ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2025 Математика и механика № 97
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Научная статья
УДК 514.76 MSC: 53C15, 53C30, 53C25, 22E25
doi: 10.17223/19988621/97/2

Левоинвариантные кэлеровы и полупаракэлеровы структуры на некоторых шестимерных неразрешимых группах Ли

Николай Константинович Смоленцев[1], Анастасия Юрьевна Соколова[2]

[1, 2] Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия
[1] smolennk@mail.ru
[2] socolova.nastya25@mail.ru

Аннотация. Рассматривается вопрос о существовании левоинвариантных кэлеровых и полупаракэлеровых структур на шестимерных неразрешимых группах Ли, алгебры Ли которых являются полупрямыми произведениями. В соответствии с классификационными результатами существует четыре таких алгебры Ли. Показано, что одна из указанных четырех групп Ли допускает левоинвариантные кэлеровы метрики, а остальные три допускают левоинвариантные полупаракэлеровы и полукэлеровы структуры.

Ключевые слова: шестимерные неразрешимые группы Ли, шестимерные неразрешимые алгебры Ли, левоинвариантные кэлеровы структуры, левоинвариантные полупаракэлеровы структуры

Для цитирования: Смоленцев Н.К., Соколова А.Ю. Левоинвариантные кэлеровы и полупаракэлеровы структуры на некоторых шестимерных неразрешимых группах Ли // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 97. С. 17–30. doi: 10.17223/19988621/97/2

Original article

Left-invariant Kähler and semi-para-Kähler structures on some six-dimensional unsolvable Lie groups

Nikolai K. Smolentsev[1], Anastasia Yu. Sokolova[2]

[1, 2] Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation
[1] smolennk@mail.ru
[2] socolova.nastya25@mail.ru

Abstract. It is well known that semisimple Lie groups do not admit left-invariant symplectic structures, and if a four-dimensional Lie group admits a left-invariant symplectic structure, then it must be solvable. In the six-dimensional case, this is not the case; there exist six-dimensional symplectic unsolvable Lie algebras. An example of such a Lie algebra was given by Chu B.-Y. in 1974. Chu also showed that if the Lie algebra of a Lie group has

a Levi–Maltsev decomposition in the form of a direct product, then there are no symplectic structures on such a Lie group. Thus, the question remains about the existence of left-invariant symplectic structures only on such Lie groups for which the Levi–Maltsev decomposition of the corresponding Lie algebras is a semidirect product. It is known that there are four classes of such Lie algebras. This paper studies questions about the existence of various left-invariant geometric structures on four six-dimensional insoluble Lie groups whose Lie algebras are semidirect products. It is shown that left-invariant symplectic structures and even Kähler structures with Einstein pseudo-Riemannian metrics exist only on one of these Lie groups. This is a Lie group with a Lie algebra defined by nonzero Lie brackets: $[e_1, e_2] = e_2$, $[e_1, e_3] = e_3$, $[e_4, e_5] = 2e_5$, $[e_4, e_6] = -2e_6$, $[e_5, e_6] = e_4$, $[e_2, e_4] = e_2$, $[e_2, e_5] = e_3$, $[e_3, e_4] = -e_3$, $[e_3, e_6] = e_2$. Thus, a six-dimensional symplectic Lie algebra must be solvable except in one case. The remaining three Lie groups admit left-invariant semi-para-Kähler and semi-Kähler structures with integrable complex or paracomplex structures.
Keywords: six-dimensional unsolvable Lie groups, six-dimensional unsolvable Lie algebras, left-invariant Kähler structures, left-invariant semi-para-Kähler structures

For citation: Smolentsev, N.K., Sokolova, A.Yu. (2025) Left-invariant Kähler and semi-para-Kähler structures on some six-dimensional unsolvable Lie groups. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 97. pp. 17–30. doi: 10.17223/19988621/97/2

1. Введение

Левоинвариантные структуры на группе Ли определяются своими значениями на алгебре Ли. Поэтому при их исследовании обычно имеют дело со структурами на алгебре Ли группы Ли. В этом смысле мы будем говорить далее, например, о симплектической, или кэлеровой, алгебре Ли, имея в виду левоинвариантную симплектическую, или кэлерову, структуру на соответствующей группе Ли.

Хорошо известно, что разрешимые алгебры Ли могут допускать симплектические структуры [1, 2]. В работе B.-Y. Chu [3] показано, что четырехмерная симплектическая алгебра Ли обязана быть разрешимой. В шестимерном случае это не так, и Chu [3] привел пример шестимерной симплектической, но неразрешимой алгебры Ли. В этой же работе показано, что полупростые алгебры Ли не могут быть симплектическими. Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ неразрешима, то она имеет разложение Леви–Мальцева $\mathfrak{g} = N \oplus S$ в виде прямой суммы радикала N и разрешимой подалгебры S. В работе [3] показано, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ имеет разложение Леви–Мальцева в виде прямого произведения $\mathfrak{g} = N \times S$, тогда на ней не существует симплектических структур. Таким образом, остается вопрос о существовании симплектических структур только на неразрешимых шестимерных алгебрах Ли, для которых разложение Леви–Мальцева является полупрямым произведением $\mathfrak{g} = N \ltimes S$. Согласно классификации шестимерных неразрешимых алгебры Ли [4, 5], которые являются полупрямыми произведениями, существует четыре класса таких алгебр Ли.

Пусть (следуя обозначениям работы [4]) $A_{3.1}$, $A_{3.3}$, $A_{3.5}$ – трехмерные разрешимые алгебры Ли с базисом $\{e_1, e_2, e_3\}$ и со следующими ненулевыми скобками Ли: $A_{3.1}$ – коммутативная алгебра; $A_{3.3}$: $[e_1, e_2] = e_3$; $A_{3.5}$: $[e_1, e_2] = e_2$, $[e_1, e_3] = e_3$. Таким образом, $A_{3.1} = \mathbf{R}^3$, $A_{3.3}$ – это трехмерная алгебра Гейзенберга $\mathfrak{h}_3$, $A_{3.5}$ – трехмерная разрешимая и не унимодулярная алгебра Ли. Пусть $so(3)$ – алгебра Ли группы ортогональных матриц и $sl(2,\mathbf{R})$ – алгебра Ли матриц порядка 2 с нулевым следом. На данных алгебрах Ли выберем обычный базис $\{e_4, e_5, e_6\}$. Как известно [4, 5], существует четыре шестимерных неразрешимых алгебры Ли, которые являются полупрямыми произведениями. Они определяются следующими скобками Ли:

1. $A_{3.5} \ltimes sl(2,\mathbf{R})$: $[e_1, e_2] = e_2$, $[e_1, e_3] = e_3$, $[e_4, e_5] = 2e_5$, $[e_4, e_6] = -2e_6$, $[e_5, e_6] = e_4$, $[e_2, e_4] = e_2$, $[e_2, e_5] = e_3$, $[e_3, e_4] = -e_3$, $[e_3, e_6] = e_2$.
2. $A_{3.3} \ltimes sl(2,\mathbf{R})$: $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_4, e_5] = 2e_5$, $[e_4, e_6] = -2e_6$, $[e_5, e_6] = e_4$, $[e_4, e_1] = e_1$, $[e_5, e_2] = e_1$, $[e_6, e_1] = e_2$, $[e_4, e_2] = -e_2$.
3. $A_{3.1} \ltimes sl(2,\mathbf{R})$: $[e_4, e_5] = 2e_5$, $[e_4, e_6] = -2e_6$, $[e_5, e_6] = e_4$, $[e_4, e_1] = 2e_1$, $[e_5, e_2] = 2e_1$, $[e_6, e_1] = e_2$, $[e_4, e_3] = -2e_3$, $[e_5, e_3] = e_2$, $[e_6, e_2] = 2e_3$.
4. $A_{3.1} \ltimes so(3)$: $[e_4, e_5] = e_6$, $[e_4, e_6] = -e_5$, $[e_5, e_6] = e_4$, $[e_4, e_2] = e_3$, $[e_5, e_1] = -e_3$, $[e_6, e_1] = e_2$, $[e_4, e_3] = -e_2$, $[e_5, e_3] = e_1$, $[e_6, e_2] = -e_1$.

Пусть G_1, G_2, G_3 и G_4 – группы Ли, соответствующие алгебрам Ли указанного списка. Вопрос о левоинвариантных симплектических структурах на данных группах Ли (о симплектических структурах алгебрах Ли) рассмотрен в работе авторов [6]. Показано, что только одна из четырех алгебр Ли допускает симплектические структуры. Таким образом, результат Chu относительно шестимерных неразрешимых алгебр Ли может быть уточнен следующим образом: шестимерная симплектическая алгебра Ли обязана быть разрешимой за исключением одного случая $A_{3.5} \ltimes sl(2,\mathbf{R})$. Поэтому эта исключительная неразрешимая симплектическая алгебра Ли $A_{3.5} \ltimes sl(2,\mathbf{R})$ заслуживает более глубокого изучения.

Данная работа является продолжением работы [6]. Мы рассмотрим вопросы о существовании левоинвариантных кэлеровых, полукэлеровых и полупаракэлеровых структур на указанных выше четырех шестимерных неразрешимых группах Ли. Будет показано, что только на одной из четырех групп Ли, а именно на G_1, существуют кэлеровы структуры, и даже с эйнштейновыми псевдоримановыми метриками. На остальных трех группах Ли существуют левоинвариантные полупаракэлеровы и полукэлеровы структуры с интегрируемыми комплексными или паракомплексными структурами.

2. Предварительные сведения

Напомним основные понятия, используемые в данной работе.

Почти комплексной структурой на $2n$-мерном многообразии M называется поле J эндоморфизмов $J: TM \to TM$ такое, что $J^2 = -Id$. Почти комплексная структура J называется *интегрируемой*, если обращается в нуль тензор Нейенхейса, определенный равенством $N_J(X, Y) = [JX, JY] - [X, Y] - J[JX, Y] - J[X, JY]$, для любых векторных полей X, Y на M. В этом случае J определяет на M структуру комплексного многообразия.

Будем рассматривать левоинвариантные почти комплексные структуры на группе Ли G, которые задаются левоинвариантным полем эндоморфизмов $J: TG \to TG$ касательного расслоения TG. Поскольку такой тензор J определяется линейным оператором на алгебре Ли $\mathfrak{g} = T_eG$, то мы будем говорить, что J – это инвариантная почти комплексная структура на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. В этом случае условие интегрируемости J формулируется на уровне алгебры Ли: $N_J(X, Y) = 0$ для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$. В этом случае будем говорить, что J – это комплексная структура на алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Левоинвариантная симплектическая структура ω на группе Ли G задается 2-формой максимального ранга на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Замкнутость формы ω эквивалентна следующему условию на алгебре Ли: $\omega([X, Y], Z) - \omega([X, Z], Y) + \omega([Y, Z], X) = 0$, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. В этом случае алгебру Ли $\mathfrak{g}$ будем называть симплектической.

Левоинвариантная (псевдо)*кэлерова* структура (ω, J, g) на группе Ли G образована тремя левоинвариантными тензорами: симплектической формой ω, комплексной структурой J, согласованной с формой ω: $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$ и (псевдо)римановой метрикой g, определенной формулой $g(X, Y) = \omega(X, JY)$. Поскольку ω, J и g определяются своими значениями на алгебре Ли, то будем говорить, что (ω, J, g) – (псевдо)кэлерова структура на алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Почти *паракомплексной* структурой на $2n$-мерном многообразии M называется поле P эндоморфизмов касательного расслоения TM таких, что $P^2 = Id$, причем ранги собственных распределений $T^{\pm}M := \ker(Id \mp P)$ равны. Почти паракомплексная структура P называется *интегрируемой*, если распределения $T^{\pm}M$ инволютивны. В этом случае P называется паракомплексной структурой. Тензор Нийенхейса N почти паракомплексной структуры J определяется равенством $N_P(X, Y) = [X, Y] + [PX, PY] - P[PX, Y] - P[X, PY]$, для любых векторных полей X, Y на M. Как и в комплексном случае, паракомплексная структура P интегрируема тогда и только тогда, когда $N_P(X, Y) = 0$. Обзор теории паракомплексных структур представлен в работе [7].

Мы будем рассматривать левоинвариантные (почти) паракомплексные структуры на группе Ли G, которые задаются левоинвариантным полем эндоморфизмов $P: TG \to TG$ касательного расслоения TG. Поскольку такой тензор P определяется линейным оператором на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, то мы будем говорить, что P – инвариантная почти паракомплексная структура на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. В этом случае условие интегрируемости P также формулируется на уровне алгебры Ли: $N_P(X, Y) = 0$ для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$. Из условия интегрируемости P следует, что собственные подпространства $\mathfrak{g}^+$ и $\mathfrak{g}^-$ оператора P на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ являются подалгебрами. Поэтому инвариантная почти паракомплексная структура на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ интегрируема тогда и только тогда, когда алгебра Ли $\mathfrak{g}$ может быть представлена в виде прямой суммы двух подалгебр:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^+ \oplus \mathfrak{g}^-.$$

Паракэлерова структура на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ – это тройка (ω, P, g), состоящая из симплектической формы ω, паракомплексной структуры P, согласованной с формой ω: $\omega(PX, PY) = -\omega(X, Y)$, и (псевдо)римановой метрики g, определенной формулой $g(X, Y) = \omega(X, PY)$.

На последних трех алгебрах Ли представленного во введении списка нет замкнутых невырожденных 2-форм. Условие $d\omega = 0$ приводит к вырожденности формы ω. В то же время $d(\omega^3) = 3\omega \wedge \omega \wedge d\omega = 0$ для любой 2-формы ω на шестимерном многообразии. Промежуточным свойством будет следующее: $d(\omega^2) = 2\omega \wedge d\omega = 0$. Поэтому мы ослабим свойство замкнутости и потребуем, чтобы выполнялось свойство

$$\omega \wedge d\omega = 0.$$

Последнее условие хорошо известно. В случае почти эрмитовых групп Ли размерности $2n$ свойство $d(\omega^{n-1}) = 0$ фундаментальной формы ω определяет класс полукэлеровых групп Ли по классификации Грея–Харвеллы [8], т.е. таких, что $\delta\omega = 0$.

В нашем случае псевдоэрмитовых метрик мы будем по аналогии называть такие многообразия полукэлеровыми.

Определение 1. *Левоинвариантная почти эрмитова (почти параэрмитова) структура* (G^{2n}, g, ω, J) *на группе Ли, фундаментальная форма* ω *которой обладает свойством* $d(\omega^{n-1}) = 0$*, называется полукэлеровой (полупаракэлеровой).*

На алгебрах Ли $A_{3.3} \ltimes sl(2,\mathbf{R})$, $A_{3.1} \ltimes sl(2,\mathbf{R})$ и $A_{3.1} \ltimes so(3)$ нет симплектических форм. Для невырожденной 2-формы ω ее внешний дифференциал $d\omega$ не равен нулю. При этом он может быть невырожденным как 3-форма. Понятие *невырожденности* (стабильности) для 3-формы $\boldsymbol{\Omega}$ на шестимерном пространстве определено в работе Хитчина [9]. Для 3-формы $\boldsymbol{\Omega}$ Хитчин построил линейный оператор K_Ω, квадрат которого пропорционален тождественному оператору Id. Напомним основные конструкции Хитчина.

Пусть V – шестимерное вещественное векторное пространство, и μ – форма объема на V. Пусть $\Omega \in \Lambda^3V^*$ и $X \in V$, тогда $\iota_X\Omega \in \Lambda^2V^*$ и $\iota_X\Omega\wedge\Omega \in \Lambda^5V^*$. Естественное спаривание внешним произведением $V^*\otimes\Lambda^5V^* \to \Lambda^6V^* \cong \mathbf{R}\mu$ определяет изоморфизм A: $\Lambda^5V^* \cong V$, и, используя это, Хитчин определил линейное преобразование K_Ω: $V \to V$ следующей формулой:

$$K_\Omega(X) = A(\iota_X\Omega \wedge \Omega).$$

Другими словами, $\iota_{K\Omega(X)}\mu = \iota_X\Omega \wedge \Omega$. Оператор K_Ω обладает свойствами: $\mathrm{trace}(K_\Omega) = 0$ и $K_\Omega^2 = \lambda(\Omega)I$. Если $\lambda(\Omega) \neq 0$, то 3-форма $\boldsymbol{\Omega}$ называется невырожденной. Если $\lambda(\Omega) < 0$, то получается структура J_Ω комплексного векторного пространства на пространстве V:

$$J_\Omega = \frac{1}{\sqrt{-\lambda(\Omega)}} K_\Omega,$$

а если $\lambda(\Omega) > 0$, то получаем паракомплексную структуру P_Ω, т.е., $P_\Omega^2 = Id$, $P_\Omega \neq 1$ по аналогичной формуле

$$P_\Omega = \frac{1}{\sqrt{\lambda(\Omega)}} K_\Omega.$$

Таким образом, если внешний дифференциал $d\omega$ невырожденный, то оператор $K_{d\omega}$ может определять либо почти комплексную, либо почти паракомплексную структуру на алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Пусть ∇ – связность Леви-Чивита, соответствующая (псевдо)римановой метрике g. Она определяется из обычной шестичленной формулы, которая для левоинвариантных векторных полей X, Y, Z на группе Ли принимает вид: $2g(\nabla_XY, Z) = g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g(X, [Z, Y])$. Тензор кривизны определяется формулой $R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}$. Тензор Риччи $Ric(X, Y)$ определяется как свертка тензора кривизны по первому и четвертому (верхнему) индексам. Оператор Риччи определяется формулой $Ric(X, Y) = g(RIC(X), Y)$. Для вычислений геометрических характеристик использовалась система Maple.

3. Левоинвариантные структуры на неразрешимых группах Ли

В данном разделе мы рассмотрим левоинвариантные геометрические структуры на каждой из четырех шестимерных неразрешимых групп Ли, алгебры Ли которых являются полупрямыми произведениями. Напомним, что левоинвариантные геометрические структуры на группе Ли определяются своими значениями на алгебре Ли, поэтому при их исследовании обычно используется только алгебра Ли группы Ли. В этом смысле мы будем говорить, например, о симплектической, или кэлеровой, алгебре Ли, имея в виду левоинвариантную симплектическую, или кэлерову, структуру на соответствующей группе Ли.

3.1. Левоинвариантные кэлеровы структуры на группе G_1. Группа G_1 имеет алгебру Ли $A_{3.5} \ltimes sl(2,\mathbf{R})$. Данную алгебру Ли приводит Chu [3] в качестве примера, показывающего, что шестимерная симплектическая алгебра Ли не обязана быть разрешимой. Она состоит из матриц вида:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & a_6 & -a_4 \end{pmatrix}.$$

Общий вид симплектической 2-формы на данной алгебре Ли получен в работе [6]:

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_{12} & 0 & 0 & \omega_{12} & \omega_{13} & 0 \\ -\omega_{13} & 0 & 0 & -\omega_{13} & 0 & \omega_{12} \\ 0 & -\omega_{12} & \omega_{13} & 0 & \omega_{45} & \omega_{46} \\ 0 & -\omega_{13} & 0 & -\omega_{45} & 0 & \omega_{56} \\ 0 & 0 & -\omega_{12} & -\omega_{46} & -\omega_{56} & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

с условием невырожденности

$$\det(\omega) = \omega_{12}^4\omega_{45}^2 - 4\omega_{12}^3\omega_{13}\omega_{45}\omega_{56} + 2\omega_{12}^2\omega_{13}^2\omega_{45}\omega_{46} + 4\omega_{12}^2\omega_{13}^2\omega_{56}^2 - 4\omega_{12}\omega_{13}^3\omega_{46}\omega_{56} + \omega_{13}^4\omega_{46}^2 \neq 0.$$

Практически невозможно найти комплексную структуру в общем виде, согласованную с данной формой. Поэтому мы будем использовать частные случаи, когда симплектическая 2-форма имеет наиболее простой вид.

Случай 1. Указанному выше семейству принадлежит симплектическая структура

$$\omega_1 = e^1 \wedge e^2 + e^2 \wedge e^4 + e^3 \wedge e^6 - e^4 \wedge e^5, \tag{2}$$

приведенная в работе Chu [3].

Найдем комплексные структуры J, согласованные с формой (2). Для этого мы берем матрицу почти комплексной структуры $J = (\psi_{ij})$ и решаем ряд условий: $J^2 = -Id$, условие согласованности $\omega_1(JX, JY) = \omega_1(X, Y)$ и условие интегрируемости $N_J(X,Y) = [JX, JY] - [X, Y] - J[X, JY] - J[JX, Y] = 0$. Получается следующая система уравнений для нахождения согласованной комплексной структуры J:

$$\begin{cases} J^i_k J^k_j = -\delta^i_j, \\ J^k_i \omega_{kj} + \omega_{ik} J^k_j = 0, \\ J^l_i J^m_j C^k_{lm} - J^m_j C^l_{im} J^k_l - J^l_i C^m_{lj} J^k_m - C^k_{ij} = 0, \end{cases} \tag{3}$$

где C^k_{ij} – структурные константы алгебры Ли.

Данная система алгебраических уравнений решается с использованием символьных вычислений Maple. Сначала решаем самое простое условие согласованности, затем – условие интегрируемости, и в заключение проверяется условие $J^2 = -Id$.

Для алгебры Ли $A_{3.5} \ltimes sl(2,\mathbf{R})$ получается шесть решений условий (3). Для каждого случая определяем ассоциированную псевдориманову метрику формулой $g_J(X, Y) = \omega_1(X, JY)$. В результате каждое решение представляет кэлерову структуру (ω_1, J, g_J). Причем среди них есть одна кэлерова структура (ω_1, J_1, g_1) с эйнштейновой метрикой g_1 скалярной кривизны $S = 12$. Такая комплексная структура и метрический тензор представлены следующими матрицами:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Случай 2. Указанному выше семейству симплектических форм (1) также принадлежит следующая симплектическая структура:

$$\omega_2 = e^1 \wedge e^3 + e^2 \wedge e^5 - e^3 \wedge e^4 + e^4 \wedge e^6. \qquad (5)$$

Вычисления показывают, что существует пять семейств комплексных структур J, согласованных с формой (5). Каждое решение представляет кэлерову структуру (ω_2, J, g_J). Причем среди них есть одна кэлерова структура (ω_2, J_2, g_2) с эйнштейновой метрикой g_2 ненулевой скалярной кривизны $S = -12a$, зависящей от одного параметра. Такая комплексная структура и метрический тензор представлены следующими матрицами:

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a & 0 & \frac{1}{a} & \frac{a}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a} & -\frac{a}{4} \\ 0 & -\frac{a^3}{4} & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a^3}{4} & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & a & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & \frac{a}{4} \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Параэрмитова структура. На алгебре Ли $A_{3.5} \ltimes sl(2,\mathbf{R})$ имеется (интегрируемая) паракомплексная структура P_0, соответствующая полупрямому произведению подалгебр $\mathfrak{g} = A_{3.5} \ltimes sl(2,\mathbf{R})$. Она имеет диагональную матрицу $P_0 = \mathrm{diag}\{1, 1, 1, -1, -1, -1\}$. Кроме того, на алгебре Ли $A_{3.5} \ltimes sl(2,\mathbf{R})$ имеется 2-форма $\Omega_0 = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^6$, также соответствующая разложению в полупрямое произведение (здесь $e^1, \ldots, e^6$ – дуальный базис). Однако форма Ω_0 не является полукэлеровой. Поэтому на алгебре Ли $A_{3.5} \ltimes sl(2,\mathbf{R})$ определена параэрмитова структура (Ω_0, P_0, g_0), где псевдориманова метрика g_0 определяется равенством $g_0(X, Y) = \Omega_0(X, P_0Y)$. Эта метрика имеет тензор Риччи вида:

$$Ric = -e^1 \cdot e^1 - \frac{1}{2} e^5 \cdot e^5 - \frac{1}{2} e^6 \cdot e^6 - 2e^2 \cdot e^5 + 2e^3 \cdot e^6 - 2e^4 \cdot e^3 - 5e^5 \cdot e^6$$

и нулевую скалярную кривизну. Напомним, что $e^i \cdot e^j = \frac{1}{2}(e^i \otimes e^j + e^i \otimes e^j)$ – симметричное произведение.

Полученные результаты сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *Группа Ли G_1 с алгеброй Ли $A_{3.5} \ltimes sl(2,\mathbf{R})$ допускает многопараметрическое семейство левоинвариантных симплектических структур* (1). *Группа G_1 допускает левоинвариантные кэлеровы структуры, в том числе и такие, которые имеют эйнштейновы метрики* (4) *и* (6). *Группа G_1 имеет также естественную левоинвариантную параэрмитову структуру нулевой скалярной кривизны.*

3.2. Левоинвариантные полупаракэлеровы структуры на группе G_2. Группа G_2 имеет алгебру Ли $A_{3.3} \ltimes sl(2,\mathbf{R})$. На данной алгебре Ли нет левоинвариантных симплектических структур, из условия замкнутости $d\omega = 0$ следует вырожденность 2-формы ω. Это легко показать. Пусть $\omega = \omega_{ij}e^i \wedge e^j$ – произвольная 2-форма. Компоненты внешнего дифференциала имеют следующие выражения через структурные константы C_{ij}^k:

$$d\omega_{ijk} = -C_{ij}^s\omega_{sk} + C_{ik}^s\omega_{sj} - C_{jk}^s\omega_{si}.$$

Из условия $d\omega_{ijk} = 0$ имеем, в частности, $d\omega_{134} = -C_{13}^s\omega_{s4} + C_{14}^s\omega_{s3} - C_{34}^s\omega_{s1} = 0$. Из коммутационных соотношений $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_4, e_5] = 2e_5$, $[e_4, e_6] = -2e_6$, $[e_5, e_6] = e_4$, $[e_4, e_1] = e_1$, $[e_5, e_2] = e_1$, $[e_6, e_1] = e_2$, $[e_4, e_2] = -e_2$ получаем $C_{13}^s = 0$, $C_{34}^s = 0$ и $C_{14}^s = -1$. Поэтому имеем $d\omega_{134} = -\omega_{13} = 0$. Совершенно аналогично получаются следующие равенства: $\omega_{13} = 0$, $\omega_{23} = 0$, $\omega_{34} = 0$, $\omega_{35} = 0$, $\omega_{36} = 0$, из которых следует вырожденность формы ω.

Полупаракэлерова структура, соответствующая полупрямому произведению. На данной алгебре Ли имеется паракомплексная структура P_0, соответствующая полупрямому произведению подалгебр: $\mathfrak{g} = A_{3.3} \ltimes sl(2,\mathbf{R})$. Она имеет диагональную матрицу $P_0 = \mathrm{diag}\{1, 1, 1, -1, -1, -1\}$.

Кроме того, на алгебре Ли $A_{3.3} \ltimes sl(2,\mathbf{R})$ имеется естественная 2-форма $\Omega = ae^1 \wedge e^4 + be^2 \wedge e^5 + ce^3 \wedge e^6$, также соответствующая полупрямому произведению. Легко видеть, что она согласована с оператором P_0 и является полукэлеровой при условии $a = -b$. Выберем две наиболее простые полукэлеровы формы

$$\Omega_{01} = -e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^6 \text{ и } \Omega_{02} = e^1 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^6. \qquad (7)$$

Таким образом, на алгебре Ли $A_{3.3} \ltimes sl(2,\mathbf{R})$ определены две полупаракэлеровых структуры $(\Omega_{0i}, P_0, g_{0i})$, $i = 1, 2$, псевдоримановы метрики которых $g_{0i}(X, Y) = \Omega_{0i}(X, P_0Y)$ имеют нулевые скалярные кривизны и тензоры Риччи вида:

$$Ric_1 = -4e^2 \cdot e^4 - 4e^4 \cdot e^4 - 8e^5 \cdot e^6,$$
$$Ric_2 = 4e^2 \cdot e^4 - 4e^4 \cdot e^4 - 8e^5 \cdot e^6.$$

Обе формы Ω_{0i} имеют вырожденные в смысле Хитчина внешние дифференциалы.

Общие полупаракэлеровы структуры. На алгебре Ли не существует замкнутых невырожденных 2-форм. Поэтому будем рассматривать полукэлеровы 2-формы, т.е. невырожденные формы ω, удовлетворяющие условию полукэлеровости $\omega \wedge d\omega = 0$.

Пусть $\omega = \omega_{ij}e^i \wedge e^j$ – произвольная 2-форма. Условие $\omega \wedge d\omega = 0$ выполняется при следующих значениях параметров:

$$\omega_{12}\omega_{35} - \omega_{13}\omega_{25} + \omega_{15}\omega_{23} = 0,\ \omega_{12}\omega_{34} - \omega_{13}\omega_{24} + \omega_{14}\omega_{23} = 0,$$
$$-\omega_{12}\omega_{36} + \omega_{13}\omega_{26} - \omega_{16}\omega_{23} = 0,$$
$$\omega_{13}\omega_{46} - \omega_{14}\omega_{36} + \omega_{16}\omega_{34} + \omega_{23}\omega_{56} - \omega_{25}\omega_{36} + \omega_{26}\omega_{35} = 0,$$
$$-\omega_{13}\omega_{56} + \omega_{15}\omega_{36} - \omega_{16}\omega_{35} - \omega_{23}\omega_{45} + \omega_{24}\omega_{35} - \omega_{25}\omega_{34} = 0,$$
$$-\omega_{34}\omega_{56} + \omega_{35}\omega_{46} - \omega_{36}\omega_{45} = 0.$$

При условии невырожденности ω существует 7 решений этой системы. Во всех случаях 3-форма $d\omega$ является невырожденной в смысле Хитчина [9] и каждой 3-форме $d\omega$ соответствует оператор $P_{d\omega}$ (неинтегрируемой) почти паракомплексной структуры. Отметим, что выражения 2-форм ω и соответствующих операторов $P_{d\omega}$ являются весьма громоздкими. Поэтому рассмотрим только те полукэлеровы 2-формы с невырожденным $d\omega$, которые согласованы с паракомплексной структурой P_0, т.е. такие, что $\omega(P_0X, P_0Y) = -\omega(X, Y)$. Тогда получается три полукэлеровых 2-формы:

$$\begin{gathered}\omega_1 = e^1 \wedge \left(\frac{\omega_{16}\omega_{34} - \omega_{25}\omega_{36} + \omega_{26}\omega_{35}}{\omega_{36}} e^4 + \frac{\omega_{16}\omega_{35} - \omega_{24}\omega_{35} + \omega_{25}\omega_{34}}{\omega_{36}} e^5 + \omega_{16}e^6 \right) + \\ + e^2 \wedge (\omega_{24}e^4 + \omega_{25}e^5 + \omega_{26}e^6) + e^3 \wedge \left(\omega_{34}e^4 + \omega_{35}e^5 + \omega_{36}e^6 \right),\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\omega_2 = e^1 \wedge \left(\omega_{14}e^4 + \omega_{15}e^5 + \frac{\omega_{24}\omega_{35} - \omega_{25}\omega_{34}}{\omega_{35}} e^6 \right) + e^2 \wedge (\omega_{24}e^4 + \omega_{25}e^5 - \\ - \frac{(\omega_{24}\omega_{35} - \omega_{25}\omega_{34})\omega_{34}}{\omega_{35}^2} e^6) + + e^3 \wedge \left(\omega_{34}e^4 + \omega_{35}e^5 \right),\end{gathered} \tag{9}$$

$$\omega_3 = e^1 \wedge \left(\omega_{14}e^4 + \omega_{15}e^5 \right) + e^2 \wedge \left(\omega_{24}e^4 + \omega_{26}e^6 \right) + e^3 \wedge \omega_{34}e^4. \tag{10}$$

В каждом случае мы получаем полупаракэлерову структуру (ω, P_0, g_ω) с ассоциированной метрикой $g_\omega(X, Y) = \omega(X, P_0Y)$. В системе Maple легко вычисляются геометрические характеристики метрики g_ω. В частности, для последней формы ω_3 метрический тензор и скалярная кривизна имеют вид:

$$g_\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\omega_{14} & -\omega_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_{24} & 0 & -\omega_{26} \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_{34} & 0 & 0 \\ -\omega_{14} & -\omega_{24} & -\omega_{34} & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \frac{\omega_{34}}{\omega_{15}\omega_{26}}.$$

Как уже отмечалось, каждая из указанных выше 2-форм имеет невырожденный в смысле Хитчина внешний дифференциал $d\omega$ и, следовательно, оператор $P_{d\omega}$ почти паракомплексной структуры. Приведем выражение оператора $P_{d\omega}$, соответствующего 3-форме $d\omega_3$:

$$P_{d\omega}(e_1) = e_1 - \frac{2\omega_{14}}{\omega_{34}} e_3, \quad P_{d\omega}(e_2) = e_2 - \frac{2\omega_{24}}{\omega_{34}} e_3, \quad P_{d\omega}(e_3) = -e_3,$$

$$P_{d\omega}(e_4) = \frac{2\omega_{14}\omega_{24} + 18\omega_{15}\omega_{26}}{\omega_{34}^2} e_3 + e_4, \; P_{d\omega}(e_5) = \frac{2\omega_{14}}{\omega_{34}} e_1 + \frac{6\omega_{15}}{\omega_{34}} e_2 - \frac{2\omega_{14}^2 + 6\omega_{15}\omega_{24}}{\omega_{34}^2} e_3 - e_5,$$

$$P_{d\omega}(e_6) = \frac{6\omega_{26}}{\omega_{34}} e_1 - \frac{2\omega_{24}}{\omega_{34}} e_2 + \frac{2\omega_{24}^2 - 6\omega_{14}\omega_{26}}{\omega_{34}^2} e_3 - e_6.$$

Полученные результаты сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2. *Группа* G_2 *с алгеброй Ли* $A_{3.3} \ltimes sl(2,\mathbf{R})$ *не допускает левоинвариантных симплектических структур. Группа* G_2 *имеет естественные левоинвариантные полупаракэлеровы структуры* $(\Omega_{0i}, P_0, g_{0i})$, $i = 1, 2$*, отрицательной скалярной кривизны, где полукэлеровы 2-формы* Ω_{0i} *представлены формулами* (7), $P_0 = \mathrm{diag}\{1, 1, 1, -1, -1, -1\}$ *и* $g_{0i}(X, Y) = \Omega_{0i}(X, P_0Y)$*. Группа* G_2 *допускает также многопараметрические семейства* (8)–(10) *левоинвариантных полукэлеровых 2-форм* ω*, согласованных с оператором паракомплексной структуры* P_0*, и,* *следовательно, она допускает многопараметрические семейства полупаракэлеровых структур* (ω, P_0, g_ω) *с ассоциированными метриками* $g_\omega(X, Y) = \omega(X, P_0Y)$.

3.3. Левоинвариантные полупаракэлеровы структуры на группе G_3. Группа G_3 имеет алгебру Ли $\mathrm{A}_{3.1} \ltimes \mathrm{sl}(2,\mathbf{R})$. На данной алгебре Ли нет левоинвариантных симплектических структур, из условия замкнутости $d\omega = 0$ следует вырожденность 2-формы ω. Это показывается так же просто, как и в предыдущем разделе.

Полупаракэлерова структура, соответствующая полупрямому произведению. На данной алгебре Ли имеется паракомплексная структура P_0, соответствующая полупрямому произведению подалгебр $A_{3.1}$ и $sl(2,\mathbf{R})$. Она имеет диагональную матрицу $P_0 = \mathrm{diag}\{1, 1, 1, -1, -1, -1\}$.

Кроме того, алгебре Ли $A_{3.1} \ltimes sl(2,\mathbf{R})$ имеется естественная 2-форма $\Omega = ae^1 \wedge e^4 + be^2 \wedge e^5 + ce^3 \wedge e^6$, соответствующая полупрямому произведению. Легко видеть, что она согласована с оператором P_0 и является полукэлеровой при условии $a = -b$. Выберем две наиболее простые полукэлеровы формы

$$\Omega_{01} = -e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^6 \quad \text{и} \quad \Omega_{02} = e^1 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^6,$$

соответствующие разложению алгебры в полупрямое произведение. Легко видеть, что обе они являются полукэлеровыми и согласованы с оператором P_0. Поэтому на алгебре Ли $A_{3.1} \ltimes sl(2,\mathbf{R})$ определены две полупаракэлеровых структуры $(\Omega_{0i}, P_0, g_{0i})$, $i = 1, 2$, псевдоримановы метрики которых $g_{0i}(X, Y) = \Omega_{0i}(X, P_0Y)$ имеют нулевую скалярную кривизну и тензор Риччи вида:

$$Ric_i = -16e^4 \cdot e^4 - 16e^5 \cdot e^6.$$

Обе формы Ω_{0i} имеют вырожденные в смысле Хитчина внешние дифференциалы.

Общие полупаракэлеровы структуры. На алгебре Ли не существует замкнутых невырожденных 2-форм. Пусть $\omega = \omega_{ij}e^i \wedge e^j$ – произвольная 2-форма. Условие полукэлеровости $\omega \wedge d\omega = 0$ выполняется при следующих значениях параметров:

$$2\omega_{12}\omega_{35} - 2\omega_{13}\omega_{25} + 2\omega_{15}\omega_{23} = 0,\ \omega_{12}\omega_{34} - \omega_{13}\omega_{24} + \omega_{14}\omega_{23} = 0,$$
$$-2\omega_{12}\omega_{56} - 2\omega_{13}\omega_{45} + 2\omega_{14}\omega_{35} + 2\omega_{15}\omega_{26} - 2\omega_{15}\omega_{34} - 2\omega_{16}\omega_{25} = 0,$$
$$2\omega_{13}\omega_{46} - 2\omega_{14}\omega_{36} + 2\omega_{16}\omega_{34} + 2\omega_{23}\omega_{56} - 2\omega_{25}\omega_{36} + 2\omega_{26}\omega_{35} = 0,$$
$$\omega_{12}\omega_{46} - \omega_{14}\omega_{26} + \omega_{16}\omega_{24} - \omega_{23}\omega_{45} + \omega_{24}\omega_{35} - \omega_{25}\omega_{34} = 0,$$
$$-2\omega_{12}\omega_{36} + 2\omega_{13}\omega_{26} - 2\omega_{16}\omega_{23} = 0.$$

Существует 2 решения этой системы при условии невырожденности ω:

$$\omega_1 = e^1 \wedge (-\omega_{25}e^4 + \omega_{15}e^5 - \omega_{35}e^6) + e^2 \wedge (\omega_{24}e^4 + \omega_{25}e^5 + \omega_{26}e^6) +$$
$$+ e^3 \wedge (\omega_{26}e^4 + \omega_{35}e^5 - \omega_{36}e^6) + e^4 \wedge (\omega_{45}e^5 + \omega_{46}e^6) + e^5 \wedge \omega_{56}e^6,$$
$$\omega_2 = e^1 \wedge (\omega_{14}e^4 + \omega_{15}e^5 - \omega_{35}e^6) + e^2 \wedge (\omega_{24}e^4 - \omega_{14}e^5 + \omega_{34}e^6) +$$
$$+ e^3 \wedge (\omega_{34}e^4 + \omega_{35}e^5) + e^4 \wedge (\omega_{45}e^5 + \omega_{46}e^6) + e^5 \wedge \omega_{56}e^6.$$

Обе этих формы имеют вырожденный внешний дифференциал.

На алгебре Ли $A_{3.1} \ltimes sl(2,\mathbf{R})$ имеется интегрируемая паракомплексная структура $P_0 = \mathrm{diag}\{1, 1, 1, -1, -1, -1\}$, соответствующая разложению алгебры Ли в полупрямое произведение. Потребуем выполнения свойства согласованности $\omega(P_0X, P_0Y) = -\omega(X, Y)$. Тогда указанные выше полукэлеровы 2-формы принимают вид:

$$\omega_1 = e^1 \wedge (-\omega_{25}e^4 + \omega_{15}e^5 - \omega_{35}e^6) + e^2 \wedge (\omega_{24}e^4 + \omega_{25}e^5 + \omega_{26}e^6) + e^3 \wedge (\omega_{26}e^4 + \omega_{35}e^5 - \omega_{36}e^6), \tag{11}$$

$$\omega_2 = e^1 \wedge (\omega_{14}e^4 + \omega_{15}e^5 - \omega_{35}e^6) + e^2 \wedge (\omega_{24}e^4 - \omega_{14}e^5 + \omega_{34}e^6) + e^3 \wedge (\omega_{34}e^4 + \omega_{35}e^5). \tag{12}$$

Определим ассоциированную метрику по формуле $g_{\omega_i}\left(X,Y\right)=\omega_i\left(X,P_0Y\right),\ i=1,2.$ Вычисления показывают, что каждая полупаракэлерова структура $\left(\omega_i,P_0,g_{\omega_i}\right)$ имеет нулевую скалярную кривизну.

Полученные результаты сформулируем в виде теоремы.

Теорема 3. *Группа* G_3 *с алгеброй Ли* $A_{3.1}\ltimes sl(2,\mathbf{R})$ *не допускает левоинвариантных симплектических структур. Группа* G_3 *имеет естественные левоинвариантные полупаракэлеровы структуры* $(\Omega_{0i}, P_0, g_{0i})$, $i = 1, 2$, *нулевой скалярной кривизны, где полукэлеровы 2-формы* Ω_{0i} *представлены формулами* (7), $P_0 = \mathrm{diag}\{1, 1, 1, -1, -1, -1\}$ *и* $g_{0i}(X, Y) = \Omega_{0i}(X, P_0Y)$. *Группа* G_3 *допускает также многопараметрические семейства* (11)–(12) *левоинвариантных полукэлеровых 2-форм* ω, *согласованных с оператором паракомплексной структуры* P_0, *и, следовательно, она допускает многопараметрические семейства левоинвариантных полупаракэлеровых структур* (ω, P_0, g_ω) *с ассоциированными метриками* $g_\omega(X, Y) = \omega(X, P_0Y)$ *нулевой скалярной кривизны.*

3.4. Левоинвариантные полукэлеровы и полупаракэлеровы структуры на группе G_4. Группе G_4 имеет алгебру Ли $A_{3.1}\ltimes so(3)$. На данной алгебре Ли имеется паракомплексная структура P_0, соответствующая полупрямому произведению подалгебр $A_{3.1}$ и $so(3)$. Она имеет диагональную матрицу $P_0 = \mathrm{diag}\{1, 1, 1, -1, -1, -1\}$. Кроме того, на алгебре Ли $A_{3.1}\ltimes so(3,\mathbf{R})$ имеется естественная 2-форма $\Omega = ae^1\wedge e^4 + be^2\wedge e^5 + ce^3\wedge e^6$, соответствующая полупрямому произведению. Легко видеть, что она согласована с оператором P_0 и является полукэлеровой при любых ненулевых значениях параметров a, b, c.

Поэтому на алгебре Ли $A_{3.1}\ltimes so(3)$ определена полупаракэлерова структура (Ω, P_0, g), псевдориманова метрика которой $g(X, Y) = \Omega(X, P_0Y)$ имеет тензор Риччи вида $Ric=\frac{a^2-(b-c)^2}{bc}e^4\cdot e^4-\frac{b^2+(a-c)^2}{ab}e^5\cdot e^5+\frac{c^2-(a-b)^2}{ac}e^6\cdot e^6$, и нулевую скалярную кривизну.

Общие полупаракэлеровы структуры. Пусть $\omega = \omega_{ij}e^i\wedge e^j$ – произвольная 2-форма. Вычисления показывают, что 3-форма $d\omega$ является вырожденной. Условие полукэлеровости $\omega\wedge d\omega = 0$ выполняется при следующих значениях параметров:

$$-\omega_{13}\omega_{56}+\omega_{15}\omega_{36}-\omega_{16}\omega_{35}+\omega_{23}\omega_{46}-\omega_{24}\omega_{36}+\omega_{26}\omega_{34}=0,$$
$$\omega_{12}\omega_{36}-\omega_{13}\omega_{26}+\omega_{16}\omega_{23}=0,\ \omega_{12}\omega_{34}-\omega_{13}\omega_{24}+\omega_{14}\omega_{23}=0,$$
$$\omega_{12}\omega_{56}-\omega_{15}\omega_{26}+\omega_{16}\omega_{25}-\omega_{23}\omega_{45}+\omega_{24}\omega_{35}-\omega_{25}\omega_{34}=0,$$
$$-\omega_{12}\omega_{46}+\omega_{13}\omega_{45}+\omega_{14}\omega_{26}-\omega_{14}\omega_{35}+\omega_{15}\omega_{34}-\omega_{16}\omega_{24}=0,$$
$$-\omega_{12}\omega_{35}+\omega_{13}\omega_{25}-\omega_{15}\omega_{23}=0.$$

Существует 2 решения этой системы с невырожденными формами ω:

$$\omega_1=e^1\wedge(\omega_{14}e^4+\omega_{24}e^5+\omega_{34}e^6)+e^2\wedge(\omega_{24}e^4+\omega_{25}e^5+\omega_{26}e^6)+$$
$$+e^3\wedge(\omega_{34}e^4+\omega_{26}e^5+\omega_{36}e^6)+e^4\wedge(\omega_{45}e^5+\omega_{46}e^6)+e^5\wedge\omega_{56}e^6,$$
$$\omega_2=e^1\wedge(\omega_{14}e^4+\omega_{15}e^5+\omega_{34}e^6)+e^2\wedge(\omega_{15}e^4+\omega_{25}e^5+\omega_{35}e^6)+$$
$$+e^3\wedge(\omega_{34}e^4+\omega_{35}e^5)+e^4\wedge(\omega_{45}e^5+\omega_{46}e^6)+e^5\wedge\omega_{56}e^6.$$

На алгебре Ли $A_{3.1}\ltimes so(3,\mathbf{R})$ имеется интегрируемая паракомплексная структура $P_0 = \mathrm{diag}\{1, 1, 1, -1, -1, -1\}$, соответствующая разложению алгебры Ли в полупрямое произведение. Потребуем выполнения свойства согласованности $\omega(P_0X, P_0Y) = -\omega(X, Y)$. Тогда полукэлеровы 2-формы принимают вид:

$$\omega_1=e^1\wedge(\omega_{14}e^4+\omega_{24}e^5+\omega_{34}e^6)+e^2\wedge(\omega_{24}e^4+\omega_{25}e^5+\omega_{26}e^6)+$$
$$e^3\wedge(\omega_{34}e^4+\omega_{26}e^5+\omega_{36}e^6), \tag{13}$$

$$\omega_2 = e^1 \wedge (\omega_{14}e^4 + \omega_{15}e^5 + \omega_{34}e^6) + e^2 \wedge (\omega_{15}e^4 + \omega_{25}e^5 + \omega_{35}e^6) + e^3 \wedge (\omega_{34}e^4 + \omega_{35}e^5). \quad (14)$$

Определим ассоциированную метрику $g_{\omega_i}(X,Y) = \omega_i(X, P_0 Y),\ i = 1,2.$ Вычисления показывают, что каждая полупаракэлерова структура $(\omega_i, P_0 g_{\omega_i})$ имеет нулевую скалярную кривизну.

Полукэлеровы структуры. Данная алгебра Ли допускает интегрируемые комплексные структуры $J = (\psi_{ij})$, согласованные с паракэлеровой 2-формой

$$\Omega_{01} = -e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^6. \quad (15)$$

При выполнении условия согласованности, $\psi_{51} = -\psi_{42}$, $\psi_{61} = -\psi_{43}$, $\psi_{11} = -\psi_{44}$, $\psi_{21} = \psi_{45}$, $\psi_{31} = \psi_{46}$, $\psi_{62} = \psi_{53}$, $\psi_{12} = \psi_{54}$, $\psi_{22} = -\psi_{55}$, $\psi_{32} = -\psi_{56}$, $\psi_{13} = \psi_{64}$, $\psi_{23} = -\psi_{65}$, $\psi_{33} = -\psi_{66}$, $\psi_{24} = -\psi_{15}$, $\psi_{34} = -\psi_{16}$, $\psi_{35} = \psi_{26}$, решение двух других условий системы (3) дает 4 варианта, с точностью до знака ($\pm J$), значений параметров ψ_{ij} матрицы J:

1. $\psi_{15} = 0,\ \psi_{16} = \dfrac{\psi_{45}^2 + \psi_{46}^2}{\psi_{41}\psi_{45}},\ \psi_{25} = \dfrac{\psi_{45}^2}{\psi_{41}},\ \psi_{26} = \dfrac{\psi_{45}\psi_{46}}{\psi_{41}},\ \psi_{36} = \dfrac{\psi_{46}^2}{\psi_{41}},\ \psi_{42} = 0,\ \psi_{43} = 0,$
$\psi_{44} = -\dfrac{\psi_{46}}{\psi_{45}},\ \psi_{52} = 0,\ \psi_{53} = 0,\ \psi_{54} = 0,\ \psi_{55} = 0,\ \psi_{56} = -1,\ \psi_{64} = 0,\ \psi_{65} = 1,\ \psi_{66} = 0,$
$$\psi_{14} = -\frac{\psi_{45}^2 + \psi_{46}^2}{\psi_{41}\psi_{45}};$$

2. $\psi_{15} = \dfrac{(\psi_{45}\psi_{44} + \psi_{46})\psi_{14}}{\psi_{44}^2 + 1},\ \psi_{16} = \dfrac{\psi_{15}(\psi_{46}\psi_{44} - \psi_{45})}{\psi_{45}\psi_{44} + \psi_{46}},\ \psi_{25} = -\dfrac{\psi_{15}\psi_{45}^2}{\psi_{45}\psi_{44} + \psi_{46}},$
$\psi_{26} = -\dfrac{\psi_{15}\psi_{45}\psi_{46}}{\psi_{45}\psi_{44} + \psi_{46}},\ \psi_{36} = -\dfrac{\psi_{15}\psi_{45}^2}{\psi_{45}\psi_{44} + \psi_{46}},\ \psi_{41} = -\dfrac{\psi_{45}\psi_{44} + \psi_{46}}{\psi_{15}},$
$\psi_{42} = 0,\ \psi_{43} = 0,\ \psi_{52} = 0,\ \psi_{53} = 0,\ \psi_{54} = 0,\ \psi_{55} = 0,\ \psi_{56} = -1,\ \psi_{63} = 0,$
$\psi_{64} = 0,\ \psi_{65} = 1,\ \psi_{66} = 0;$

3. $\psi_{14} = -\dfrac{\psi_{16}^2\psi_{41}^2 + \psi_{46}^2}{\psi_{41}\psi_{46}},\ \psi_{15} = \dfrac{\psi_{46}}{\psi_{41}},\ \psi_{25} = 0,\ \psi_{26} = 0,\ \psi_{36} = \dfrac{\psi_{46}^2}{\psi_{41}},\ \psi_{42} = 0,\ \psi_{43} = 0,$
$\psi_{44} = -\dfrac{\psi_{16}\psi_{41}}{\psi_{46}},\ \psi_{45} = 0,\ \psi_{52} = 0,\ \psi_{53} = 0,\ \psi_{54} = 0,\ \psi_{55} = 0,\ \psi_{56} = 1,\ \psi_{63} = 0,$
$\psi_{64} = 0,\ \psi_{65} = -1,\ \psi_{66} = 0;$

4. $\psi_{14} = -\dfrac{\psi_{44}^2 + 1}{\psi_{41}},\ \psi_{15} = 0,\ \psi_{16} = 0,\ \psi_{25} = 0,\ \psi_{26} = 0,\ \psi_{36} = 0,\ \psi_{42} = 0,$
$\psi_{43} = 0,\ \psi_{45} = 0,\ \psi_{46} = 0,\ \psi_{52} = 0,\ \psi_{53} = 0,\ \psi_{54} = 0,\ \psi_{55} = 0,\ \psi_{56} = -1,\ \psi_{63} = 0,$
$\psi_{64} = 0,\ \psi_{65} = 1,\ \psi_{66} = 0.$

Каждая из указанных комплексных структур J определяет полукэлерову структуру (Ω_{01}, J, g_J), где $g_J(X, Y) = \Omega_{01}(X, JY)$.

Приведем явные выражения четвертой по списку структуры:

$$J_4 = \begin{pmatrix} -\psi_{44} & 0 & 0 & -\dfrac{\psi_{44}^2+1}{\psi_{41}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_{41} & 0 & 0 & \psi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_{J_4} = \begin{pmatrix} -\psi_{41} & 0 & 0 & -\psi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\psi_{44} & 0 & 0 & \dfrac{\psi_{44}^2+1}{\psi_{41}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор Риччи:

$$Ric_4 = \begin{pmatrix} -\psi_{41}^2 & 0 & 0 & -\psi_{41}\psi_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{\psi_{41}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\psi_{41}}{2} & 0 \\ -\psi_{41}\psi_{44} & 0 & 0 & -\psi_{44}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\psi_{41}}{2} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \dfrac{\psi_{41}}{2} & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Скалярная кривизна $S = \psi_{41}$.

Полученные результаты сформулируем в следующем виде.

Теорема 4. *Группа* G_4 *с алгеброй Ли* $A_{3.1} \ltimes so(3)$ *не допускает левоинвариантных симплектических структур. Группа* G_4 *имеет естественные левоинвариантные полупаракэлеровы структуры* (Ω, P_0, g), *нулевой скалярной кривизны, где* $\Omega = ae^1 \wedge e^4 + be^2 \wedge e^5 + ce^3 \wedge e^6$ *и* $P_0 = \mathrm{diag}\{1, 1, 1, -1, -1, -1\}$. *Группа Ли* G_4 *допускает также многопараметрические семейства* (13), (14) *левоинвариантных полукэлеровых 2-форм* ω, *согласованных с оператором паракомплексной структуры* P_0, *и, следовательно, она допускает многопараметрические семейства левоинвариантных полупаракэлеровых структур* (ω, P_0, g_ω) *с ассоциированными метриками* $g_\omega(X, Y) = \omega(X, P_0Y)$ *нулевой скалярной кривизны. Группа* G_4 *допускает многопараметрические семейства левоинвариантных комплексных структур, согласованных с полукэлеровой 2-формой* (15), *и, следовательно, она допускает многопараметрические семейства левоинвариантных полукэлеровых структур* (Ω_{01}, J, g_J) *с интегрируемыми комплексными структурами* J *и ассоциированными псевдоримановыми метриками* $g_J(X, Y) = \Omega_{01}(X, JY)$.

Список источников

1. *Campoamor-Stursberg R.* Symplectic forms on six-dimensional real solvable Lie algebras I // Algebra Colloquium. 2009. V. 16 (2). P. 253–266.
2. *Goze M., Khakimdjanov Y., Medina A.* Symplectic or contact structures on Lie groups // Differential Geometry and its Applications. 2004. V. 21 (1). P. 41–54. doi: 10.1016/j.difgeo.2003.12.006
3. *Chu B.-Y.* Symplectic homogeneous spaces // Trans. of the Amer. Math. Soc. 1974. V. 197. P. 154–159.
4. *Basarab-Horwath P., Lahno V., Zhdanov R.* The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations // Acta Appl. Math. 2001. V. 69. P. 43–94.
5. *Turkowski P.* Low-dimensional real Lie algebras // J. Math. Phys. 1988. V. 29. P. 2139–2144.

6. *Смоленцев Н.К., Соколова А.Ю.* Паракэлеровы и параэрмитовы структуры на шестимерных неразрешимых алгебрах Ли // Известия Алтайского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 4 (132). С. 94–98. doi: 10.14258/izvasu(2023)4-15
7. *Алексеевский Д.В., Медори К., Томассини А.* Однородные паракэлеровы многообразия Эйнштейна // Успехи математических наук. 2009. Т. 64, вып. 1 (385). С. 3–50. doi: 10.1070/RM2009v064n01ABEH004591
8. *Gray A., Harvella L.M.* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear Invariants // Ann. Math. Pura Appl. 1980. V. 123. P. 35–58. doi: 10.1007/BF01796539
9. *Hitchin N.J.* The geometry of three-forms in six dimensions // J. Diff. Geom. 2000. V. 55. P. 547–576. doi: 10.4310/jdg/1090341263

References

1. Campoamor-Stursberg R. (2009) Symplectic forms on six-dimensional real solvable Lie algebras I. *Algebra Colloquium*. 16(2). pp. 253–266.
2. Goze M., Khakimdjanov Y., Medina A. (2004) Symplectic or contact structures on Lie groups. *Differential Geometry and its Applications*. 21(1). pp. 41–54. DOI: 10.1016/j.difgeo.2003.12.006.
3. Chu Bon-Yao (1974) Symplectic homogeneous spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*. 197. pp. 154–159.
4. Basarab-Horwath P., Lahno V., Zhdanov R. (2001) The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations. *Acta Applicandae Mathematicae*. 69. pp. 43–94.
5. Turkowski P. (1988) Low-dimensional real Lie algebras. *Journal of Mathematical Physics*. 29. pp. 2139–2144.
6. Smolentsev N.K., Sokolova A.Yu. (2023) Parakelerovy i paraermitovy struktury na shestimernykh nerazreshimykh algebrakh Li [Para-Kählerian and para-Hermitian structures on six-dimensional unsolvable Lie algebras]. *Izvestiya AltGU. Matematika i mekhanika.* 132(4). pp. 94–98. DOI: 10.14258/izvasu(2023)4-15.
7. Alekseevsky D.V., Medori C., Tomassini A. (2009) Homogeneous para-Kähler Einstein manifolds. *Russian Mathematical Surveys*. 64(1). pp. 1–43. DOI: 10.1070/RM2009v064n01ABEH 004591.
8. Gray A., Harvella L.M. (1980) The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants. *Annali di Matematica Pura ed Applicata.* 123. pp. 35–58. DOI: 10.1007/BF01796539.
9. Hitchin N.J. (2000) The geometry of three-forms in six dimensions. *Journal of Differential Geometry*. 55. pp. 547–576. DOI: 10.4310/jdg/1090341263.

***Сведения об авторах*:**
Смоленцев Николай Константинович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики Кемеровского государственного университета (Кемерово, Россия). E-mail: smolennk@mail.ru
Соколова Анастасия Юрьевна – ассистент кафедры фундаментальной математики Кемеровского государственного университета (Кемерово, Россия). E-mail: socolova.nastya25@mail.ru

***Information about the authors*:**
Smolentsev Nikolay K. (Doctor of Phys.-Math. Sciences, Professor of Department of Fundamental Mathematics, Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation). E-mail: smolennk@mail.ru
Sokolova Anastasia Yu. (Assistant of Department of Fundamental Mathematics, Kemerovo State University, Kemerovo, Russian Federation). E-mail: socolova.nastya25@mail.ru

The article was submitted 02.07.2024; accepted for publication 06.09.2025

Статья поступила в редакцию 02.07.2024; принята к публикации 06.09.2025