,z) = H_0(t,x,g,\mathbf{v}_0(t,x))$.

H₃. Для любого $x \in \mathcal{X}$ существует почти наверное единственное решение $X^* = (X_t^*)_{0\le t\le T}$ со значениями во множестве $\mathcal{X}$ уравнения

$$dX_t^* = a^*(t, X_t^*)dt + (b^*(t, X_t))dW_t, \quad X_0^* = x,$$

где $a^*(t,x) = a(t,x,\mathbf{v}_0(t,x))$ и $b^*(t,x) = a(x,\mathbf{v}_0(t,x))$. Более того, процесс $\mathbf{v}_0 = (\mathbf{v}_0(t,X_t^*))_{0\le t\le T}$ является допустимым, т.е. принадлежит $\mathcal{V}$.

H₄. Для любого $0 \le t \le T$ и любой допустимой стратегии $v \in \mathcal{V}_t$: $\mathbf{E}_{t,x}\sup_{t\le u\le T}\left(z(u,X_u)\right)^- < \infty.$

H₅. Для любых $0 \le t \le T$ и $x \in \mathcal{X}$: $\mathbf{E}_{t,x}\sup_{t\le u\le T}\left|z(u,X_u^*)\right| < \infty.$

Используя метод из [7], основанный на формуле Ито и теореме Лебега о мажорируемой сходимости, имеем следующую верификационную теорему.

Теорема 1. *Пусть условия* **H₁–H₅** *выполнены. Тогда для любого* $0 \le t \le T$ ***и*** $x \in \mathcal{X}$

$$z(t,x) = J^*(t,x) = J(t,x,v^*),$$

где оптимальная стратегия $v^* = (v_s^*)_{t\le s\le T}$, $v_s^* = \mathbf{v}_0(s, X_s^*)$ *определена в терминах* **H₂–H₃** *и функция* $J^*(t,x)$ *определена в* (9).

Теперь применим теорему 1 к задаче (6). В этом случае управляющий процесс, описанный в (3), определен на пространстве $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+$, допустимая стратегия $v = (\theta_t, c_t)_{0\le t\le T}$ со значениям в $\mathcal{K} = \Theta\times\mathbb{R}_+$, где $\Theta = \mathbb{R}$. Таким образом, чтобы изучить задачу оптимального потребления и инвестирования (7), применим теорему 1 с функциями полезности $U_1(x,\mathbf{v}) = \ln(x\mathbf{c})$ и $U_2(x) = \ln(x)$, где $x \in \mathcal{X}$, $\mathbf{v} = (\theta, \mathbf{c}) \in \mathcal{K}$. Процесс (3) может быть получен из модели (8) при

$$a(t,x,\mathbf{v}) = x(r(t) + \theta\tilde{\mu}(t) - \mathbf{c}) \text{ и } b(t,x,\mathbf{v}) = x\cdot\theta.$$

Нетрудно видеть, что уравнение HJB (10) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} z_t(t,x) + r(t)x\, z_x(t,x) + \max_{\theta\in\Theta} \Gamma(t,x,z,\theta) + \ln\dfrac{1}{z_x(t,x)} - 1 = 0, \\ z(T,x) = \ln(x), \end{cases} \tag{11}$$

где $\Gamma(t,x,z,\theta) = x\, z_x(t,x)\,\theta\,\tilde{\mu}(t) + x^2 z_{xx}(t,x)\theta^2\sigma^2(t)/2.$ Более того, согласно условию **H₂**, для того чтобы найти функцию оптимального управления $\mathbf{v}_0 = (\theta_0, \mathbf{c}_0)$, необходимо выбрать $\theta_0 = \theta_0(t,x,z)$ и $\mathbf{c}_0 = \mathbf{c}_0(t,x,z)$ следующим образом:

$$\theta_0 = \arg\max_{\theta\in\Theta} \Gamma(t,x,z,\theta) \quad \text{и} \quad \mathbf{c}_0 = \frac{1}{z_x(t,x)x}. \tag{12}$$

Используя далее метод разделения переменных Фурье, можем заключить, что решение уравнения HJB есть функция

$$z(t,x) = y(t)\ln x + A(t), \qquad y(t) = T - t + 1, \tag{13}$$

где $A(t) = \int_t^T y(u)\left(r(u) + F(u,\theta^*(u))\right)du - y(t)\ln\left(y(t)\right)$. Заметим, что для решения (13) функция $\Gamma(t,x,z,\theta) = A(t)F(t,\theta)$ и

$$F(t,\theta) = \theta\tilde{\mu}(t) - \frac{\theta^2\sigma^2(t)}{2}.$$

Более того, из (12) находим, что для решения (13)

$$\theta^*(t) = \theta_0(t) = \arg\max_{\theta\in\Theta} F(t,\theta) = \mathrm{Pr}_\Theta\left(\frac{\tilde{\mu}(t)}{\sigma^2(t)}\right) \quad \text{и} \quad \mathbf{c}^*(t) = \mathbf{c}_0(t) = \frac{1}{y(t)}. \tag{14}$$

Здесь $\mathrm{Pr}_\Theta(\cdot)$ – проекция аргумента на множество Θ. В данном случае эта функция является липшицевой, т.е.

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\sup_{0\le s,t\le T} \frac{|\theta^*(t) - \theta^*(s)|}{|t-s|} < \infty.$$

Из (3) получаем, что соответствующий процесс стоимости портфеля $(X_t^*)_{0\le t\le T}$ определяется как

$$X_t^* = x e^{\int_0^t (r(s) + (\theta^*(s))\tilde{\mu}(s))ds - \int_0^t c^*(s)ds} \mathcal{E}_t(V^*), \tag{15}$$

где $\mathcal{E}_t(V^*)$ – экспонента Долеан для процесса $V_t^* = \int_0^t \theta^*(s)\sigma(s)dW_s$ с его квадратической характеристикой $\left\langle V^*\right\rangle_t = \int_0^t (\theta^*(s))^2\sigma^2(s)ds.$

Изучим стратегию (14).

Теорема 2. *Стратегия* $v^* = (\theta^*(t), c^*(t))_{0\le t\le T}$, *определенная в* (14), *является решением задачи* (6). *Более того, для всех* $0 \le t \le T$ *и* $\lambda\in\Lambda$ *оптимальное значение функции* (7)

$$J_\lambda^*(t,x) = J_\lambda(t,x,v^*) = y(t)\ln x + A(t), \tag{16}$$

где функции $y(t)$ *и* $A(t)$ *определены в* (13).

Доказательство. Подставим (13) в (11). Получаем, что функция *A* удовлетворяет следующему ОДУ:

$$\dot{A}(t) + (T - t + 1)(r(t) + F^*(t)) - \ln(T - t + 1) - 1 = 0,\ A(T)=0,$$

где $F^*(t) = \max_{\theta\in\Theta} F(t,\theta)$. Заметим, что функция $\theta^*(t)$ непрерывна и функция (13) есть решение уравнения (11), т.е. выполнено условие **H₁**. Функция оптимального управления $\mathbf{v}_0 = (\theta_0, \mathbf{c}_0)$ из условия **H₂** определена в (12). Из (15) следует, что $\sup_{\lambda\in\Lambda}\mathbf{E}_\lambda \sup_{0\le t\le T}\left|\ln\left(X_t^*\right)\right| < \infty$. Функция $\theta^*(t)$ непрерывна, значит стратегия $v^* = (\theta^*(t), c^*(t))_{0\le t\le T}$ принадлежит $\mathcal{V}$, т.е. выполнено условие **H₃**. Свойство (5) влечет условие **H₄**. Вид решения (13) означает, что условие **H₅** также следует из равномерной интегрируемости. Следовательно, применяя теорему 1, приходим к требуемому результату. ■

Замечание. Стратегия (14) может быть получена на основе перехода к двойственной задаче (см. пример 6.6, с. 104 в [1]).

2. Робастное оптимальное управление на рынках с транзакционными издержками

Далее рассмотрим задачу оптимизации для финансовых рынков (1) с транзакционными издержками. Предположим, что процентная ставка положительна в некоторой окрестности точки $t = T$, т.е. $\inf_{T-\delta\le t\le T} r(t) > 0$ для некоторого $0 < \delta < T$. Оптимальная стратегия определяется равенствами

$$\alpha_t^* = \theta^*(t)\hat{X}_t,\ \beta_t^* = (1-\theta^*(t))\tilde{X}_t \text{ и } \zeta_t^* = X_t^* \big/ y(t),$$

где дробные стратегии $\theta^*(t)$ и $c^*(t)$ определены в (14), $\hat{X}_t = X_t^* / S_t$, $\tilde{X}_t = X_t^* / B_t$, и процесс стоимости портфеля

$$X_t^* = x + \int_0^t \alpha_u^* dS_u + \int_0^t \beta_u^* dB_u - \int_0^t \zeta_u^* du .$$

Предложение 1. *Процессы* $\hat{X}_t$, X_t^*, $\tilde{X}_t$ и S_t *являются равномерно квадратично интегрируемыми, т.е.*

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \mathbf{E}_\lambda \sup_{0\le t\le T} \left((\hat{X}_t)^2 + (X_t^*)^{-2} + (X_t^*)^2 + (\tilde{X}_t)^2 + S_t^2 \right) < \infty$$

и, более того,

$$\sup_{0\le s,t\le T} \sup_{\lambda\in\Lambda} \frac{\mathbf{E}_\lambda \left((\hat{X}_t - \hat{X}_s)^2 + (X_t^* - X_s^*)^2 + (\tilde{X}_t - \tilde{X}_s)^2 + (S_t - S_s)^2 \right)}{|t-s|} < \infty .$$

Доказательство. Утверждение следует из формулы Ито, свойств экспоненты Долеан и неравенства Дуба (см., например, [11]). ■

Теперь для учета транзакционных издержек введем дискретизированные стратегии для моментов перераспределения (ревизий) портфеля $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ как

$$\alpha_t^{(n)} = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{t_{k-1}}^* \mathbf{1}_{[t_{k-1}, t_k)},\ \beta_t^{(n)} = \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{t_{k-1}}^* \mathbf{1}_{[t_{k-1}, t_k)} + \hat{\beta}_n \mathbf{1}_{[t_{n-1}, T]} \text{ и } \zeta_t^{(n)} = \sum_{k=1}^{n-1} \zeta_{t_{k-1}}^* \mathbf{1}_{[t_{k-1}, t_k)} + \mathbf{1}_{[t_{n-1}, T]} . \tag{17}$$

Здесь $\hat{\beta}_n$ – $\mathcal{F}_{t_{n-1}}$-измеримый поправочный коэффициент, определяемый ниже. На каждом интервале $[t_{k-1}, t_k)$, $k \ge 1$, инвестор платит за транзакции пропорционально объему торгов в момент времени t_k величину $\kappa S_{t_k} |\alpha_{t_k}^{(n)} - \alpha_{t_{k-1}}^{(n)}| = \kappa S_{t_k} |\alpha_{t_k}^* - \alpha_{t_{k-1}}^*|$. Тогда общие транзакционные издержки на интервале $[0, t]$

$$D_t^{(n)} = \kappa \sum_{t_k \le t} S_{t_k} |\alpha_{t_k}^* - \alpha_{t_{k-1}}^*|,$$

где $\kappa = \kappa_n > 0$ – транзакционный коэффициент пропорциональности, зависящий от числа ревизий n. Дополнительно определим величины

$$d_n = \kappa \sum_{k=1}^{n} \sqrt{t_k - t_{k-1}} \text{ и } \delta_n = \max_{1\le k\le n} \sqrt{t_k - t_{k-1}} .$$

Из определения процессов в (17) следует, что они являются càdlàg-процессами, и стратегия $\upsilon_n = (\alpha_t^{(n)}, \beta_t^{(n)}, \zeta_t^{(n)})_{0\le t\le T}$ является предсказуемой, поскольку функции $\theta^*(t)$ и $c^*(t)$ неслучайные (см., напр.: [11]). Из (14) и предложения 1 имеем

Предложение 2. *Процессы, определенные в* (17) *являются равномерно интегрируемыми, т.е.*

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\sup_{n\geq 3}\sup_{0=t_0<t_1<\ldots<t_n=T}\frac{\mathbf{E}_\lambda\left(\left|\int_0^{t_{n-2}}\tilde{\alpha}_u^{(n)}dS_u\right|+\left|\int_0^{t_{n-1}}\tilde{\beta}_u^{(n)}dB_u\right|+\left|\int_0^{t_{n-1}}\tilde{\zeta}_u^{(n)}du\right|\right)}{\delta_n}<\infty,$$

где $\tilde{\alpha}_u^{(n)}=\alpha_u^{(n)}-\alpha_u^*$, $\tilde{\beta}_u^{(n)}=\beta_u^{(n)}-\beta_u^*$ *и* $\tilde{\zeta}_u^{(n)}=\zeta_u^{(n)}-\zeta_u^*$.

Значит, можем переписать процесс стоимости портфеля в виде:

$$X_t^{(n)}=x+\int_0^t\alpha_u^{(n)}dS_u+\int_0^t\beta_u^{(n)}dB_u-\int_0^t\zeta_u^{(n)}du-D_t^{(n)}. \tag{18}$$

Здесь $\int_0^t\alpha_u^{(n)}dS_u=\int_0^{t_{n-2}}\alpha_u^{(n)}dS_u$ и $\int_0^t\zeta_u^{(n)}du=\int_0^{t_{n-2}}\zeta_u^{(n)}du$ для всех $t_{n-2}\leq t\leq T$ и транзакционные издержки $D_t^{(n)}=D_{t_{n-1}}^{(n)}$ для $t_{n-1}\leq t\leq T$. Поэтому в терминальный момент $X_T^{(n)}=X_{t_{n-1}}^{(n)}+\hat{\beta}_n(B_T-B_{t_{n-1}})-(t_n-t_{n-1})$. Теперь для всех $n\geq 1$, при которых $B_T\neq B_{t_{n-1}}$, положим

$$\hat{\beta}_n=\frac{\left(X_{t_{n-1}}^{(n)}\right)^-+\varepsilon_n}{B_T-B_{t_{n-1}}}. \tag{19}$$

Тогда

$$X_T^{(n)}=\left(X_{t_{n-1}}^{(n)}\right)^++\varepsilon_n-(t_n-t_{n-1}).$$

Относительно параметра ε_n предположим, что выполнено условие

$$\varepsilon_n>2(t_n-t_{n-1})\ \text{для всех}\ n\geq 1,\ \lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0\ \text{и}\ \underline{\lim}_{n\to\infty}\varepsilon_n\big/(d_n+\delta_n)>0. \tag{A}$$

Изучим асимптотику при $n\to\infty$ целевой функции (4) соответствующей стратегии $\upsilon_n=(\alpha_t^{(n)},\beta_t^{(n)},\zeta_t^{(n)})_{0\leq t\leq T}$.

Теорема 3. *Пусть моменты перераспределения портфеля* $t_k=kT/n$, $k=\overline{1,n}$, *выполнено условие* (A), *и* $\kappa_n=o(n^{-1/2})$ *при* $n\to\infty$. *Тогда стратегия* (18)–(19) *является асимптотически робастной и оптимальной, т.е.*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\lambda\in\Lambda}|J_\lambda(x,\upsilon^{(n)})-J_\lambda^*(x)|=0, \tag{20}$$

где $J_\lambda^*(x)=(T+1)\ln x+A(0)$.

Доказательство. Заметим, что в условиях теоремы $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$. Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\lambda\in\Lambda}\int_0^T\mathbf{E}_\lambda|\ln\zeta_u^{(n)}-\ln\zeta_u^*|du=0. \tag{21}$$

Поскольку для любых $x,y>0$

$$|\ln x-\ln y|\leq |x-y|\big/\min(x,y), \tag{22}$$

то при $t_{k-1}<u\leq t_k$ и $1\leq k\leq n-1$

$$|\ln\zeta_u^{(n)}-\ln\zeta_u^*|\leq\frac{|\zeta_{t_{k-1}}^*-\zeta_u^*|}{\min(\zeta_{t_{k-1}}^*,\zeta_u^*)}\leq\left(\frac{1}{\zeta_{t_{k-1}}^*}+\frac{1}{\zeta_u^*}\right)|\zeta_{t_{k-1}}^*-\zeta_u^*|.$$

Поэтому из определения оптимального ζ_u^* и неравенства Коши–Буняковского–Шварца имеем для любого $\lambda\in\Lambda$

$$\mathbf{E}_\lambda|\ln\zeta_u^{(n)}-\ln\zeta_u^*|\leq 2T\sqrt{\mathbf{E}_\lambda|\zeta_{t_{k-1}}^*-\zeta_u^*|^2}\sup_{0\leq t\leq T}\mathbf{E}_\lambda(X_t^*)^{-2}.$$

Предложение 1 влечет существование такого $C > 0$, что при $t_{k-1} < u \le t_k$ и $1 \le k \le n-1$

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \mathbf{E}_\lambda \,|\ln \zeta_u^{(n)} - \ln \zeta_u^*| \le C\sqrt{u - t_{k-1}} \le C\delta_n \,.$$

Тогда

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \int_0^{t_{n-1}} \mathbf{E}_\lambda \,|\ln \zeta_u^{(n)} - \ln \zeta_u^*|\, du \le Ct_{n-1}\delta_n \le CT\delta_n \to 0 \text{ при } n\to\infty \,.$$

Более того, можем оценить потребление на интервале $(t_{n-1}, T] = (t_{n-1}, t_n]$:

$$\mathbf{E}_\lambda \int_{t_{n-1}}^{t_n} |\ln \zeta_u^{(n)} - \ln \zeta_u^*|\, du = \mathbf{E}_\lambda \int_{t_{n-1}}^{t_n} |\ln \zeta_u^*|\, du \le C(T+1)\delta_n \,.$$

Тем самым приходим к (21). Далее, используя метод анализа транзакционных издержек из [7], получим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{\lambda\in\Lambda} \frac{\mathbf{E}_\lambda \,|X_T^{(n)} - X_T^*|}{\varepsilon_n} < \infty.$$

Применяя неравенство (22), имеем $|\ln X_T^{(n)} - \ln X_T^*| = 4\,|\ln (X_T^{(n)})^{1/4} - \ln (X_T^*)^{1/4}| \le 4\,|X_T^{(n)} - X_T^*|^{1/4}/m_n^{1/4}$, где $m_n = \min(X_T^{(n)}, X_T^*)$. По неравенству Коши–Буняковского–Шварца

$$\mathbf{E}\,|\ln X_T^{(n)} - \ln X_T^*| \le 4(\mathbf{E}\,|X_T^{(n)} - X_T^*|)^{1/4}\sqrt{\mathbf{E} m_n^{-1/2}} \,.$$

Здесь $\mathbf{E} m_n^{-1/2} = \mathbf{E}(X_T^*)^{-1/2} + \mathbf{E}(m_n^{-1/2} - (X_T^*)^{-1/2}) \le \mathbf{E}(X_T^*)^{-1/2} + \mathbf{E}(X_T^*)^{-1/2}(X_T^{(n)})^{-1/2}(X_T^* - X_T^{(n)})^{1/2}$. Из условия (A): $X_T^{(n)} \ge \varepsilon_n/2$, поэтому $\mathbf{E} m_n^{-1/2} \le \mathbf{E}(X_T^*)^{-1/2} + \sqrt{2}\varepsilon_n^{-1/2}\sqrt{\mathbf{E}\,|X_T^{(n)} - X_T^*|}\sqrt{\mathbf{E}(X_T^*)^{-1}}$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\lambda\in\Lambda} \mathbf{E}_\lambda \,|\ln X_T^{(n)} - \ln X_T^*| = 0.$$

Отсюда и (21) приходим к утверждению теоремы 3. ■

Теперь рассмотрим оптимизационную задачу на рынках с *большими транзакционными издержками*, когда нормированный транзакционный коэффициент $\sqrt{n}\kappa_n$ не стремится к 0 при $n\to\infty$. Предполагаем лишь, что $\kappa_n \to 0$ при $n\to\infty$. В этом случае необходимо изменить стратегию (17), используя подход Лепинетта [9]. Перераспределение портфеля предлагается осуществлять в моменты

$$t_k = \left(k/n\right)^q T\,,\; k = \overline{1,n}\,, \tag{23}$$

где степень $q = q_n \ge 1$ и такая, что $\lim_{n\to\infty}\left(q_n/n + \kappa_n\sqrt{n/q_n}\right) = 0$.

Например, можно взять $q_n = \sqrt{n} + \kappa_n n$. Отметим, что при больших издержках не допускается часто перераспределять портфель.

Теорема 4. *Пусть моменты перераспределения портфеля определены в* (23), *выполнено условие* (A), *и* $\kappa_n \to 0$ *при* $n\to\infty$. *Тогда стратегия* (18)–(19) *является асимптотически робастной и оптимальной, т.е. удовлетворяет* (20).

Доказательство. Поскольку ввиду (23)

$$t_k - t_{k-1} = qT\int_{(k-1)/n}^{k/n} x^{q-1}dx \le \frac{qT}{n} \to 0 \text{ при } n\to\infty\,,$$

то $\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$, и можем применить рассуждения из доказательства теоремы 3. ■

3. Численное моделирование

В этом разделе приведены результаты численного анализа сходимости (20). Определим в модели рынка (1) следующие параметры: $T = 5$, $r = 0{,}055$, $\mu = 0{,}06$, $\sigma = 0{,}1$ и $S_0 = 100$. Функции полезности $U_1(x,\mathbf{v}) = \ln(x\mathbf{c})$ и $U_2(x) = \ln(x)$ с переменными $\mathbf{v} = (\theta,\mathbf{c}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$. Стратегии рассчитываются по формулам (14), (15) и (17). Для этого полагаем

$$F(t,\theta) \equiv F(\theta) = \theta(\mu - r) - \frac{\theta^2\sigma^2}{2}.$$

В этом случае $\theta^* = \arg\max_{\theta\in\mathbb{R}} F(\theta) = (\mu - r)/\sigma^2 = 0{,}5$,

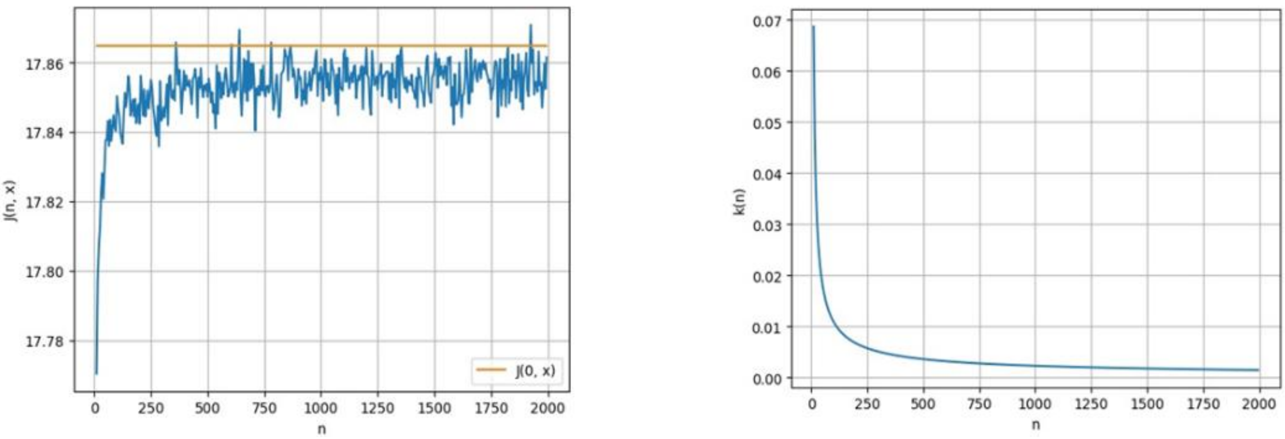
$$X_t^* = xe^{rt+\theta^*(\mu-r)t+\theta^*\sigma W_t - \int_0^t c^*(s)ds - \frac{(\theta^*)^2\sigma^2}{2}t} \text{ и } J^*(0,x) = 6\ln x + \frac{35}{2}(r + F(\theta^*)) - 6\ln 6\,.$$

Положим начальный капитал x = 100. Целевые функции рассчитываются методом Монте-Карло по приближенной формуле

$$J(x,\upsilon^{(n)}) \approx \frac{1}{1000}\sum_{l=1}^{1000}\left(\int_0^T \ln\zeta_u^{(n,l)}du + \ln X_T^{(n,l)}\right),$$

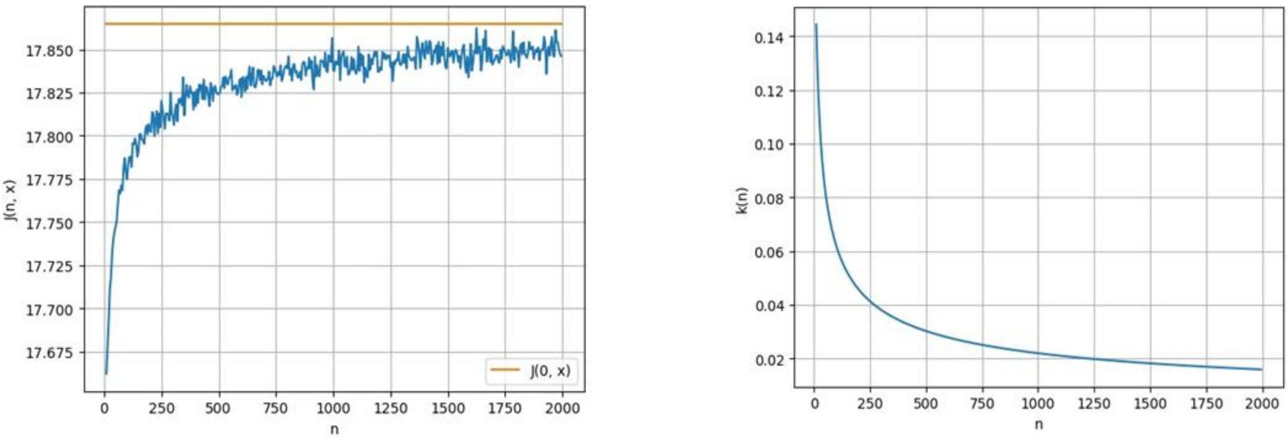
где $\left(\zeta_u^{(n,l)}\right)_{0\le u\le T}$ и $X_T^{(n,l)}$ – интенсивность потребления и капитал, полученные по l-й реализации выборки.

Результаты приведены на рис. 1, 2. На рис. 1, *a* наблюдается сходимость (20) с ростом n для стратегий (17) при малых транзакционных издержках с $\kappa_n = \left(2\sqrt{n}\ln n\right)^{-1}$, график которой представлен на рис. 1, *b*.



Сходимость целевой функции — *a*; График коэффициента κ_n — *b*

Рис. 1. Случай малых транзакционных издержек:
Fig.1. The case of small transaction costs



Сходимость целевой функции — *a*; График коэффициента κ_n — *b*

Рис. 2. Случай больших транзакционных издержек
Fig. 2. The case of large transaction costs

Для численного анализа сходимости в случае больших транзакционных издержек полагаем $\kappa_n = 0{,}5\sqrt{\ln\ln n} / \sqrt{n}$, график которой представлен на рис. 2, *b*. На рис. 2, *a* наблюдается сходимость (20) с ростом *n* для стратегий (17) и (23) при $q_n = \ln n \cdot \ln\ln n$.

На рис. 1, *a* и 2, *a* коричневая линия – теоретическое оптимальное значение целевой функции $J^*(0,x) \approx 17{,}865$, синяя линия – численные аппроксимации целевых функций.

Заключение

В работе впервые рассматривается задача робастного оптимального стохастического управления для рынков Блэка–Шоулса с транзакционными издержками при логарифмических функциях полезности. При этом робастность определяется как устойчивость относительно изменений параметров рынка, которые являются внешними по отношению к инвестору и, как правило, ему неизвестны. Построены явные стратегии потребления и инвестирования, учитывающие как малые, так и большие размеры транзакционных издержек. Представленные теоретические результаты подтверждаются соответствующими экспериментальными данными, полученными в ходе моделирования по методу Монте-Карло.

Список источников

1. Karatzas I., Shreve S.E. Methods of Mathematical Finance. New York : Springer, 1998.
2. Hobson D.G. Robust hedging of the lookback option // Finance and Stochastics. 1998. V. 2. P. 329–347.
3. Bertsimas D., Gupta V., Kallus N. Data-driven robust optimization // Mathematical Programming. 2018. V. 167. P. 235–292. doi: 10.1007/s10107-017-1125-8
4. Carassus L., Oblòj J., Wiesel J. The robust superreplication problem: a dynamic approach // SIAM J. Financial Math. 2019. V. 10. P. 907–941. doi: 10.1137/21M1447040
5. Oblòj J., Wiesel J. Robust estimation of superhedging prices // Annals of Statistics. 2021. V. 49. P. 508–530.
6. Cherif D., El Mansour M., Lepinette E. A short note on super-hedging an arbitrary number of European options with integer-valued strategies // Journal of Optimization Theory and Applications. 2024. V. 201. P. 1301–1312.
7. Egorov S., Pergamenshchikov S.M. Optimal investment and consumption for financial markets with jumps under transaction costs // Finance and Stochastics. 2023. V. 28. P. 123–159.
8. Leland H. Option Pricing and Replication with Transactions Costs // Journal of Finance. 1985. V. 5. P. 1283–1301.
9. Lépinette E. Modified Leland's strategy for constant transaction costs rate // Mathematical Finance. 2012. V. 22 (4). P. 741–752.
10. Klüppelberg C., Pergamenshchikov S.M. Optimal consumption and investment with bounded downside risk for power utility functions // Optimality and Risk – Modern Trends in Mathematical Finance: the Kabanov Festschrift / F. Delbaen, M. Rasonyi, C. Stricker (eds.). Heidelberg : Springer, 2009. P. 133–169.
11. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Теория мартингалов. М. : Наука, 1986.

References

1. Karatzas, I. & Shreve, S.E. (1998) *Methods of Mathematical Finance*. New York: Springer.
2. Hobson, D.G. (1998) Robust hedging of the lookback option. *Finance and Stochastics*. 2. pp. 329–347.
3. Bertsimas, D., Gupta, V. & Kallus, N. (2018) Data-driven robust optimization. *Mathematical Programming*. 167. pp. 235–292. DOI: 10.1007/s10107-017-1125-8
4. Carassus, L., Oblòj, J. & Wiesel, J. (2019) The robust superreplication problem: a dynamic approach. *SIAM J. Financial Math*. 10. pp. 907–941. DOI: 10.1137/21M1447040
5. Oblòj, J. & Wiesel, J. (2021) Robust estimation of superhedging prices. *Annals of Statistics*. 49. pp. 508–530.
6. Cherif, D., El Mansour, M. & Lepinette, E. (2024) A short note on super-hedging an arbitrary number of European options with integer-valued strategies. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 201. pp. 1301–1312.
7. Egorov, S. & Pergamenshchikov, S.M. (2023) Optimal investment and consumption for financial markets with jumps under transaction costs. *Finance and Stochastics*. 28. pp. 123–159.
8. Leland, H. (1985) Option Pricing and Replication with Transactions Costs. *Journal of Finance*. 5. pp. 1283–1301.
9. Lépinette, E. (2012) Modified Leland's strategy for constant transaction costs rate. *Mathematical Finance*. 22(4). pp. 741–752.
10. Klüppelberg, C. & Pergamenshchikov, S.M. (2009) *Optimal consumption and investment with bounded downside risk for power utility functions*. In: Delbaen, F., Rasonyi, M. & Stricker, C. (eds) *Kabanov Festschrift. Optimality and Risk – Modern Trends in Mathematical Finance*. Heidelberg: Springer. pp. 133–169.
11. Liptser, R.S. & Shiryaev, A.N. (1989) *Teoriya martingalov* [Theory of Martingales]. Moscow: Nauka.

***Информация об авторах*:**
Гондин Сергей Алексеевич – младший научный сотрудник международной лаборатории статистики случайных процессов и количественного финансового анализа научного управления Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: gondin02@mail.ru
Мурзинцева Алена Андреевна – младший научный сотрудник международной лаборатории статистики случайных процессов и количественного финансового анализа научного управления Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: alshishkovatomsk@gmail.com
Пергаменщиков Сергей Маркович – профессор, доктор физико-математических наук, профессор лаборатории математики им. Рафаэля Салема Руанского университета (Руан, Франция); профессор кафедры математического анализа и теории функций механико-математического факультета Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: serge.pergamenchtchikov@univ-rouen.fr
Пчелинцев Евгений Анатольевич – доцент, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического анализа и теории функций механико-математического факультета Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: evgen-pch@yandex.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

***Information about the authors*:**
Gondin Serguei A. (Researcher, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: gondin02@mail.ru
Murzintseva Alyona A. (Researcher, Tomsk State University, National Research Tomsk, Russian Federation). E-mail: alshishkovatomsk@gmail.com
Pergamenshchikov Serguei M. (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Rouen Normandy University, Rouen, France; National Research Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: serge.pergamenchtchikov@univ-rouen.fr
Pchelintsev Evgeny A. (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Dept, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: evgen-pch@yandex.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 27.03.2025; принята к публикации 02.09.2025

Received 27.03.2025; accepted for publication 02.09.2025