ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2025 Математика и механика № 97
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

Научная статья
УДК 517.2, 519.64 MSC: 65R20; 31B10
doi: 10.17223/19988621/97/3

Некоторые свойства одного класса векторных потенциалов с сингулярными ядрами

Эльнур Гасан оглы Халилов[1], Вафа Осман кызы Сафарова[2]

[1, 2] Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности, Баку, Азербайджан
[1] elnurkhalil@mail.ru
[2] vefa-seferova-91@bk.ru

Аннотация. Построенный А.М. Ляпуновым контрпример показывает, что для потенциалов простого и двойного слоев с непрерывной плотностью производная, вообще говоря, не существует. Следовательно, операторы

$$(A\lambda)(x) = -2\int_{\Omega}\left[n(x),\left[n(x), rot_x\left\{\Phi_k(x,y)\lambda(y)n(y)\right\}\right]\right]d\Omega_y, \quad x\in\Omega,$$

и

$$(B\mu)(x) = 2\int_{\Omega}\left[n(x), grad_x\left\{\Phi_k(x,y)\mu(y)\right\}\right]d\Omega_y, \quad x\in\Omega,$$

не определены в пространстве непрерывных функций, где $\Omega\subset R^3$ – поверхность Ляпунова, $n(x)$ – внешняя единичная нормаль в точке $x\in\Omega$, а $\Phi_k(x,y)$ – фундаментальное решение уравнения Гельмгольца. В работе доказано, что если функции $\lambda(x)$ и $\mu(x)$ удовлетворяет условию Дини, то интегралы $(A\lambda)(x)$ и $(B\mu)(x)$ существуют в смысле главного значения Коши. Кроме того, показана справедливость оценки типа А. Зигмунда для интегралов $(A\lambda)(x)$ и $(B\mu)(x)$ и доказана ограниченность операторов A и B в обобщенных пространствах Гельдера.

Ключевые слова: электрическая граничная задача, магнитная граничная задача, векторные потенциалы, уравнение Гельмгольца, обобщенное пространство Гельдера

Для цитирования: Халилов Э.Г., Сафарова В.О. Некоторые свойства одного класса векторных потенциалов с сингулярными ядрами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 97. С. 31–50. doi: 10.17223/19988621/97/3

Original article

Some properties of a class of vector potentials with a singular kernel

Elnur H. Khalilov[1], Vafa O. Safarova[2]

[1, 2] *Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan*
[1] *elnurkhalil@mail.ru*
[2] *vefa-seferova-91@bk.ru*

Abstract. The counterexample constructed by A.M. Lyapunov shows that for potentials of a simple and double layer with continuous density, the derivative, generally speaking, does not exist. Therefore, the operators

$$(A\lambda)(x) = -2\int_{\Omega}\left[n(x),\left[n(x), rot_x\left\{\Phi_k(x,y)\lambda(y)n(y)\right\}\right]\right]d\Omega_y, \quad x\in\Omega,$$

and

$$(B\mu)(x) = 2\int_{\Omega}\left[n(x), grad_x\left\{\Phi_k(x,y)\mu(y)\right\}\right]d\Omega_y, \quad x\in\Omega,$$

are not defined in the space of continuous functions, where $\Omega\subset R^3$ is the Lyapunov surface, $n(x)$ is the external unit normal at point $x\in\Omega$, , and $\Phi_k(x,y)$ is the fundamental solution of the Helmholtz equation. The paper proves that if functions $\lambda(x)$ and $\mu(x)$ satisfy the Dini condition, then integrals $(A\lambda)(x)$ and $(B\mu)(x)$ exist in the sense of the Cauchy principal value. In addition, the validity of the A. Zygmund type estimate for the integrals $(A\lambda)(x)$ and $(B\mu)(x)$ is shown, and the boundedness of operators *A* and *B* in generalized Hölder spaces is proved.
Keywords: electrical boundary value problem, magnetic boundary value problem, vector potentials, Helmholtz equation, generalized Hölder space

For citation: Khalilov, E.H., Safarova, V.O. (2025) Some properties of a class of vector potentials with a singular kernel. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 97. pp. 31–50. doi: 10.17223/19988621/97/3

Введение

Известно (см.: [1. С. 153–154]), что внутренняя и внешняя электрические граничные задачи, а также внутренняя и внешняя магнитные граничные задачи приводятся к системе интегральных уравнений, зависящих от векторных потенциалов

$$(A\lambda)(x) = -2\int_{\Omega}\left[n(x),\left[n(x), rot_x\left\{\Phi_k(x,y)\lambda(y)n(y)\right\}\right]\right]d\Omega_y, \quad (1)$$

$$x=(x_1,x_2,x_3)\in\Omega,$$

и

$$(B\mu)(x) = 2\int_{\Omega}\left[n(x), grad_x\left\{\Phi_k(x,y)\mu(y)\right\}\right]d\Omega_y, \quad (2)$$

$$x=(x_1,x_2,x_3)\in\Omega,$$

где $\Omega \subset R^3$ – поверхность Ляпунова с показателем $0 < \alpha \le 1$, $n(x) = (n_1(x), n_2(x), n_3(x))$ – внешняя единичная нормаль в точке $x \in \Omega$,

$$\Phi_k(x, y) = \frac{\exp(ik|x-y|)}{4\pi|x-y|}, \ x, y \in R^3, \ x \ne y,$$

фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, k – волновое число, причем $\operatorname{Im} k \ge 0$, запись [$a$, b] означает векторное произведение векторов a и b, а $\lambda(x)$ и $\mu(x)$ – непрерывные функции на поверхности Ω.

Построенный А.М. Ляпуновым контрпример (см.: [2. С. 89–90]) показывает, что для потенциалов простого и двойного слоев с непрерывной плотностью производная, вообще говоря, не существует. Следовательно, операторы A и B не определены в пространстве $C(\Omega)$ всех непрерывных функций на поверхности Ω с нормой $\|f\|_\infty = \max_{x\in\Omega}|f(x)|$. Однако в работе [3] изучены некоторые свойства производной логарифмического потенциала двойного слоя, в работе [4] – некоторые свойства производной акустического потенциала простого слоя, в работе [5] – некоторые свойства нормальной производной акустического потенциала двойного слоя, а в работе [6] исследованы некоторые свойства одного класса векторных потенциалов со слабой особенностью. Следует указать, что в работе [1. С. 154] показано, что если Ω – замкнутая и дважды непрерывно дифференцируемая поверхность в R^3, то операторы A и B ограниченно действуют в пространстве Гельдера. В предлагаемой же работе доказывается справедливость оценки типа А. Зигмунда для интегралов (1) и (2) и изучаются некоторые свойства операторов A и B в обобщенных пространствах Гельдера.

Основные результаты

Введем модуль непрерывности функции $f \in C(\Omega)$:

$$\omega(f, \delta) = \delta \sup_{\tau \ge \delta} \frac{\bar{\omega}(f, \tau)}{\tau}, \ \delta > 0,$$

где

$$\bar{\omega}(f, \tau) = \max_{\substack{|x-y| \le \tau, \\ x, y \in \Omega}} |f(x) - f(y)|.$$

Известно, что функция $\omega(f, \delta)$ обладает следующими свойствами: $\omega(f, \delta)$ неотрицательна, полуаддитивна, не убывает, функция $\omega(f, \delta)/\delta$ не возрастает, $\lim_{\delta \to 0} \omega(f, \delta) = 0$ и $\omega(f, C\delta) \le (1 + C)\omega(f, \delta)$, где $C = const > 0$.

Теорема 1. *Пусть Ω –поверхность Ляпунова с показателем* $0 < \alpha \le 1$ *и*

$$\int_0^{diam\,\Omega} \frac{\omega(\lambda, t)}{t} dt < +\infty.$$

Тогда интеграл (1) *существует в смысле главного значения Коши, причем*

$$\sup_{x\in\Omega}\left|\left(A\lambda\right)(x)\right| \le M^1\left(\|\lambda\|_\infty + \int_0^{diam\,\Omega}\frac{\omega(\lambda,t)}{t}dt\right).$$

Доказательство. Так как

$$rot_x\left\{\Phi_k(x,y)\lambda(y)n(y)\right\} = \lambda(y)\left(\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_2}n_3(y) - \frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_3}n_2(y)\right)e_1 +$$
$$+\lambda(y)\left(\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_3}n_1(y) - \frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_1}n_3(y)\right)e_2 +$$
$$+\lambda(y)\left(\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_1}n_2(y) - \frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_2}n_1(y)\right)e_3,$$

нетрудно вычислить, что

$$\left[n(x),\left[n(x),rot_x\left\{\Phi_k(x,y)\lambda(y)n(y)\right\}\right]\right] = V_1(x,y)e_1 + V_2(x,y)e_2 + V_3(x,y)e_3,$$

где $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$,

$$V_1(x,y) = n_1(x)n_2(x)\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_3}n_1(y)\lambda(y) - n_1(x)n_2(x)\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_1}n_3(y)\lambda(y) -$$
$$-\left(n_2(x)\right)^2\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_2}n_3(y)\lambda(y) + \left(n_2(x)\right)^2\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_3}n_2(y)\lambda(y) -$$
$$-\left(n_3(x)\right)^2\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_2}n_3(y)\lambda(y) + \left(n_3(x)\right)^2\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_3}n_2(y)\lambda(y) +$$
$$+n_1(x)n_3(x)\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_1}n_2(y)\lambda(y) - n_1(x)n_3(x)\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_2}n_1(y)\lambda(y),$$

$$V_2(x,y) = n_2(x)n_3(x)\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_1}n_2(y)\lambda(y) - n_2(x)n_3(x)\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_2}n_1(y)\lambda(y) -$$
$$-\left(n_3(x)\right)^2\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_3}n_1(y)\lambda(y) + \left(n_3(x)\right)^2\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_1}n_3(y)\lambda(y) -$$
$$-\left(n_1(x)\right)^2\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_3}n_1(y)\lambda(y) + \left(n_1(x)\right)^2\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_1}n_3(y)\lambda(y) +$$
$$+n_1(x)n_2(x)\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_2}n_3(y)\lambda(y) - n_1(x)n_2(x)\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_3}n_2(y)\lambda(y)$$

и

$$V_3(x,y) = n_1(x)n_3(x)\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_2}n_3(y)\lambda(y) - n_1(x)n_3(x)\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_3}n_2(y)\lambda(y) -$$
$$-\left(n_1(x)\right)^2\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_1}n_2(y)\lambda(y) + \left(n_1(x)\right)^2\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_2}n_1(y)\lambda(y) -$$

[1] Здесь и далее через M будем обозначать положительные постоянные, разные в различных неравенствах.

$$-\left(n_2(x)\right)^2\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_1}n_2(y)\lambda(y)+\left(n_2(x)\right)^2\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_2}n_1(y)\lambda(y)+$$
$$+n_2(x)n_3(x)\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_3}n_1(y)\lambda(y)-n_2(x)n_3(x)\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_1}n_3(y)\lambda(y).$$

Как видно, все слагаемые в последнем равенстве имеют одинаковую кратность особенности. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что при условии теоремы, например, интеграл

$$W_0(x)=\int_{\Omega}\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_2}n_1(y)\lambda(y)\,d\Omega_y$$

существует в смысле главного значения Коши, причем

$$\sup_{x\in\Omega}\left|W_0(x)\right|\le M\left(\|\lambda\|_\infty+\int_0^{diam\,\Omega}\frac{\omega(\lambda,t)}{t}dt\right).$$

Обозначим через $d>0$ радиус стандартной сферы для Ω (см.: [7. С. 400]), и пусть $\Omega_\varepsilon(x)=\left\{y\in\Omega:|x-y|<\varepsilon\right\}$, где $x\in\Omega$ и $\varepsilon>0$. Известно, что для каждого $x\in\Omega$ множество $\Omega_d(x)$ однозначно проектируется на множество $\Pi_d(x)$, лежащее в касательной плоскости $\Gamma(x)$ к Ω в точке x. На куске $\Omega_d(x)$ выберем локальную прямоугольную систему координат (u,v,w) с началом в точке x, где ось w направим вдоль нормали $n(x)$, а оси u и v лежат в касательной плоскости $\Gamma(x)$. Тогда в этих координатах окрестность $\Omega_d(x)$ можно задать уравнением $w=\psi(u,v)$, $(u,v)\in\Pi_d(x)$, причем

$$\psi\in H_{1,\alpha}\left(\Pi_d(x)\right)\ \text{ и }\ \psi(0,0)=0,\ \frac{\partial\psi(0,0)}{\partial u}=0,\ \frac{\partial\psi(0,0)}{\partial v}=0. \qquad (3)$$

Здесь через $H_{1,\alpha}\left(\Pi_d(x)\right)$ обозначено линейное пространство всех непрерывно дифференцируемых на $\Pi_d(x)$ функций ψ, $grad\,\psi$ которых удовлетворяет условию Гельдера с показателем $0<\alpha\le1$, т.е.

$$\left|grad\,\psi(u_1,v_1)-grad\,\psi(u_2,v_2)\right|\le M_\psi\left(\sqrt{(u_1-u_2)^2+(v_1-v_2)^2}\right)^\alpha,$$
$$\forall(u_1,v_1),(u_2,v_2)\in\Pi_d(x),$$

где M_ψ – положительная постоянная, зависящая от ψ, а не от (u_1,v_1) и (u_2,v_2).

Пусть $\Gamma_d(x)$ – часть касательной плоскости $\Gamma(x)$ в точке $x\in\Omega$, заключенная внутри сферы радиуса d с центром в точке x. Кроме того, пусть $\tilde{y}\in\Gamma(x)$ есть проекция точки $y\in\Omega$. Тогда

$$|x-\tilde{y}|\le|x-y|\le C_1|x-\tilde{y}|,\quad mes\Omega_d(x)\le C_2\,mes\Gamma_d(x),$$

где C_1 и C_2 – положительные постоянные, зависящие лишь от Ω (если Ω – сфера, то $C_1=\sqrt{2}$ и $C_2=2$).

Нетрудно вычислить, что

$$W_0(x) = W_{0,1}(x) + W_{0,2}(x) + W_{0,3}(x) + W_{0,4}(x), \tag{4}$$

где

$$W_{0,1}(x) = \int_{\Omega} \frac{\left(ik|x-y|\exp\left(ik|x-y|\right) - \left(\exp\left(ik|x-y|\right)-1\right)\right)(x_2 - y_2)}{4\pi|x-y|^3} n_1(y)\lambda(y)\,d\Omega_y,$$

$$W_{0,2}(x) = \int_{\Omega\setminus\Omega_d(x)} \frac{y_2 - x_2}{4\pi|x-y|^3} n_1(y)\lambda(y)\,d\Omega_y,$$

$$W_{0,3}(x) = \int_{\Omega_d(x)} \frac{y_2 - x_2}{4\pi|x-y|^3}\left(n_1(y)\lambda(y) - n_1(x)\lambda(x)\right)d\Omega_y$$

и

$$W_{0,4}(x) = n_1(x)\lambda(x)\int_{\Omega_d(x)} \frac{y_2 - x_2}{4\pi|x-y|^3}\,d\Omega_y .$$

Так как

$$\left|\frac{\left(ik|x-y|\exp\left(ik|x-y|\right) - \left(\exp\left(ik|x-y|\right)-1\right)\right)(x_2 - y_2)}{4\pi|x-y|^3}\right| \le \frac{M}{|x-y|}, \tag{5}$$

то интеграл $W_{0,1}(x)$ сходится как несобственный и

$$\left|W_{0,1}(x)\right| \le M\,\|\lambda\|_\infty, \quad \forall x \in \Omega .$$

А интеграл $W_{0,2}(x)$ существует как собственный, и поэтому

$$\left|W_{0,2}(x)\right| \le M\,\|\lambda\|_\infty, \quad \forall x \in \Omega .$$

Кроме того, учитывая неравенство

$$\left|n(x) - n(y)\right| \le M\,|x-y|^\alpha, \quad \forall x, y \in \Omega, \tag{6}$$

и переходя к двойному интегралу (см.: [8. С. 276]), имеем

$$\left|W_{0,3}(x)\right| = \left|\int_{\Omega_d(x)} \frac{y_2 - x_2}{4\pi|x-y|^3}\left(\left(n_1(y) - n_1(x)\right)\lambda(y) + \left(\lambda(y) - \lambda(x)\right)n_1(x)\right)d\Omega_y\right| \le$$

$$\le M\left(\|\lambda\|_\infty + \int_0^{diam\Omega} \frac{\omega(\lambda,t)}{t}\,dt\right) < +\infty,$$

$$\forall x \in \Omega .$$

Осталось доказать, что интеграл $W_{0,4}(x)$ существует в смысле главного значения Коши. Пусть $d_0 = d/(2C_1)$. Очевидно, что $O_{d_0}(x) = \left\{(u,v,0) \mid \sqrt{u^2+v^2} < d_0\right\} \subset \Pi_d(x)$. Тогда по формуле сведения поверхностного интеграла к повторному, получаем

$$\int_{\Omega_d(x)} \frac{y_2 - x_2}{|x-y|^3}\,d\Omega_y = \int_{\Pi_d(x)\setminus O_{d_0}(x)} \frac{v}{\left(\sqrt{u^2+v^2+\psi^2(u,v)}\right)^3}\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}\right)^2}\,du\,dv +$$

$$+\int\limits_{O_{d_0}(x)} \frac{v}{\left(\sqrt{u^2+v^2+\psi^2(u,v)}\right)^3}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}\right)^2}-1\right)du\,dv+$$

$$+\int\limits_{O_{d_0}(x)} \frac{v}{\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^3}du\,dv+\int\limits_{O_{d_0}(x)} v\left(\frac{1}{\left(\sqrt{u^2+v^2+\psi^2(u,v)}\right)^3}-\frac{1}{\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^3}\right)du\,dv\,.$$

Как видно, первый слагаемый интеграл в последнем равенстве существует как собственный. Кроме того, учитывая неравенства (см.: [7. С. 402])

$$\left|\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}\right|\le\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^{\alpha},\quad \left|\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}\right|\le\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^{\alpha}, \tag{7}$$

находим

$$\left|\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}\right)^2}-1\right|\le\left(u^2+v^2\right)^{\alpha}. \tag{8}$$

Тогда получаем следующую оценку для второго слагаемого интеграла:

$$\left|\int\limits_{O_{d_0}(x)} \frac{v}{\left(\sqrt{u^2+v^2+\psi^2(u,v)}\right)^3}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}\right)^2}-1\right)du\,dv\right|\le$$

$$\le M\int\limits_{O_{d_0}(x)} \frac{1}{\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^{2-2\alpha}}du\,dv\le M.$$

Перейдя к полярной системе координат

$$\begin{cases} u=r\cos\varphi, \\ v=r\sin\varphi, \end{cases}\qquad 0\le\varphi\le 2\pi\,, \tag{9}$$

получаем, что третий слагаемый интеграл равен нулю:

$$\int\limits_{O_{d_0}(x)} \frac{v}{\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^3}du\,dv=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{O_{d_0}(x)\setminus O_\varepsilon(x)} \frac{v}{\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^3}du\,dv=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon}^{d_0}\frac{1}{r}\int\limits_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi\,dr=0\,. \tag{10}$$

Так как существует такая точка $(\theta_1 u,\,\theta_2 v)$, что

$$\psi(u,v)-\psi(0,0)=\frac{\partial\psi(\theta_1 u\,,\theta_2 v)}{\partial u}u+\frac{\partial\psi(\theta_1 u\,,\theta_2 v)}{\partial v}v\,,$$

где $0<\theta_1<1$ и $0<\theta_2<1$, то, учитывая (3) и (7), находим, что

$$|\,\psi(u,v)\,|=|\,\psi(u,v)-\psi(0,0)\,|\le M\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^{1+\alpha}.$$

Поэтому

$$\left|\frac{1}{\left(\sqrt{u^2+v^2+\psi^2(u,v)}\right)^3}-\frac{1}{\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^3}\right|\le M\frac{1}{\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^{3-2\alpha}}\,,\ \forall(u,v)\in\Pi_d(x')\setminus(0,0)\,. \tag{11}$$

Тогда, перейдя к повторному интегралу, для последнего слагаемого интеграла получаем следующую оценку:

$$\left|\int_{O_{d_0}(x)} v\left(\frac{1}{\left(\sqrt{u^2+v^2+\psi^2(u,v)}\right)^3}-\frac{1}{\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^3}\right)du\,dv\right|\le M.$$

В результате получаем, что интеграл $W_{0,4}(x)$ существует в смысле главного значения Коши и

$$\left|W_{0,4}(x)\right|\le M\left\|\lambda\right\|_\infty,\ \forall x\in\Omega.$$

В итоге, учитывая полученные оценки для выражений $W_{0,1}(x)$, $W_{0,2}(x)$, $W_{0,3}(x)$ и $W_{0,4}(x)$ в равенстве (4), получаем доказательство теоремы.

Теорема 2. *Пусть* Ω *– поверхность Ляпунова с показателем* $0<\alpha\le 1$ *и*

$$\int_0^{diam\,\Omega}\frac{\omega(\lambda,t)}{t}dt<+\infty.$$

Тогда для любых точек $x',x''\in\Omega$ *справедлива оценка*

$$\left|(A\lambda)(x')-(A\lambda)(x'')\right|\le M_\lambda\left(h^\alpha\left|\ln h\right|+\int_0^h\frac{\omega(\lambda,t)}{t}dt+h\int_h^{diam\Omega}\frac{\omega(\lambda,t)}{t^2}dt\right),$$

где $h=\left|x'-x''\right|$*, а* M_λ *– положительная постоянная, зависящая лишь от* Ω*,* k *и* λ*.*

Доказательство. Как видно, достаточно показать справедливость теоремы, например, для выражения

$$W(x)=n_1(x)n_3(x)W_0(x)=n_1(x)n_3(x)\int_\Omega\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_2}n_1(y)\lambda(y)d\Omega_y.$$

Возьмем любые точки $x',\ x''\in\Omega$ такие, чтобы $h=\left|x'-x''\right|<d/4$. Так как

$$W(x')-W(x'')=\left(n_1(x')-n_1(x'')\right)n_3(x')W_0(x')+\left(n_3(x')-n_3(x'')\right)n_1(x'')W_0(x')+$$
$$+n_1(x'')n_3(x'')\left(W_0(x')-W_0(x'')\right),$$

то, учитывая разложение (4) и неравенство (6), получаем, что

$$\left|W(x')-W(x'')\right|\le Mh^\alpha+\left|W_0(x')-W_0(x'')\right|\le Mh^\alpha+\left|W_{0,1}(x')-W_{0,1}(x'')\right|+$$
$$+\left|W_{0,2}(x')-W_{0,2}(x'')\right|+\left|W_{0,3}(x')-W_{0,3}(x'')\right|+\left|W_{0,4}(x')-W_{0,4}(x'')\right|. \qquad (12)$$

Из неравенства (5) очевидно, что выражение $W_{0,1}(x)$ является слабо сингулярным интегралом. Тогда, поступая точно так же, как и в работе [6], можно показать, что

$$\left|W_{0,1}(x')-W_{0,1}(x'')\right|\le M\left(\left\|\lambda\right\|_\infty h^\alpha\left|\ln h\right|+\int_0^h\omega(\lambda,t)dt+h\int_h^d\frac{\omega(\lambda,t)}{t}dt\right). \qquad (13)$$

Так как функция $W_{0,2}(x)$ является непрерывно дифференцируемой на поверхности $\Omega\setminus\Omega_d(x)$, то

$$\left|W_{0,2}(x')-W_{0,2}(x'')\right|\le M\left\|\lambda\right\|_\infty h. \qquad (14)$$

Представим выражение $W_{0,3}(x)$ в виде: $W_{0,3}(x)=W_{0,3}^{(1)}(x)+W_{0,3}^{(2)}(x)$, где

$$W_{0,3}^{(1)}(x)=\int\limits_{\Omega_d(x)}\frac{(y_2-x_2)(n_1(y)-n_1(x))}{4\pi|x-y|^3}\lambda(y)\,d\Omega_y\ ,$$

$$W_{0,3}^{(2)}(x)=n_1(x)\int\limits_{\Omega_d(x)}\frac{y_2-x_2}{4\pi|x-y|^3}(\lambda(y)-\lambda(x))\,d\Omega_y\ .$$

Принимая во внимание неравенство (6), получаем, что выражение $W_{0,3}^{(1)}(x)$ является слабо сингулярным интегралом. Поэтому, поступая точно так же, как и в работе [6], можно показать, что

$$\left|W_{0,3}^{(1)}(x')-W_{0,3}^{(1)}(x'')\right|\le M\left(\|\lambda\|_\infty h^\alpha|\ln h|+\int\limits_0^h\frac{\omega(\lambda,t)}{t^{1-\alpha}}dt+h\int\limits_h^d\frac{\omega(\lambda,t)}{t^{2-\alpha}}dt\right). \qquad (15)$$

Очевидно, что

$$W_{0,3}^{(2)}(x')-W_{0,3}^{(2)}(x'')=\frac{1}{4\pi}\left(W_{0,3}^{(2,1)}(x',x'')+n_1(x'')W_{0,3}^{(2,2)}(x',x'')\right),$$

где

$$W_{0,3}^{(2,1)}(x',x'')=(n_1(x')-n_1(x''))\int\limits_{\Omega_d(x')}\frac{y_2-x_2'}{|x'-y|^3}(\lambda(y)-\lambda(x'))\,d\Omega_y\ ,$$

$$W_{0,3}^{(2,2)}(x',x'')=\int\limits_{\Omega_d(x')}\frac{y_2-x_2'}{|x'-y|^3}(\lambda(y)-\lambda(x'))\,d\Omega_y-\int\limits_{\Omega_d(x'')}\frac{y_2-x_2''}{|x''-y|^3}(\lambda(y)-\lambda(x''))\,d\Omega_y\ .$$

Учитывая неравенство (6) и формулу сведения поверхностного интеграла к двойному, получим

$$\left|W_{0,3}^{(2,1)}(x',x'')\right|\le M\,|x'-x''|^\alpha\int\limits_{\Omega_d(x')}\frac{\omega(\lambda,|y-x'|)}{|x'-y|^2}d\Omega_y\le Mh^\alpha\int\limits_0^d\frac{\omega(\lambda,t)}{t}dt\ .$$

Теперь оценим выражение $W_{0,3}^{(2,2)}(x',x'')$. Очевидно, что

$$W_{0,3}^{(2,2)}(x',x'')=\sum_{m=1}^{7}w_m(x',x''),$$

где

$$w_1(x',x'')=\int\limits_{\Omega_{h/2}(x')}\frac{y_2-x_2'}{|x'-y|^3}(\lambda(y)-\lambda(x'))\,d\Omega_y\ ,$$

$$w_2(x',x'')=-\int\limits_{\Omega_{h/2}(x'')}\frac{y_2-x_2''}{|x''-y|^3}(\lambda(y)-\lambda(x''))\,d\Omega_y\ ,$$

$$w_3(x',x'')=-\int\limits_{\Omega_{h/2}(x')}\frac{y_2-x_2''}{|x''-y|^3}(\lambda(y)-\lambda(x''))\,d\Omega_y\ ,$$

$$w_4(x',x'')=\int\limits_{\Omega_{h/2}(x'')}\frac{y_2-x_2'}{|x'-y|^3}(\lambda(y)-\lambda(x'))\,d\Omega_y\ ,$$

$$w_5(x',x'')=\int\limits_{\Omega_d(x')\setminus(\Omega_{h/2}(x')\cup\Omega_{h/2}(x''))}(y_2-x_2')(\lambda(y)-\lambda(x'))\left(\frac{1}{|x'-y|^3}-\frac{1}{|x''-y|^3}\right)d\Omega_y\ ,$$

$$w_6\left(x',x''\right)=\int\limits_{\Omega_d(x')\setminus\left(\Omega_{h/2}(x')\cup\Omega_{h/2}(x'')\right)}\frac{\left(x_2''-x_2'\right)\left(\lambda\left(y\right)-\lambda\left(x'\right)\right)}{\left|x''-y\right|^3}d\Omega_y\ ,$$

$$w_7\left(x',x''\right)=\left(\lambda\left(x''\right)-\lambda\left(x'\right)\right)\int\limits_{\Omega_d(x')\setminus\left(\Omega_{h/2}(x')\cup\Omega_{h/2}(x'')\right)}\frac{y_2-x_2''}{\left|x''-y\right|^3}d\Omega_y\ .$$

Применяя формулу сведения поверхностного интеграла к двойному, имеем

$$\left|w_1\left(x',x''\right)\right|\le M\int\limits_0^h\frac{\omega\left(\lambda,t\right)}{t}dt\,,\quad \left|w_2\left(x',x''\right)\right|\le M\int\limits_0^h\frac{\omega\left(\lambda,t\right)}{t}dt\ .$$

Кроме того, принимая во внимание неравенство

$$h/2\le\left|y-x''\right|\le 3h/2,\quad y\in\Omega_{h/2}\left(x'\right),$$

получаем, что

$$\left|w_3\left(x',x''\right)\right|\le M\,\frac{\omega\left(\lambda,3h/2\right)}{\left(h/2\right)^2}\,mes\Omega_{h/2}(x')\le M\,\omega\left(\lambda,h\right).$$

Аналогичным образом, учитывая неравенство

$$h/2\le\left|y-x'\right|\le 3h/2,\quad y\in\Omega_{h/2}\left(x''\right),$$

получим

$$\left|w_4\left(x',x''\right)\right|\le M\,\omega\left(\lambda,h\right).$$

Так как для любых точек $y\in\Omega_d\left(x'\right)\setminus\left(\Omega_{h/2}\left(x'\right)\bigcup\Omega_{h/2}\left(x''\right)\right)$

$$\left|x'-y\right|\le 3\left|x''-y\right|,\ \left|x''-y\right|\le 3\left|x'-y\right|,$$

то, применяя формулу сведения поверхностного интеграла к двойному, находим

$$\left|w_5\left(x',x''\right)\right|\le M\,h\int\limits_h^d\frac{\omega\left(\lambda,t\right)}{t^2}dt\,,\ \left|w_6\left(x',x''\right)\right|\le M\,h\int\limits_h^d\frac{\omega\left(\lambda,t\right)}{t^2}dt\ .$$

Для оценки выражения $w_7\left(x',x''\right)$ на куске $\Omega_d\left(x'\right)$ выберем локальную прямоугольную систему координат $\left(u,v,w\right)$ с началом в точке x', где ось w направим вдоль нормали $n\left(x'\right)$, а оси u и v будут лежать на касательной плоскости $\Gamma\left(x'\right)$. При этом координатами точки x' будут $\left(0,0,0\right)$, а координаты точки x'' обозначим через $\left(u'',v'',\psi\left(u'',v''\right)\right)$. Пусть

$$h_0=\sqrt{\left(u''\right)^2+\left(v''\right)^2}\ ,\ O_\varepsilon\left(x'\right)=\{\left(u,v\right)\in\Gamma\left(x'\right)\big|\ u^2+v^2<\varepsilon^2\},$$

$$O_\varepsilon(x'')=\{\left(u,v\right)\in\Gamma\left(x'\right)\Big|\ \left(u-u''\right)^2+\left(v-v''\right)^2<\varepsilon^2\},$$

а через $\Pi_{h/2}\left(x',x''\right)$ обозначим проекцию множества $\Omega_{h/2}\left(x'\right)\cup\Omega_{h/2}\left(x''\right)$ на касательную плоскость $\Gamma\left(x'\right)$. Тогда из формулы сведения поверхностного интеграла к двойному имеем

$$w_7\left(x',x''\right)=\left(\lambda\left(x''\right)-\lambda\left(x'\right)\right)\int\limits_{\Pi_d(x')\setminus\Pi_{h/2}(x',x'')}\frac{\left(\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial\psi\left(u,v\right)}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\psi\left(u,v\right)}{\partial v}\right)^2}-1\right)}{\left(\sqrt{u^2+v^2+\psi^2\left(u,v\right)}\right)^3}v\,dudv+$$

$$+\left(\lambda\left(x''\right)-\lambda\left(x'\right)\right)\int\limits_{\Pi_d(x')\setminus\Pi_{h/2}(x',x'')}\left(\frac{1}{\left(\sqrt{u^2+v^2+\psi^2(u,v)}\right)^3}-\frac{1}{\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^3}\right)vdudv+$$

$$+\left(\lambda\left(x''\right)-\lambda\left(x'\right)\right)\int\limits_{\Pi_d(x')\setminus\Pi_{h/2}(x',x'')}\frac{v}{\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^3}dudv\,.$$

Слагаемые в правой части последнего равенства обозначим через $w_7^{(1)}\left(x',x''\right)$, $w_7^{(2)}\left(x',x''\right)$ и $w_7^{(3)}\left(x',x''\right)$ соответственно.

Учитывая (8) и (11), находим

$$\left|w_7^{(1)}\left(x',x''\right)\right|\le M\,\omega\left(\lambda,h\right),\quad \left|w_7^{(2)}\left(x',x''\right)\right|\le M\,\omega\left(\lambda,h\right).$$

Так как

$$\int\limits_{O_{d_0}(x')\setminus O_{2h}(x')}\frac{v}{\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^3}dudv=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{2h}^{d_0}\frac{\sin\varphi}{r}dr\,d\varphi=0\,,$$

то

$$\int\limits_{\Pi_d(x')\setminus\Pi_{h/2}(x',x'')}\frac{v}{\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^3}dudv=$$

$$=\int\limits_{\Pi_d(x')\setminus O_{d_0}(x')}\frac{v}{\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^3}dudv+\int\limits_{O_{2h}(x')\setminus\Pi_{h/2}(x',x'')}\frac{v}{\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^3}dudv.$$

Отсюда получаем, что

$$\left|w_7^{(3)}\left(x',x''\right)\right|\le M\left(\omega\left(\lambda,h\right)+\omega\left(\lambda,h\right)\int\limits_{h/C_1}^{2h}\frac{1}{t}dt\right)\le M\,\omega\left(\lambda,h\right),$$

а значит,
$$\left|w_7\left(x',x''\right)\right|\le M\,\omega\left(\lambda,h\right).$$

Суммируя полученные оценки для выражений $w_m\left(x',x''\right)$, $m=\overline{1,7}$, находим

$$\left|W_{0,3}^{(2,2)}\left(x',x''\right)\right|=M\left(\omega\left(\lambda,h\right)+\int\limits_0^h\frac{\omega\left(\lambda,t\right)}{t}dt+h\int\limits_h^d\frac{\omega\left(\lambda,t\right)}{t^2}dt\right).$$

Далее, принимая во внимание полученную оценку для $W_{0,3}^{(2,1)}\left(x',x''\right)$, получаем, что

$$\left|W_{0,3}^{(2)}\left(x'\right)-W_{0,3}^{(2)}\left(x''\right)\right|\le M\left(\omega\left(\lambda,h\right)+h^{\alpha}\int\limits_0^d\frac{\omega\left(\lambda,t\right)}{t}dt+\int\limits_0^h\frac{\omega\left(\lambda,t\right)}{t}dt+h\int\limits_h^d\frac{\omega\left(\lambda,t\right)}{t^2}dt\right).$$

В результате, учитывая оценку (15), получим

$$\left|W_{0,3}\left(x'\right)-W_{0,3}\left(x''\right)\right|\le M\left(\left\|\lambda\right\|_{\infty}h^{\alpha}\left|\ln h\right|+\omega\left(\lambda,h\right)+\int\limits_0^h\frac{\omega\left(\lambda,t\right)}{t}dt+h\int\limits_h^d\frac{\omega\left(\lambda,t\right)}{t^2}dt\right).\quad(16)$$

Представим выражение $W_{0,4}\left(x'\right)-W_{0,4}\left(x''\right)$ в виде:

$$W_{0,4}\left(x'\right)-W_{0,4}\left(x''\right)=\left(n_1\left(x'\right)-n_1\left(x''\right)\right)\lambda\left(x'\right)\int\limits_{\Omega_d(x')}\frac{y_2-x_2'}{4\pi\left|x'-y\right|^3}d\Omega_y+$$

$$+\left(\lambda(x')-\lambda(x'')\right)n_1(x'')\int\limits_{\Omega_d(x')}\frac{y_2-x_2'}{4\pi|x'-y|^3}d\Omega_y+$$
$$+\frac{n_1(x'')\lambda(x'')}{4\pi}\left(\int\limits_{\Omega_d(x')}\frac{y_2-x_2'}{|x'-y|^3}d\Omega_y-\int\limits_{\Omega_d(x'')}\frac{y_2-x_2''}{|x''-y|^3}d\Omega_y\right).$$

Слагаемые в правой части последнего равенства обозначим через $W_{0,4}^{(1)}(x',x'')$, $W_{0,4}^{(2)}(x',x'')$ и $W_{0,4}^{(3)}(x',x'')$ соответственно.

Так как интеграл

$$\int\limits_{\Omega_d(x)}\frac{y_2-x_2}{|x-y|^3}d\Omega_y$$

сходится в смысле главного значения Коши, то, принимая во внимание (6), имеем

$$\left|W_{0,4}^{(1)}(x',x'')\right|\le M\,\|\lambda\|_\infty\,h^\alpha,\ \left|W_{0,4}^{(2)}(x',x'')\right|\le M\,\omega(\lambda,h).$$

Для оценки выражения $W_{0,4}^{(3)}(x',x'')$ на куске $\Omega_d(x')$ выберем локальную прямоугольную систему координат (u,v,w) с началом в точке x'. Тогда, перейдя к двойному интегралу, выражение $W_{0,4}^{(3)}(x',x'')$ можно представить в виде:

$$W_{0,4}^{(3)}(x',x'')=W_{0,4}^{(3,1)}(x',x'')+W_{0,4}^{(3,2)}(x',x''),$$

где

$$W_{0,4}^{(3,1)}(x',x'')=\frac{n_1(x'')\lambda(x'')}{4\pi}\left(\int\limits_{\Pi_d(x')\setminus O_{d_0}(x')}\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi(u,v)}{dv}\right)^2}}{\left(\sqrt{u^2+v^2+\psi^2(u,v)}\right)^3}vdudv-\right.$$
$$\left.-\int\limits_{\Pi_d(x'')\setminus O_{d_0}(x'')}\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi(u,v)}{dv}\right)^2}}{\left(\sqrt{(u-u'')^2+(v-v'')^2+\left(\psi(u,v)-\psi(u'',v'')\right)^2}\right)^3}(v-v'')dudv\right),$$

$$W_{0,4}^{(3,2)}(x',x'')=\frac{n_1(x'')\lambda(x'')}{4\pi}\left(\int\limits_{O_{d_0}(x')}\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi(u,v)}{dv}\right)^2}}{\left(\sqrt{u^2+v^2+\psi^2(u,v)}\right)^3}vdudv-\right.$$
$$\left.-\int\limits_{O_{d_0}(x'')}\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi(u,v)}{dv}\right)^2}}{\left(\sqrt{(u-u'')^2+(v-v'')^2+\left(\psi(u,v)-\psi(u'',v'')\right)^2}\right)^3}(v-v'')dudv\right).$$

Как видно, функция

$$\rho(\zeta,\eta)=\int\limits_{\Pi_d(\gamma)\setminus O_{d_0}(\gamma)}\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi(u,v)}{dv}\right)^2}}{\left(\sqrt{(u-\zeta)^2+(v-\eta)^2+\left(\psi(u,v)-\psi(\zeta,\eta)\right)^2}\right)^3}(v-\eta)\,dudv$$

является собственным интегралом, где $\gamma=\left(\zeta,\eta,\psi(\zeta,\eta)\right)$. Тогда

$$\left|W_{0,4}^{(3,1)}(x',x'')\right|=\left|\rho(0,0)-\rho(u'',v'')\right|\le M\,\|\lambda\|_\infty\sqrt{(u'')^2+(v'')^2}=M\,\|\lambda\|_\infty h_0 .$$

Проведем замену переменных $u=t+u''$ и $v=s+v''$ на втором слагаемом интеграле в выражении $W_{0,4}^{(3,2)}(x',x'')$. Тогда, пользуясь формулой замены переменных в двойном интеграле и заменив параметр t на u, а параметр s на v, получим

$$W_{0,4}^{(3,2)}(x',x'')=\frac{n_1(x'')\lambda(x'')}{4\pi}\left(\int\limits_{O_{d_0}(x')}\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi(u,v)}{dv}\right)^2}}{\left(\sqrt{u^2+v^2+\psi^2(u,v)}\right)^3}v\,dudv-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{O_{d_0}(x')}\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi(u+u'',v+v'')}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi(u+u'',v+v'')}{\partial v}\right)^2}}{\left(\sqrt{u^2+v^2+\left(\psi(u+u'',v+v'')-\psi(u'',v'')\right)^2}\right)^3}v\,dudv\right).$$

Кроме того, перейдя к полярной системе координат (9), нетрудно показать, что

$$\int\limits_{O_{d_0}(x')}\frac{v}{\left(\sqrt{u^2+v^2+\left(\frac{\partial\psi(u'',v'')}{\partial u}u+\frac{\partial\psi(u'',v'')}{dv}v\right)^2}\right)^3}\,dudv=0 .$$

Поэтому, учитывая равенство (10), находим

$$W_{0,4}^{(3,2)}(x',x'')=\frac{n_1(x'')\lambda(x'')}{4\pi}\left(v_1(x',x'')+v_2(x',x'')+v_3(x',x'')\right),$$

где

$$v_1(x',x'')=\int\limits_{O_{d_0}(x')}\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi(u,v)}{dv}\right)^2}-1}{\left(\sqrt{u^2+v^2+\psi^2(u,v)}\right)^3}v\,dudv-$$

$$-\int\limits_{O_{d_0}(x')}\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi(u,v)}{dv}\right)^2}-1}{\left(\sqrt{u^2+v^2+\left(\psi(u+u'',v+v'')-\psi(u'',v'')\right)^2}\right)^3}v\,dudv ,$$

$$v_2\left(x',x''\right)=\int\limits_{O_{d_0}(x')}\left(\frac{1}{\left(\sqrt{u^2+v^2+\psi^2\left(u,v\right)}\right)^3}-\frac{1}{\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^3}\right)vdudv-$$

$$-\int\limits_{O_{d_0}(x')}\left(\frac{1}{\left(\sqrt{u^2+v^2+\left(\psi\left(u+u'',v+v''\right)-\psi\left(u'',v''\right)\right)^2}\right)^3}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\left(\sqrt{u^2+v^2+\left(\frac{\partial\psi\left(u'',v''\right)}{\partial u}u+\frac{\partial\psi\left(u'',v''\right)}{dv}v\right)^2}\right)^3}\right)vdudv,$$

$$v_3\left(x',x''\right)=\int\limits_{O_{d_0}(x')}\left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi\left(u,v\right)}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi\left(u,v\right)}{dv}\right)^2}}{\left(\sqrt{u^2+v^2+\left(\psi\left(u+u'',v+v''\right)-\psi\left(u'',v''\right)\right)^2}\right)^3}-\right.$$

$$\left.-\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi\left(u+u'',v+v''\right)}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi\left(u+u'',v+v''\right)}{\partial v}\right)^2}}{\left(\sqrt{u^2+v^2+\left(\psi\left(u+u'',v+v''\right)-\psi\left(u'',v''\right)\right)^2}\right)^3}\right)vdudv\ .$$

Из неравенства (8) очевидно, что

$$\int\limits_{O_{d_0}(x')}\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi\left(u,v\right)}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi\left(u,v\right)}{dv}\right)^2}-1}{\left(\sqrt{u^2+v^2+\left(\psi\left(u+\xi,v+\eta\right)-\psi\left(\xi,\eta\right)\right)^2}\right)^3}vdudv$$

является слабо сингулярным интегралом. Поэтому, поступая точно так же, как и в работе [6], можно показать, что

$$\left|v_1\left(x',x''\right)\right|\le M\left(h_0\right)^{\alpha}\left|\ln h_0\right|.$$

Кроме того, известно, что существует такие числа θ_3 , $\theta_4\in(0,1)$, что

$$\psi\left(u+u'',v+v''\right)-\psi\left(u'',v''\right)=\frac{\partial\psi\left(\theta_3u+u'',\theta_4v+v''\right)}{\partial u}u+\frac{\partial\psi\left(\theta_3u+u'',\theta_4v+v''\right)}{dv}v\ .$$

Тогда, принимая во внимание условие $\psi\in H_{1,\alpha}\left(\Pi_d\left(x\right)\right)$, можно показать, что

$$\left|\left(\frac{1}{\left(\sqrt{u^2+v^2+\left(\psi\left(u+\xi,v+\eta\right)-\psi\left(\xi,\eta\right)\right)^2}\right)^3}-\frac{1}{\left(\sqrt{u^2+v^2+\left(\frac{\partial\psi\left(\xi,\eta\right)}{\partial u}u+\frac{\partial\psi\left(\xi,\eta\right)}{dv}v\right)^2}\right)^3}\right)\right|\le$$

$$\le M\frac{1}{\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^{3-\alpha}}, \tag{17}$$

т.е. интеграл

$$\int_{O_{d_0}(x')}\left(\frac{1}{\left(\sqrt{u^2+v^2+\left(\psi\left(u+\xi,v+\eta\right)-\psi\left(\xi,\eta\right)\right)^2}\right)^3}-\frac{1}{\left(\sqrt{u^2+v^2+\left(\frac{\partial\psi\left(\xi,\eta\right)}{\partial u}u+\frac{\partial\psi\left(\xi,\eta\right)}{dv}v\right)^2}\right)^3}\right)vdudv$$

является слабо сингулярным интегралом. Поэтому можно показать, что

$$\left|v_2\left(x',x''\right)\right|\le M\left(h_0\right)^{\alpha}\left|\ln h_0\right|.$$

Перейдя к полярной системе координат (9), нетрудно увидеть, что

$$\int_{O_{h_0}(x')}\frac{v}{\left(\sqrt{u^2+v^2+\left(\frac{\partial\psi\left(u'',v''\right)}{\partial u}u+\frac{\partial\psi\left(u'',v''\right)}{dv}v\right)^2}\right)^3}dudv=0.$$

Тогда выражение $v_3\left(x',x''\right)$ можно представить в виде:

$$v_3\left(x',x''\right)=v_{3,1}\left(x',x''\right)+v_{3,2}\left(x',x''\right)+v_{3,3}\left(x',x''\right)+v_{3,4}\left(x',x''\right),$$

где

$$v_{3,1}\left(x',x''\right)=\int_{O_{d_0}(x')\setminus O_{h_0}(x')}\left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi\left(u,v\right)}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi\left(u,v\right)}{dv}\right)^2}}{\left(\sqrt{u^2+v^2+\left(\psi\left(u+u'',v+v''\right)-\psi\left(u'',v''\right)\right)^2}\right)^3}-\right.$$

$$\left.-\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi\left(u+u'',v+v''\right)}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi\left(u+u'',v+v''\right)}{\partial v}\right)^2}}{\left(\sqrt{u^2+v^2+\left(\psi\left(u+u'',v+v''\right)-\psi\left(u'',v''\right)\right)^2}\right)^3}\right)vdudv,$$

$$v_{3,2}(x',x'')=\int\limits_{O_{h_0}(x')}\left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi(u'',v'')}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi(u'',v'')}{dv}\right)^2}}{\left(\sqrt{u^2+v^2+\left(\psi(u+u'',v+v'')-\psi(u'',v'')\right)^2}\right)^3}-\right.$$

$$\left.-\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi(u+u'',v+v'')}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi(u+u'',v+v'')}{\partial v}\right)^2}}{\left(\sqrt{u^2+v^2+\left(\psi(u+u'',v+v'')-\psi(u'',v'')\right)^2}\right)^3}\right)vdudv\ ,$$

$$v_{3,3}(x',x'')=\int\limits_{O_{h_0}(x')}\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi(u,v)}{dv}\right)^2}-1}{\left(\sqrt{u^2+v^2+\left(\psi(u+u'',v+v'')-\psi(u'',v'')\right)^2}\right)^3}vdudv\ ,$$

$$v_{3,4}(x',x'')=\int\limits_{O_{h_0}(x')}\left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi(u'',v'')}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi(u'',v'')}{dv}\right)^2}-1}{\left(\sqrt{u^2+v^2+\left(\frac{\partial\psi(u'',v'')}{\partial u}u+\frac{\partial\psi(u'',v'')}{dv}v\right)^2}\right)^3}-\right.$$

$$\left.-\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi(u'',v'')}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi(u'',v'')}{dv}\right)^2}-1}{\left(\sqrt{u^2+v^2+\left(\psi(u+u'',v+v'')-\psi(u'',v'')\right)^2}\right)^3}\right)vdudv\,.$$

Принимая во внимание условие $\psi\in H_{1,\alpha}\left(\Pi_d(x)\right)$, можно показать, что

$$\left|\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}\right)^2}-\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi(u+u'',v+v'')}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi(u+u'',v+v'')}{\partial v}\right)^2}\right|\le M(h_0)^\alpha$$

и

$$\left|\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi(u'',v'')}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi(u'',v'')}{\partial v}\right)^2}-\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi(u+u'',v+v'')}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi(u+u'',v+v'')}{\partial v}\right)^2}\right|\le$$

$$\le M\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^\alpha.$$

Тогда имеем

$$\left|v_{3,1}(x',x'')\right|\le M(h_0)^\alpha\int\limits_{O_{d_0}(x')\setminus O_{h_0}(x')}\frac{1}{u^2+v^2}dudv\le M(h_0)^\alpha\left|\ln h_0\right|$$

и $$\left|v_{3,2}\left(x',x''\right)\right| \le M \int\limits_{O_{h_0}(x')} \frac{1}{\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)^{2-\alpha}}\,du\,dv \le M\left(h_0\right)^{\alpha}.$$

Кроме того, учитывая неравенства (8) и (17), получим

$$\left|v_{3,3}\left(x',x''\right)\right| \le M\left(h_0\right)^{\alpha}, \quad \left|v_{3,1}\left(x',x''\right)\right| \le M\left(h_0\right)^{2\alpha},$$

а значит,

$$\left|v_{3}\left(x',x''\right)\right| \le M\left(h_0\right)^{\alpha}\left|\ln h_0\right|.$$

Суммируя полученные оценки для выражений $v_1\left(x',x''\right)$, $v_2\left(x',x''\right)$ и $v_3\left(x',x''\right)$, получаем, что

$$\left|W_{0,4}^{(3,2)}\left(x',x''\right)\right| \le M\left\|\lambda\right\|_{\infty}\left(h_0\right)^{\alpha}\left|\ln h_0\right|.$$

Кроме того, суммируя полученные оценки для $W_{0,4}^{(3,1)}\left(x',x''\right)$ и $W_{0,4}^{(3,2)}\left(x',x''\right)$ и учитывая, что $h_0 \le h$, имеем

$$\left|W_{0,4}^{(3)}\left(x',x''\right)\right| \le M\left\|\lambda\right\|_{\infty} h^{\alpha}\left|\ln h\right|.$$

В итоге, суммируя полученные оценки для выражений $W_{0,4}^{(1)}\left(x',x''\right)$, $W_{0,4}^{(2)}\left(x',x''\right)$ и $W_{0,4}^{(3)}\left(x',x''\right)$, находим

$$\left|W_{0,4}\left(x',x''\right)\right| \le M\left(\left\|\lambda\right\|_{\infty} h^{\alpha}\left|\ln h\right| + \omega\left(\lambda,h\right)\right). \tag{18}$$

Так как

$$\int\limits_0^h \frac{\omega\left(\lambda,t\right)}{t}\,dt \ge \frac{\omega\left(\lambda,h\right)}{h}\int\limits_0^h dt = \omega\left(\lambda,h\right),$$

то, принимая во внимание оценки (13), (14), (16) и (18) в неравенстве (12), получаем доказательство теоремы.

Рассмотрим функцию

$$g\left(h\right) = h^{\alpha}\left|\ln h\right| + \int\limits_0^h \frac{\omega\left(\lambda,t\right)}{t}\,dt + h\int\limits_h^{diam\,\Omega} \frac{\omega\left(\lambda,t\right)}{t^2}\,dt.$$

Нетрудно показать, что $\lim\limits_{h\to 0} g\left(h\right) = 0$, функция $g\left(h\right)$ не убывает, а функция $g\left(h\right)/h$ не возрастает. Тогда, применяя теорему 2, получаем справедливость следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть Ω – поверхность Ляпунова с показателем $0<\alpha\le 1$ и*

$$\int\limits_0^{diam\,\Omega} \frac{\omega\left(\lambda,t\right)}{t}\,dt < +\infty.$$

Тогда

$$\omega\left(A\lambda,h\right) \le M_{\lambda}\left(h^{\alpha}\left|\ln h\right| + \int\limits_0^h \frac{\omega\left(\lambda,t\right)}{t}\,dt + h\int\limits_h^{diam\,\Omega} \frac{\omega\left(\lambda,t\right)}{t^2}\,dt\right),$$

где M_{λ} – положительная постоянная, зависящая лишь от Ω, k и λ.

Введем следующие классы функций, определенные на $\left(0, diam\,\Omega\right]$:

$$\chi = \left\{\varphi:\ \varphi\uparrow, \lim_{\delta\to 0}\kappa\left(\delta\right)=0, \varphi\left(\delta\right)/\delta\downarrow\right\}, \quad J_0\left(\Omega\right) = \left\{\varphi\in\chi:\ \int\limits_0^{diam\,\Omega} \frac{\varphi\left(t\right)}{t}\,dt < +\infty\right\}.$$

Рассмотрим функцию

$$Z(h,\varphi)=h^{\alpha}\left|\ln h\right|+\int_0^h\frac{\varphi(t)}{t}dt+h\int_h^{diam\Omega}\frac{\varphi(t)}{t^2}dt .$$

Там, где это не вызовет недоразумения, иногда будем писать $Z(h)$, $Z(\varphi)$ вместо $Z(h,\varphi)$. Очевидно, что $\lim\limits_{h\to 0}Z(h)=0$, функция $Z(h)$ не убывает, а функция $Z(h)/h$ не возрастает.

Пусть $\varphi\in\chi$. Через $H(\varphi)$ обозначим линейное пространство всех непрерывных на поверхности Ω функций λ, удовлетворяющих условию

$$\left|\lambda(x)-\lambda(y)\right|\le C_{\lambda}\varphi\left(\left|x-y\right|\right),\quad x,y\in\Omega ,$$

где C_λ – положительная постоянная, зависящая от Ω и λ, а не от точек x и y. Очевидно, что, в частности, если $\varphi(t)=t^{\beta}$, то пространство $H(\varphi)$ является пространством Гельдера $H_{\beta}(\Omega)$ с показателем $\beta\in(0,1]$.

Известно (см.: [9. С. 60]), что пространство $H(\varphi)$ является банаховым пространством с нормой

$$\left\|\lambda\right\|_{H(\varphi)}=\sup_{x\in\Omega}\left|\lambda(x)\right|+\sup_{\substack{x,y\in\Omega,\\ x\neq y}}\frac{\left|\lambda(x)-\lambda(y)\right|}{\varphi\left(\left|x-y\right|\right)} .$$

Теорема 4. *Пусть Ω – поверхность Ляпунова с показателем* $0<\alpha\le 1$ *и* $\varphi\in J_0(\Omega)$. *Тогда оператор A ограниченно действует из* $H(\varphi)$ *в* $H(Z(\varphi))$, *причем*

$$\left\|A\right\|_{H(Z(\varphi))}\le M\left\|\lambda\right\|_{H(\varphi)} .$$

Нетрудно вычислить, что

$$(G\mu)(x)=2\int_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_3}n_2(x)-\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_2}n_3(x)\right)e_1+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_1}n_3(x)-\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_3}n_1(x)\right)e_2+\left(\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_2}n_1(x)-\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial x_1}n_2(x)\right)e_3\right)d\Omega_y .$$

Тогда, поступая точно так же, как и в доказательствах теорем 1 и 4, можно доказать справедливость следующих теорем.

Теорема 5. *Пусть Ω – поверхность Ляпунова с показателем* $0<\alpha\le 1$ *и*

$$\int_0^{diam\,\Omega}\frac{\omega(\mu,t)}{t}dt<+\infty .$$

Тогда интеграл (2) *существует в смысле главного значения Коши, причем*

$$\sup_{x\in\Omega}\left|(B\mu)(x)\right|\le M\left(\left\|\mu\right\|_{\infty}+\int_0^{diam\,\Omega}\frac{\omega(\mu,t)}{t}dt\right).$$

Теорема 6. *Пусть Ω – поверхность Ляпунова с показателем* $0<\alpha\le 1$ *и* $\varphi\in J_0(\Omega)$. *Тогда оператор B ограниченно действует из* $H(\varphi)$ *в* $H(Z(\varphi))$, *причем*

$$\left\|B\right\|_{H(Z(\varphi))}\le M\left\|\mu\right\|_{H(\varphi)} .$$

Как видно, в частности из теорем 4 и 6, получаем ограниченность операторов *A* и *B* в пространствах Гельдера.

Список источников

1. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 311 с.
2. *Гюнтер Н.М.* Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: Гос. изд. тех.-теорет. лит., 1953. 415 с.
3. *Халилов Э.Г., Бахшалыева М.Н.* О производной логарифмического потенциала двойного слоя // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 62. С. 38–54. doi: 10.17223/19988621/62/4
4. *Халилов Э.Г.* О свойствах оператора, порожденного производной акустического потенциала простого слоя // Сибирский журнал чистой и прикладной математики. 2017. Т. 17, № 1. С. 78–90.
5. *Халилов Э.Г.* Некоторые свойства оператора, порожденного производной акустического потенциала двойного слоя // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55, № 3. С. 564–573.
6. *Safarova V.O.* Some properties of one class of vector potentials with weak singularities // Baku Mathematical Journal. 2025. V. 4, № 1. P. 37–47. URL: https://www.bakumathj.org/archive/Vol4No1/j.bmj.064.pdf
7. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 527 с.
8. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1969. Т. 3. 656 с.
9. *Гусейнов А.И., Мухтаров Х.Ш.* Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1980. 416 с.

References

1. Colton D.L., Kress R. (1983) *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. John Wiley & Sons.
2. Günter N.M. (1967) *Potential Theory and Its Application to Basic Problems of Mathematical Physics*. New York: Frederick Ungar Publishing.
3. Khalilov E.H., Bakhshaliyeva M.N. (2019) O proizvodnoy logarifmicheskogo potentsiala dvoynogo sloya [On the derivative of the double-layer logarithmic potential]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 62. pp. 38–54. DOI: 10.17223/19988621/62/4.
4. Khalilov E.H. (2018) Properties of the operator generated by the derivative of the acoustic single layer potential. *Journal of Mathematical Sciences*. 231(2). pp. 168–180. DOI: 10.1007/s10958-018-3813-1.
5. Khalilov E.H. (2014) Some properties of the operators generated by a derivative of the acoustic double layer potential. *Siberian Mathematical Journal*. 55(3). pp. 564–573. DOI: 10.1134/S0037446614030173.
6. Safarova V.O. (2025) Some properties of one class of vector potentials with weak singularities. *Baku Mathematical Journal*. 4(1). pp. 37–47. DOI: 10.32010/j.bmj.2025.04.
7. Vladimirov V.S. (1971) *Equations of Mathematical Physics*. New York: Marcel Dekker.
8. Fichtenholz G.M. (1969) *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [Course of differential and integral calculus]. Vol. 3. Moscow: Nauka.
9. Guseinov A.I., Mukhtarov Kh.Sh. (1980) *Vvedeniye v teoriyu nelineynykh singulyarnykh integral'nykh uravneniy* [Introduction to the theory of nonlinear singular integral equations]. Moscow: Nauka.

***Сведения об авторах*:**
Халилов Эльнур Гасан оглы – доктор математических наук, профессор кафедры общей и прикладной математики Азербайджанского государственного университета нефти и промышленности (Баку, Азербайджан). E-mail: elnurkhalil@mail.ru
Сафарова Вафа Осман кызы – преподаватель кафедры общей и прикладной математики Азербайджанского государственного университета нефти и промышленности (Баку, Азербайджан). E-mail: vefa-seferova-91@bk.ru

***Information about the authors*:**
Khalilov Elnur H. (Doctor of Mathematical Sciences, Professor of the General and Applied Mathematics Department of Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan). E-mail: elnurkhalil@mail.ru
Safarova Vafa O. (Lecturer of the General and Applied Mathematics Department of Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan). E-mail: vefa-seferova-91@bk.ru

Статья поступила в редакцию 08.02.2025; принята к публикации 06.09.2025

The article was submitted 08.02.2025; accepted for publication 06.09.2025