

## МЕХАНИКА

## MECHANICS

Научная статья

УДК 532.5.031, 532.5.032

doi: 10.17223/19988621/97/4

**Динамика цилиндрического пузырька  
с учетом движения линии контакта  
по неоднородной поверхности подложки**

**Алексей Анатольевич Алабужев**

*Институт механики сплошных сред Уральского отделения*

*Российской академии наук, Пермь, Россия*

*Пермский государственный национальный исследовательский университет,*

*Пермь, Россия*

*alabuzhev@mail.ru*

**Аннотация.** Предлагается модель учета неоднородности поверхности подложки при движении по ней линии контакта трех сред на примере собственных и вынужденных колебаний газового пузырька в несжимаемой жидкости конечного объема с внешней свободной поверхностью, расположенного между двумя пространственно-неоднородными параллельными подложками. Показано, что частота радиальных колебаний пузырька определяется давлением газа и радиусом внешней поверхности жидкости. Неоднородность изменяет эффективный параметр смачивания и приводит к возбуждению азимутальных мод в однородном пульсационном поле давления.

**Ключевые слова:** газовый пузырек, собственные колебания, вынужденные колебания, движение линии контакта, неоднородная поверхность

**Благодарности:** Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-00379).

**Для цитирования:** Алабужев А.А. Динамика цилиндрического пузырька с учетом движения линии контакта по неоднородной поверхности подложки // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 97. С. 51–65. doi: 10.17223/19988621/97/4

## Dynamics of a cylindrical bubble with account for the contact line motion along a heterogeneous surface

Aleksey A. Alabuzhev

*Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch  
of the Russian Academy of Sciences, Perm, Russian Federation  
Perm State University, Perm, Russian Federation  
alabuzhev@mail.ru*

**Abstract.** The free and forced oscillations of a cylindrical gas bubble clamped between two rigid parallel plates and surrounded by a finite volume of incompressible liquid with a free surface in a homogeneous pulsating pressure field are considered. A model is proposed for describing the substrate surface heterogeneity through the wetting parameter (the Hocking parameter), which is defined as the proportionality coefficient between the contact line velocity and the contact angle deviation. Since only small-amplitude oscillations are considered, the surface heterogeneity is significant only in the vicinity of the contact line. Therefore, it is treated as a function of a single variable. Azimuthal oscillations arise due to the contact line motion along the heterogeneous surface. It is shown that the frequency of the radial oscillations of the bubble is governed by the gas pressure and the radius of the liquid's outer surface. The specific type of surface inhomogeneity modifies the Hocking parameter by reducing its value, although the qualitative dependence of the frequencies and damping decrements on this parameter remains unchanged. The frequency of the volume oscillations depends on the gas pressure inside the bubble, which may coincide with the frequency of the bubble's shape oscillations. At the intersection points, damping decrements exhibit local extrema. It is shown that external excitation induces only axisymmetric oscillations; however, surface inhomogeneity also gives rise to azimuthal modes, whose spectrum is determined by the nature of the inhomogeneity.

**Keywords:** gas bubble, free oscillations, forced oscillations, contact line dynamics, heterogeneous surface

**Acknowledgments:** This work was financial supported by the Russian Science Foundation (project No. 24-21-00379).

**For citation:** Alabuzhev A.A. (2025) Dynamics of a cylindrical bubble with account for the contact line motion along a heterogeneous surface. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 97. pp. 51–65. doi: 10.17223/19988621/97/4

### Введение

В задачах, посвященных управлению движением капель или пузырьков, существенную роль играют движение линии контакта трех сред и изменение краевого угла [1–3]. Это важная область движения многофазных сред, которые встречаются в природе и промышленных приложениях. К ним относятся движение линии контакта двухслойной системы по твердой стенке [4] или при растекании жидкости по твердой поверхности [5, 6], движение ручейков (ривулетов) [7, 8], капель и

пузырьков по твердой подложке [9, 10], удар капли о твердую поверхность (или твердого тела о поверхность жидкости) и последующее разбрызгивание [11–13], нанесение пленочных покрытий [14], приложения микрофлюидики [15], пузырьковое кипение [16] и пр. В таких системах течение либо частично, либо полностью обуславливается движением линии контакта, что приводит к различным режимам течения жидкости [9, 10, 17, 18]. Богатая физика, управляющая статикой и динамикой контактных линий, однако, является предметом давних дебатов, которые обусловлены в том числе проблемами, создаваемыми сингулярностью поверхностного натяжения. На практике часто возникают сложности, такие как термокапиллярные явления, наличие поверхностно-активных веществ, фазовые переходы, сложная геометрия и эффекты неоднородностей подложки. Если в предложенном ряде моделей для описания движения линии контакта трех сред [1–3, 19] для поступательного движения контактной линии и статического краевого угла определенное согласие достигнуто, то для возвратно-поступательного или быстро осциллирующего движения и динамического контактного угла полное описание далеко от завершения. Линейная зависимость скорости движения контактной линии от отклонения краевого угла была предложена в [4] на основе экспериментальных данных [17]. Коэффициент пропорциональности  $\Lambda^*$  является эффективным параметром (разнообразные сложные процессы, происходящие в непосредственной близости от линии контакта, из рассмотрения исключаются) и характеризует степень взаимодействия контактной линии с твердой поверхностью. Это эффективное граничное условие (условие Хокинга, или модель Хокинга–Девиса [7]) для отклонения поверхности раздела вдоль твердой поверхности от равновесного положения  $\zeta^*$  и отклонению краевого угла  $\mathbf{k} \cdot \nabla \zeta^*$  (вектор нормали к твердой поверхности  $\mathbf{k}$ ) можно представить, например, в виде:

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial t} = \Lambda^* \mathbf{k} \cdot \nabla \zeta^*. \quad (1)$$

При произвольном значении параметра  $\Lambda^*$  оно описывает затухание свободных колебаний, которое обусловлено взаимодействием движущейся линии контакта с поверхностью твердой подложки. Граничное условие (1) описывает предельные бездиссипативные состояния системы: неподвижную линию контакта  $\partial \zeta^* / \partial t = 0$  [20] и постоянное значение краевого угла  $\mathbf{k} \cdot \nabla \zeta^* = 0$  [21].

Модель Хокинга–Девиса (1) и ее различные модификации применялись в большом количестве работ (см., напр.: [4, 7, 22–26]), в большинстве которых  $\Lambda^*$  – действительный постоянный параметр. В работе [27] предложена модель электросмачивания в переменном электрическом поле. Если же параметр  $\Lambda^*$  – комплексное число, то движение контактной линии не обязательно происходит в одной фазе с краевым углом [28]. Параметр  $\Lambda^*$  в [29] рассматривался как действительная функция координат для описания неоднородности поверхности подложки, по которой двигалась контактная линия.

Метод измерения коэффициента подвижности (обратного параметра Хокинга) для полусферической капли на подложке при анализе экспериментальных результатов был предложен в [30–33], включая сравнение с теоретическими результатами [9, 10], которые учитывали гистерезис краевого угла [34]. Было показано, что условие Хокинга с учетом гистерезиса краевого угла [34] является наиболее

подходящим подходом для нескольких поверхностей с различными свойствами смачивания. Авторы [32, 33] подчеркивают, что коэффициент подвижности действительно является параметром, подобным материалу, и экспериментально измерили несколько значений параметра подвижности для различных материалов подложки. Таким образом, несмотря на значительный прогресс в использовании условия Хокинга, до сих пор невозможно получить аналитическую формулу для описания параметра Хокинга, который является феноменологическим параметром. Кроме того, как в теории, так и в эксперименте поверхность подложки считается однородной с точки зрения шероховатости и структуры материала, и исследование проводится только для капли жидкости на подложке.

В данной работе впервые рассматривается поведение цилиндрического пузырька, зажатого между двумя параллельными пластинами с одинаковыми неоднородными поверхностями, под действием вибраций. Случай однородных поверхностей рассматривался в работах [26, 35].

### Постановка задачи

Постановка задачи схожа с подобными задачами [26, 29, 35]. Несжимаемая жидкость (плотность  $\rho_l^*$  и вязкость  $\nu_l^*$ ) и невесомый газ заполняют сосуд цилиндрической формы высотой  $h^*$  и радиусом  $R_v^*$  (ис. 1). Контактная линия внешней недеформируемой поверхности жидкости – торец (крышка или дно) сосуда – движется свободно. В равновесном состоянии объем жидкости имеет форму круглого цилиндра радиусом  $R_0^*$  и внешняя поверхность жидкости недеформируемая. Размеры сосуда велики так, что боковая стенка сосуда достаточно далека от жидкости ( $R_0^* \ll R_v^*$ ).

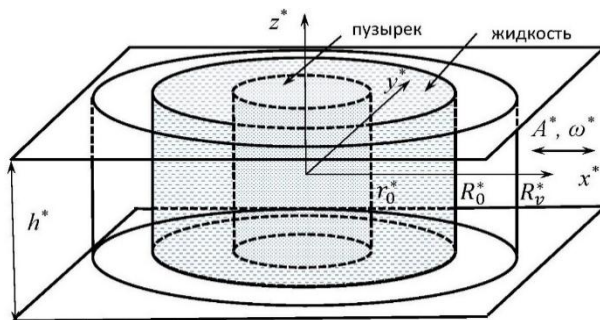


Рис. 1. Геометрия задачи

Fig. 1. Problem geometry

Влияние гравитации не учитывается, т.е. полученные результаты будут справедливы либо для условия невесомости, либо для малого числа Бонда (Этвеша):  $Bo = g^* r_0^{*2} \rho_l^* \sigma^{*-1} \ll 1$ . Последнее условие ограничивает размеры пузырька. Например, для пузырька воздуха в воде при земных условиях  $r_0^* \ll 3 \cdot 10^{-3}$  м, что вполне укладывается в приведенные выше оценки для несжимаемой невязкой жидкости.

В жидкость помещен газовый пузырек, который в равновесном состоянии имеет форму круглого цилиндра радиусом  $r_0^*$  и высотой  $h^*$  с давлением газа  $P_0^*$  и

показателем политропного процесса  $n_p$ . На деформируемой боковой поверхности пузырька (поверхность раздела газ–жидкость) учитывается сила поверхностного натяжения с коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma^*$ . Движение линии контакта трех сред (газ в пузырьке – жидкость – торец сосуда) определяется условием Хокинга (1). Диссипативное движение линии контакта позволяет рассматривать течение невязкой жидкости как потенциальное при наличии деформируемой поверхности раздела, согласно теореме Кельвина о циркуляции [36].

Равновесный прямой краевой угол представляет собой оправданное приближение, т.к. это позволяет не только упростить решение задачи, но и сохранить все возможные эффекты, наблюдаемые для реального пузырька. Отметим, что в работе [37] проводилось сравнение поведения капли, представляющей собой фигуру вращения (т.е. равновесный краевой угол отличен от прямого), с цилиндрической каплей. Например, было показано, что наибольшие значения частот собственных колебаний достигаются при прямом краевом угле, т.е. отличия только количественные.

На систему действует однородное пульсационное поле давления с характерной амплитудой  $A^*$  и частотой  $\omega^*$ . Будем рассматривать малоамплитудные колебания, т.е.  $A^* \ll r_0^*$ . Диапазон частот пульсаций ограничен приближениями несжимаемости (максимальные значения частот)  $\omega^* r_0^* \ll c^*$  ( $c^*$  – скорость звука) и невязкости (минимальные частоты) жидкости [36]: толщина вязкого пограничного слоя  $l^* = \sqrt{\nu_l^* / \omega^*} \ll r_0^*$ . Для пузырька воздуха  $r_0^* = 10^{-2}$  м в воде ( $c_l^* = 1,5 \cdot 10^3$  м/с,  $\nu_l^* \approx 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с,  $\sigma^* = 7 \cdot 10^{-2}$  Н/м) диапазон частот  $0,1 \ll \omega^* \ll 10^5$  рад/с. Для капиллярных волн  $\omega^* = \omega \sqrt{\sigma^* / (\rho_l^* r_0^{*3})}$  на поверхности раздела, безразмерная частота  $\omega = 1$  соответствует размерной частоте  $\omega^* = 8,5$  рад/с, диапазон безразмерных частот  $10^{-2} \ll \omega \ll 10^4$ . Для пузырька радиуса  $r_0^* = 10^{-3}$  м:  $\omega = 1 - \omega^* = 2,7 \cdot 10^2$  рад/с, безразмерное равновесное давление газа  $P_0 = 2n_p P_g^* r_0^* / \sigma^* = 2,9 \cdot 10^4$  при  $P_g^* = 10^5$  Па и  $n = 1$ . При  $r_0^* = 10^{-3}$  м:  $\omega = 1$  соответствует  $\omega^* = 2,7 \cdot 10^2$  Гц и  $P_0 = 2,9 \cdot 10^3 - P_g^* = 10^5$  Па. С увеличением частоты толщина вязкого пограничного слоя уменьшается. Следовательно, приближение идеальной окружающей жидкости выполняются в диапазоне частот пульсаций  $\omega^* = 1 \div 10^3$  Гц для пузырька размером 0,1–1 см.

В цилиндрической системе координат  $(r^*, \alpha^*, z^*)$ , поверхность пузырька описывается уравнением  $F^* = r^* - r_0^* - \zeta^*(\alpha, z^*, t^*) = 0$ , где  $\zeta^*(\alpha, z^*, t^*)$  – динамическое отклонение деформируемой поверхности раздела. Запишем линеаризованные уравнения и граничные условия в безразмерном виде (размерность радиальной координаты  $[r^*] = r_0^*$ , осевой координаты  $[z^*] = h^*$ , отклонения поверхности  $[\zeta^*] = A^*$ , времени  $[t^*] = \sqrt{\rho_l^* r_0^{*3} / \sigma^*}$ , скорости  $v^* = A^* \sqrt{\sigma^* / (\rho_l^* r_0^{*3})}$ , давления  $p^* = A^* \sigma^* / r_0^{*2}$ ,  $\varepsilon = A^* / r_0^*$ ,  $b = r_0^* / h^*$ ,  $R = R_0^* / r_0^*$ ,  $\lambda = \Lambda^* / \sqrt{\rho_l^* r_0^* / \sigma^*}$ ,  $\omega = \omega^* \sqrt{\rho_l^* r_0^{*3} / \sigma^*}$ ,  $P_0 = 2n_p P_g^* r_0^* / \sigma^*$ ):

$$p_l = -\left(\frac{\partial \varphi_e}{\partial t} - \omega^2 e^{i\omega t}\right), \Delta \varphi_l = 0, p_g = -P_0 \langle \zeta \rangle, \langle \zeta \rangle = (2\pi)^{-1} \int_S \zeta dS, \quad (2)$$

$$r = 1: p_l - p_g = \zeta + b^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}, \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_e}{\partial r}, \quad (3)$$

$$z = \pm \frac{1}{2}: \frac{\partial \varphi_e}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

$$r = 1, z = \pm \frac{1}{2}: \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \mp \lambda(\alpha) b \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \quad (5)$$

$$r = R_0: \varphi_l = 0, \quad (6)$$

где  $p_l$  и  $\varphi_l$  – давление и потенциал скорости жидкости,  $p_g$  – давление газа в пузырьке,  $S = S(z)$  – площадь поверхности раздела,  $\lambda(\alpha)$  – параметр смачивания, характеризующий неоднородность поверхностей твердых пластин. Предельный случай высокого давления,  $P_0 \rightarrow \infty$ , преобразует задачу (2)–(6) в задачу о колебаниях несжимаемого пузырька в жидкости, т.е. в задачу о колебаниях капли жидкости [25, 29]. В противоположном предельном случае малого давления,  $P_0 \rightarrow 0$ , можно ожидать, что пузырек схлопнется. В данной работе не рассматривается случай кавитации и предполагается, что всегда  $P_0 > 0$ .

### Собственные колебания

Рассмотрим сначала собственные колебания пузырька. Исследуем влияние частного случая неоднородности поверхности пластин, описываемой функцией  $\lambda(r, \alpha) = \lambda_0 |\sin(kr)| = \lambda_0 |\sin(kr \cos(\alpha))|$ , где  $k$  – волновое число неоднородности поверхности. Данная функция в главном порядке разложения по малому параметру  $\varepsilon$  (т.е. вблизи линии контакта) примет вид:  $\lambda(\alpha) = \lambda_0 |\sin(k \cos(\alpha))|$ . Это позволит изучить основные эффекты, вызванные неоднородностью, и продемонстрировать метод решения задач подобного вида.

Краевая задача (2)–(6) решается методом разделения переменных, решения представляются в виде рядов Фурье. Разложение ведется по базисным функциям оператора Лапласа (2) в цилиндрической системе координат. Внешняя сила в интеграле Коши–Лагранжа (2) не зависит от полярного угла  $\alpha$ , поэтому разложение этого слагаемого должно содержать только осесимметричную моду – пульсирующее однородное поле давления возбуждает только такие колебания. Неотрицательная функция  $\lambda(\alpha)$  (5) раскладывается в два независимых друг от друга ряда Фурье по гармоникам  $\cos(2m\alpha)$  и  $\cos((2m+1)\alpha)$ , где  $m$  – целое азимутальное волновое число. Следовательно, разложение  $\lambda(\alpha) \partial \zeta / \partial z$  (5) будет содержать члены ряда с  $\cos(2m\alpha)$ . Другими словами, только четные азимутальные моды содержатся в спектре вынужденных колебаний из-за наличия неоднородности поверхности подложки. В итоге сила взаимодействия между линией контакта и подложки и, следовательно, скорость будут варьировать в различных точках неоднородной

поверхности подложки. Собственные колебания для случая однородных поверхностей были исследованы в работах [26, 35].

Решения краевой задачи (2)–(6) представим в следующем виде:

$$\varphi_l(r, \alpha, z, t) = \operatorname{Re} \left( i\Omega \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (a_{mn} A_{mn}(r) + b_{mn} B_{mn}(r)) \cos(2n\pi z) e^{2im\alpha} e^{i\Omega t} \right), \quad (7)$$

$$\zeta(\alpha, z, t) = \operatorname{Re} \left( \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn} \cos(2n\pi z) + d_m D_m(z) \right) e^{2im\alpha} e^{i\Omega t} \right), \quad (8)$$

$$A_{00}(r) = \ln(R_0) - \ln(r), \quad B_{00}(r) = 0, \quad A_{m0}(r) = r^{2m}, \quad B_{m0}(r) = \frac{1}{r^{2m}},$$

$$A_{mn}(r) = I_{2m}(2\pi n b r), \quad B_{mn}(r) = K_{2m}(2\pi n b r), \quad D_0(z) = \cos\left(\frac{z}{b}\right),$$

$$D_m(z) = \operatorname{ch} \left( \frac{\sqrt{4m^2 - 1}}{b} z \right),$$

где  $a_{mn}$ ,  $b_{mn}$ ,  $c_{mn}$  и  $d_m$  – неизвестные амплитуды,  $\Omega$  – частота собственных колебаний,  $I_m$  и  $K_m$  – модифицированные функции Бесселя.

После подстановки рядов (7)–(8) в (2)–(6) получим спектрально-амплитудную задачу, собственными числами которой являются комплексные  $\Omega$ :

$$i\Omega \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_{mn} + \delta_{nl} d_l D_l \left( \frac{1}{2} \right) \right) = F_{mn} \left( \delta_{n0} \frac{d_0}{b} \sin \left( \frac{1}{2b} \right) - \delta_{nl} \frac{\sqrt{4l^2 - 1}}{b} \operatorname{sh} \left( \frac{\sqrt{4l^2 - 1}}{2b} \right) \right), \quad (9)$$

$$a_{00} = -(c_{00} + d_0 C_{00}), \quad b_{m0} = -a_{m0} R_0^{2m}, \quad b_{mn} = -a_{mn} \frac{A_{mn}(R_0)}{B_{mn}(R_0)}, \quad a_{m0} = \frac{c_{m0} + d_m C_{m0}}{m(1 + R_0^{2m})},$$

$$a_{mn} = \frac{(c_{mn} + d_m C_{mn}) B_{mn}(R_0)}{A'_{mn}(1) B_{mn}(R_0) - B'_{mn}(1) A_{mn}(R_0)}, \quad c_{00} = \left( \frac{P_0}{\ln(R_0)} - \Omega^2 \right) \frac{d_0 C_{00}}{\Omega^2 - \Omega_{00}^2},$$

$$\Omega_{m0}^2 = 2m(4m^2 - 1), \quad c_{mn} = \frac{\Omega^2 d_m C_{mn}}{\Omega_{mn}^2 - \Omega^2}, \quad \Omega_{00}^2 = \frac{P_0 - 1}{\ln(R_0)},$$

$$\Omega_{mn}^2 = (4m^2 - 1 + (2\pi n b)^2) \frac{A'_{mn}(1) B_{mn}(R_0) - B'_{mn}(1) A_{mn}(R_0)}{B_{mn}(1) A_{mn}(R_0) - A_{mn}(1) B_{mn}(R_0)},$$

$$F_{mn} = \frac{1}{\|\cos(2m\alpha)\|^2} \int_0^{2\pi} \Lambda(\alpha) \cos(2n\alpha) \cos(2m\alpha) d\alpha,$$

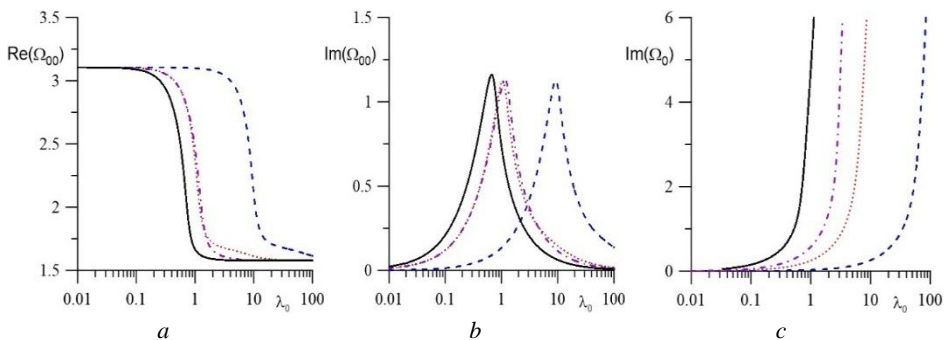
$$C_{mk} = \frac{1}{\|\cos(2\pi k z)\|^2} \int_{-1/2}^{1/2} D_m(z) \cos(2\pi k z) dz.$$

Объемные колебания цилиндрического газового пузырька возможны только при условии  $1 < R_0 < \infty$  (см.  $\Omega_{00}^{(2)}$ ) в отличие от колебаний сферического пузырька (или полусферического пузырька на подложке [10, 23]) в бесконечной жидкости. Для существования объемных колебаний нужно задать граничное условие (6) для потенциала скорости на некоторой цилиндрической поверхности. В задаче об

электрическом поле заряженного бесконечного цилиндра задается потенциал на эквипотенциальной поверхности вне цилиндра. Если электрический потенциал вдали от цилиндра равен нулю, то он будет постоянным во всем внешнем пространстве. Необходимо также указать дополнительное условие вдали от пузырька при изучении вынужденных колебаний газового пузырька на подложке для определения однородной части поля давления [23]. Этим условием было определение давления на свободной поверхности, т.е. задана толщина слоя жидкости на подложке, в отличие исследования собственных колебаний такого пузырька в бесконечной жидкости. Кроме того, задание свободной внешней поверхности удобно с точки зрения проведения эксперимента [23].

При конечных значениях параметра  $\lambda$  и давлении газа  $P_0 \approx 1$  частота объемных колебаний определяется как  $\Omega_{00} = i\lambda(P_0 - 1)\ln^{-1}(R_0)$ , т.е. слишком низкое давление газа в пузырьке приводит к монотонной неустойчивости пузырька, а не к коллапсу (асимметричному схлопыванию пузырька) [23]. Это соотношение определяет порог устойчивости по отношению к быстрому адиабатическому сжатию при  $P_0 < 2n_p$ .

Существуют колебательный (периодический) (рис. 2a, b) и монотонный (аперiodический, ненулевой является только мнимая часть корней уравнений (9)) режимы (рис. 2, c). Влияние неоднородности приводит к смещению всех зависимостей вправо, в сторону больших значений  $\lambda_0$ . Это связано с тем, что  $0 \leq |\sin(k \cos(\alpha))| \leq 1$ , т.е. всегда есть точки, в которых контактная линия зафиксирована, что сдвигает кривую декремента затухания (см. рис. 2, b) в сторону больших частот. При малых волновых числах  $k$  значения функции  $|\sin(k \cos(\alpha))| < 1$ , что также соответствует малоподвижной линии контакта и, следовательно, повышенным значениям частот. Азимутальные моды уже подробно исследовались в работах [25, 29] при изучении колебаний несжимаемой капли, поэтому основное внимание уделяется объемным колебаниям.

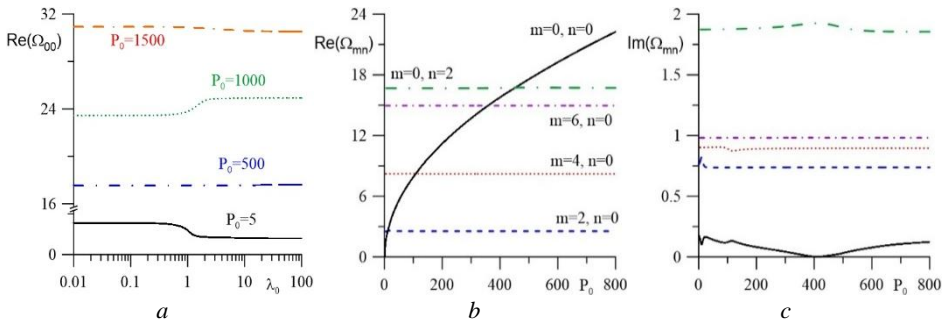


**Рис. 2.** Зависимость  $\text{Re}(\Omega)$  (a) и  $\text{Im}(\Omega)$  (b, c) объемной моды от  $\lambda_0$  для разных значений  $k$  при  $b = 1$ ,  $R_0 = 5$ ,  $P_0 = 5$ ;  $\lambda(\alpha) = \lambda_0$  – сплошная линия,  $k = 0.1$  – штриховая,  $k = 1$  – пунктирная,  $k = 10$  – штрих-пунктирная

**Fig. 2.** Dependence of (a)  $\text{Re}(\Omega)$  and (b, c)  $\text{Im}(\Omega)$  of the volume mode on the Hocking parameter  $\lambda_0$  for various  $k$  at  $b = 1$ ,  $R_0 = 5$ ,  $P_0 = 5$ ;  $\lambda(\alpha) = \lambda_0$  (solid line),  $k = 0.1$  (dashed line),  $k = 1$  (dotted line),  $k = 10$  (dash-dotted line)



Частота радиальных колебаний зависит от давления  $P_0$  в отличие от других гармоник (рис. 3; подробный анализ для однородных пластин см.: [26, 35]). Возможны случаи, когда частота монотонно увеличивается с ростом параметра  $\lambda_0$  (см. рис. 3, *a*). Частота  $\text{Re}(\Omega_{00})$  растет с увеличением давления газа  $P_0$  (см. рис. 3, *a*), т.е. частота объемных колебаний может быть равна частоте какой-либо гармоники (см. рис. 3, *b*). Для однородных пластин такое равенство возможно только с гармониками осесимметричной моды [26, 35]. При движении линии контакта по неоднородной поверхности пластины возбуждаются азимутальные моды. Это приводит равенству частоты объемных колебаний частоте одной из таких азимутальных мод (см. рис. 3, *b*). Кривые декрементов затухания не совпадают друг с другом (см. рис. 3, *c*). В точке пересечения, несмотря на равенство частот, радиальные колебания и колебания формы остаются различными режимами с разными декрементами затухания. В точке пересечения наблюдается локальный экстремум декремента затухания.



**Рис. 3.** Зависимость  $\text{Re}(\Omega)$  (*a*, *b*) и  $\text{Im}(\Omega)$  (*c*) первых гармоник от  $\lambda_0$  и  $P_0$  при  $b = 1$ ,  $R_0 = 5$ ,  $k = 1$ ,  $\lambda_0 = 10$  (*b*, *c*),  $m$  – азимутальное число,  $n$  – волновое число

**Fig. 3.** Dependence of the (*a*, *b*) frequency  $\text{Re}(\Omega)$  and (*c*) damping ratio  $\text{Im}(\Omega)$  of the first few harmonics on the Hocking parameter  $\lambda_0$  and gas pressure  $P_0$  at  $b = 1$ ,  $R_0 = 5$ ,  $k = 1$ ;  $\lambda_0 = 10$  (*b*, *c*);  $m$  is the azimuthal number and  $n$  is the wavenumber

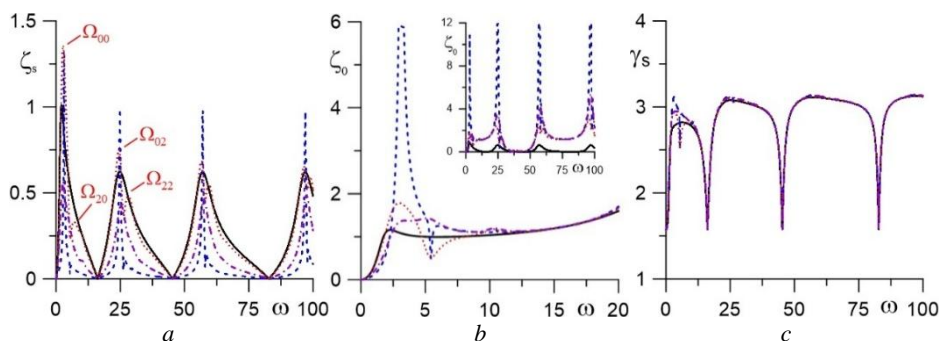
Частоты гармоник собственных колебаний пузырька растут с увеличением значений  $b$ , например, частоты капли с постоянным краевым углом  $\Omega_{mn}^{(0)2} \sim b^3$  при  $b \gg 1$ . Начиная с некоторых значений  $b$  основные частоты осесимметричной и азимутальных мод могут обращаться в нуль на некотором интервале значений  $\lambda_0$ . Ширина этого интервала растет с увеличением  $b$ . Декремент затухания на этом интервале имеет три значения, а границы интервала соответствуют точкам ветвления. Таким образом, на этом интервале значений  $\lambda_0$  существует только монотонный режим затухания, который связан с большим значением декремента затухания. Рассматриваемая неоднородность сдвигает границы интервала зануления частоты объемных колебаний. В работе [35] было показано, что для однородных пластин с различающимися параметрами Хокинга этот интервал может исчезать.

### Вынужденные колебания

Осесимметричные вынужденные колебания возбуждаются в осциллирующем поле давления [26, 35]. В [29] было показано, что неоднородная поверхность приводит к появлению азимутальных колебаний, спектр которых определяется этой

неоднородностью. Данные моды определяются слагаемыми в ряде Фурье и, как упоминалось выше, для функции  $\lambda(\alpha) = \lambda_0 |\sin(k \cos(\alpha))|$  будут сохраняться только четные слагаемые ряда. Решение задачи вынужденных колебаний аналогично (7), (8). Комплексные амплитуды приводят к появлению капиллярных волн, бегущих по поверхности раздела (боковой поверхности пузырька) [22–23, 38]. Невесомый газ в пузырьке не оказывает на эти волны никакого влияния [8]. Наличие затухания связано с условием движения на линии контакта и не зависит от вязкости [23, 29, 38].

Введем обозначения для амплитуд колебаний  $\zeta_s = \max(|\zeta|_{z=1/2})$ ,  $\zeta_0 = \max(|\zeta|_{z=0})$  и значения краевого угла  $\gamma_s$ . Наиболее заметны резонансные пики на частотах осесимметричной моды (рис. 4, а, 5, а): первый пик соответствует объемным колебаниям, второй – первой четной гармонике колебаний формы осесимметричной моды и т.д. Остальные пики соответствуют частотам азимутальных мод, возбуждение которых следует отнести за счет неоднородности поверхности. Они особенно ярко проявляются при достаточно большой подвижности контактной линии (см. рис. 4, а, 5, а). С дальнейшим увеличением параметра Хокинга  $\lambda_0$  и, следовательно, уменьшением взаимодействия линии контакта с подложкой дополнительные резонансные пики становятся менее заметными (рис. 5). Аналогично и для малых  $\lambda_0$ , которые соответствуют малоподвижной линии контакта: неоднородность в этом случае оказывает слабое влияние и дополнительных резонансных пиков нет.



**Рис. 4.** Амплитуды  $\zeta_s$  (а),  $\zeta_0$  (б) и  $\gamma_s$  (с) как функции  $\omega$  при  $b = 1$ ,  $R_0 = 5$ ,  $P_0 = 5$ ,  $\lambda_0 = 1$ ;  $\lambda(\alpha) = \lambda_0$  – сплошная линия,  $k = 0.1$  – штриховая,  $k = 1$  – пунктирная,  $k = 10$  – штрих-пунктирная

**Fig. 4.** (a) Amplitude on the solid surface  $\zeta_s$ , (b) amplitude in the middle of the layer  $\zeta_0$ , and (c) contact angle  $\gamma_s$  as the functions of frequency  $\omega$  at  $b = 1$ ,  $R_0 = 5$ ,  $P_0 = 5$ ,  $\lambda_0 = 1$ ;  $\lambda(\alpha) = \lambda_0$  (solid line),  $k = 0.1$  (dashed line),  $k = 1$  (dotted line), and  $k = 10$  (dash-dotted line)

Неоднородность поверхности приводит к изменению эффективного параметра Хокинга, как было показано в предыдущем разделе. Это приводит к сдвигу резонансных частот (рис. 4, б) аналогично изменению параметра Хокинга (см. рис. 5). Отметим, что даже при относительно больших значениях  $\lambda_0 = 10$  (т.е. линия контакта слабо взаимодействует с поверхностью подложки), краевой угол меняется (см. рис. 5, с). Амплитуда колебаний боковой поверхности в середине слоя максимальна при малых и больших значениях эффективного параметра  $\lambda$ , т.е. когда диссипация энергии мала.

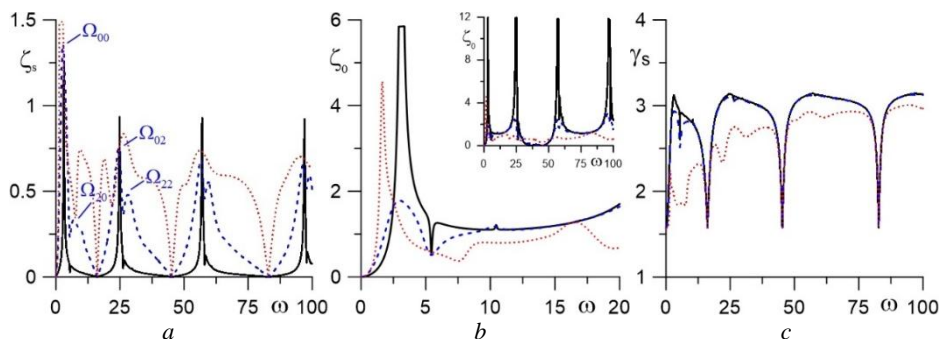


Рис. 5. Амплитуды  $\zeta_s$  (a),  $\zeta_0$  (b) и  $\gamma_s$  (c) как функции  $\omega$  при  $b = 1$ ,  $R_0 = 5$ ,  $P_0 = 5$ ,  $k = 1$ ;

$\lambda_0 = 0.1$  – сплошная линия,  $\lambda_0 = 1$  – штриховая,  $\lambda_0 = 10$  – пунктирная

Fig. 5. (a) Amplitude  $\zeta_s$ , (b) amplitude  $\zeta_0$ , and (c) contact angle  $\gamma_s$  as the functions of frequency  $\omega$  at  $b = 1$ ,  $R_0 = 5$ ,  $P_0 = 5$ ,  $k = 1$ ;  $\lambda_0 = 0.1$  (solid line),  $\lambda_0 = 1$  (dashed line), and  $\lambda_0 = 10$  (dotted line)

### Заключение

Волновое число неоднородности  $k$  изменяет эффективное взаимодействие контактной линии с поверхностью пластины, т.е. параметр Хокинга. Затухание свободных колебаний происходит из-за диссипации энергии, которая определяется эффективным параметром Хокинга. Обнуление частоты объемных колебаний существует для данной неоднородности в отличие от двух различающихся однородных пластин.

Установлено, что неоднородность поверхности пластины приводит к возбуждению азимутальных мод при пульсациях давления. Это справедливо для любых функций неоднородности  $\Lambda(\alpha)$ . Пульсации давления возбуждают только объемные колебания пузырька. Движение контактной линии приводит к возбуждению четных гармоник колебаний формы пузырька. Влияние неоднородности мало при малых значениях параметра Хокинга: линия контакта малоподвижна и свойства поверхности слабо влияют на ее движение. В случае больших значений этого параметра движущаяся контактная линия слабо взаимодействует с подложкой и неоднородность поверхности также не влияет. Если сила взаимодействия движущейся линии контакта с подложкой достаточно велика (при конечных значениях параметра смачивания), то неоднородность поверхности существенно влияет на движение контактной линии.

Полученные результаты можно использовать, например, для измерения интегрального параметра взаимодействия как параметра Хокинга примерно таким же образом [30–33] и при определении неоднородности поверхности.

Предложена теоретическая модель для описания движения линии контакта по неоднородности поверхности пластины. Исследовалось применение этой модели для изучения колебаний зажатого газового пузырька в однородном пульсационном поле давления. Показано, что из-за неоднородности в спектре вынужденных колебаний появляются азимутальные моды.

### Список источников

1. де Жен П.Ж. Смачивание: статика и динамика // Успехи физических наук. 1987. Т. 151, вып. 4. С. 619–681. doi: 0.3367/UFNr.0151.198704c.0619

2. *de Gennes G., Brochard-Wyart F., Quere D.* Capillarity and Wetting Phenomena: Drops, Bubbles, Pearls, Waves. New York: Springer, 2004. 292 p. doi: 10.1007/978-0-387-21656-0
3. *Zhang L., Thiessen D.B.* Capillary-wave scattering from an infinitesimal barrier and dissipation at dynamic contact lines // *J. Fluid Mech.* 2013. V. 719. P. 295–313. doi: 10.1017/jfm.2013.5
4. *Hocking L.M.* The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary // *J. Fluid Mech.* 1987. V. 179. P. 253–266. doi: 10.1017/S0022112087001514
5. *Пономарева М.А., Якутенок В.А.* Моделирование растекания капли вязкой жидкости в плоской постановке при больших числах Бонда // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2007. № 1. С. 79–83.
6. *Пономарева М.А., Шрагер Г.Р., Якутенок В.А.* Использование уравнения Дюпре–Юнга для решения задачи о растекании жидкости при ограниченном смачивании // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика.* 2008. № 1 (2). С. 90–96.
7. *Davis S.H.* Moving contact lines and rivulet instabilities. Part 1. The static rivulet // *J. Fluid Mech.* 1980. V. 98. P. 225–242. doi: 10.1017/S0022112080000110
8. *Актершев С.П., Алексеенко С.В., Цвелодуб О.Ю.* Теоретическое моделирование гидродинамики и теплопереноса в волновых пленках жидкости при сложных условиях течения (обзор) // *Теплофизика и аэромеханика.* 2022. № 1. С. 1–36. doi: 10.1134/S0869864322010012 (English version).
9. *Fayzrakhmanova I.S., Straube A.V.* Stick-slip dynamics of an oscillated sessile drop // *Phys. Fluids.* 2009. V. 21. Art. 072104. doi: 10.1063/1.3174446
10. *Fayzrakhmanova I.S., Straube A.V., Shklyayev S.* Bubble dynamics atop an oscillating substrate: Interplay of compressibility and contact angle hysteresis // *Phys. Fluids.* 2011. V. 23. Art. 102105. doi: 10.1063/1.3650280
11. *Korobkin A.A., Pukhnachov V.V.* Initial Stage of Water Impact // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1988. V. 20. P. 159–185. doi: 10.1146/annurev.fl.20.010188.001111
12. *Yarin A.L.* Drop impact dynamics: Splashing, Spreading, Receding, Bouncing... // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2006. V. 39. P. 159–192. doi: 10.1146/annurev.fluid.38.050304.092144
13. *Hicks P.D., Ermanyuk E.V., Gavrilov N.V., Purvis R.* Air trapping at impact of a rigid sphere onto a liquid // *J. Fluid Mech.* 2012. V. 695. P. 310–320. doi: 10.1017/jfm.2012.20
14. *Kumar S.* Liquid Transfer in Printing Processes: Liquid Bridges with Moving Contact Lines // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2015. V. 47. P. 67–94. doi: 10.1146/annurev-fluid-010814-014620
15. *Anna S.L.* Droplets and bubbles in microfluidic devices // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2016. V. 48. P. 285–309. doi: 10.1146/annurev-fluid-122414-034425
16. *Bureš L., Sato Y.* On the modelling of the transition between contact-line and microlayer evaporation regimes in nucleate boiling // *J. Fluid Mech.* 2021. V. 916. A53. doi: 10.1017/jfm.2021.204
17. *Dussan V.E.B.* On the spreading of liquids on solid surfaces: static and dynamic contact lines // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1979. V. 11. P. 371–400. doi: 10.1146/annurev.fl.11.010179.002103
18. *Ding H., Gilani M.N.H., Spelt P.D.M.* Sliding, pinch-off and detachment of a droplet on a wall in shear flow // *J. Fluid Mech.* 2010. V. 644. P. 217–244. doi: 10.1615/10.1017/S0022112009992217
19. *Воинов О.В.* Гидродинамика смачивания // *Известия АН СССР. Механика жидкости и газа.* 1976. № 5. С. 76–84. doi: 10.1007/BF01012963 (English version)
20. *Alabuzhev A.A.* Oscillations and parametric instability of a cylindrical drop of a low-viscous liquid // *Inter. J. Fluid Mech. Res.* 2019. V. 46, is. 5. P. 441–457. doi: 10.1615/InterJFluidMechRes.2019025743
21. *Алабужев А.А., Пьянкова М.А.* Параметрическая неустойчивость одиночной капли и ансамбля капель при круговых вибрациях // *Вестник Пермского университета. Физика.* 2022. № 3. С. 56–65. doi: 10.17072/1994-3598-2022-3-56-65
22. *Ting C.-L., Perlin M.* Boundary conditions in the vicinity of the contact line at a vertically oscillating upright plate: an experimental investigation // *J. Fluid Mech.* 1995. V. 295. P. 263–300. doi: 10.1017/S0022112095001960

23. Shklyaev S., Straube A.V. Linear oscillations of a hemispherical bubble on a solid substrate // *Phys. Fluids*. 2008. V. 20. Art. 052102. doi: 10.1063/1.2918728
24. Alabuzhev A.A., Kolupaev V.S. The effect of substrate surface on the dynamics of sessile drop under axisymmetric vibrations // *Interfac. Phenom. Heat Transfer*. 2021. V. 9, is. 1. P. 75–85. doi: 10.1615/INTERFACPHENOMHEATTRANSFER.2021035378
25. Алабужев А.А., Любимов Д.В. Влияние динамики контактной линии на собственные колебания цилиндрической капли // *Прикладная механика и техническая физика*. 2007. Т. 48, № 5. С. 78–86. doi: 10.1007/s10808-007-0088-6
26. Алабужев А.А. Поведение цилиндрического пузырька под действием вибраций // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2014. Т. 7, № 2. С. 151–161. doi: 10.7242/1999-6691/2014.7.2.16
27. Алабужев А.А., Кашина М.А. Влияние различия свойств поверхностей на осесимметричные колебания сжатой капли в переменном электрическом поле // *Известия вузов. Радиофизика*. 2018. Т. 61, № 8-9. С. 662–676. doi: 10.1007/s11141-019-09919-4 (English version).
28. Miles J.W. The capillary boundary layer for standing waves // *J. Fluid Mech*. 1991. V. 222. P. 197–205. doi: 10.1017/S0022112091001052
29. Pyankova M.A., Alabuzhev A.A. Influence of the properties of the plate surface on the oscillations of the cramped drop // *Phys. Fluids*. 2022. V. 34. Art. 092015. doi: 10.1063/5.0101011
30. Xia Y., Steen P.H. Moving contact–line mobility measured // *J. Fluid Mech*. 2018. V. 841. P. 767–783. doi: 10.1017/jfm.2018.105
31. Xia Y., Steen P.H. Dissipation of oscillatory contact lines using resonant mode scanning // *NPJ Microgravity*. 2020. V. 6 (3). doi: 10.1038/s41526-019-0093-0
32. Ludwicki J.M., Kern V.R., McCraney J. et al. Is contact-line mobility a material parameter? // *NPJ Microgravity*. 2022. V. 8 (6). doi: 10.1038/s41526-022-00190-y
33. McCraney J., Ludwicki J., Bostwick J., Daniel S., Steen P. Coalescence-induced droplet spreading: Experiments aboard the International Space Station // *Phys Fluids*. 2022. V. 34. Art. 122110. doi: 10.1063/5.0125279
34. Hocking L.M. Waves produced by a vertically oscillating plate // *J. Fluid Mech*. 1987. V. 179. P. 267–281. doi: 10.1017/S0022112087001526
35. Alabuzhev A.A. Influence of surface properties on axisymmetrical oscillations of a cylindrical bubble // *Interfac. Phenom. Heat Transfer*. 2019. V. 7, is. 3. P. 255–268. doi: 10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.2019031147
36. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
37. Алабужев А.А., Любимов Д.В. Влияние динамики контактной линии на колебания сжатой капли // *Прикладная механика и техническая физика*. 2012. Т. 53, № 1. С. 1–12. doi: 10.1134/S0021894412010026
38. Алабужев А.А. Осесимметричные колебания цилиндрической капли с подвижной контактной линией // *Прикладная механика и техническая физика*. 2016. Т. 57, № 6. С. 53–63. doi: 10.1134/S0021894416060079

## References

1. De Genn P.G. (1985) Wetting: Statics and dynamics. *Reviews of Modern Physics*. 57. pp. 827–863. doi: 10.1103/RevModPhys.57.827
2. De Gennes G., Brochard-Wyart F., Quere D. (2004) *Capillarity and Wetting Phenomena: Drops, Bubbles, Pearls, Waves*. New York: Springer. doi: 10.1007/978-0-387-21656-0
3. Zhang L., Thiessen D.B. (2013) Capillary-wave scattering from an infinitesimal barrier and dissipation at dynamic contact lines. *Journal of Fluid Mechanics*. 719. pp. 295–313. doi: 10.1017/jfm.2013.5
4. Hocking L.M. (1987) The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary. *Journal of Fluid Mechanics*. 179. pp. 253–266. doi: 10.1017/S0022112087001514

5. Ponomareva M.A., Yakutenok V.A. (2007) Modelirovanie rastekaniya kapli vyazkoy zhidkosti v ploskoy postanovke pri bol'shikh chislakh Bondy [Modelling of spreading of a two-dimensional viscous drop for large Bond number]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1. pp. 79–83.
6. Ponomareva M.A., Shrager G.R., Yakutenok V.A. (2008) Ispol'zovanie uravneniya Dyupre–Yunga dlya resheniya zadachi o rastekanii zhidkosti pri ogranichennom smachivanii [Applying of Young relation for solution of the fluid spreading problem at partial wetting]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 1(2). pp. 90–96.
7. Davis S.H. (1980) Moving contact lines and rivulet instabilities. Part 1. The static rivulet. *Journal of Fluid Mechanics*. 98. pp. 225–242. doi: 10.1017/S0022112080000110
8. Aktershev S.P., Alekseenko S.V., Tsveldub O.Y. (2022) Theoretical modeling of fluid dynamics and heat transfer in wavy liquid films under complex flow conditions (review). *Thermophysics and Aeromechanics*. 29. pp. 1–34. doi: 10.1134/S0869864322010012
9. Fayzrakhmanova I.S., Straube A.V. (2009) Stick-slip dynamics of an oscillated sessile drop. *Physics of Fluids*. 21(072104). doi: 10.1063/1.3174446
10. Fayzrakhmanova I.S., Straube A.V., Shklyaev S. (2011) Bubble dynamics atop an oscillating substrate: Interplay of compressibility and contact angle hysteresis. *Physics of Fluids*. 23(102105). doi: 10.1063/1.3650280
11. Korobkin A.A., Pukhnachov V.V. (1988) Initial stage of water impact. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 20. pp. 159–185. doi: 10.1146/annurev.fl.20.010188.001111
12. Yarin A.L. (2006) Drop impact dynamics: Splashing, spreading, receding, bouncing... *Annual Review of Fluid Mechanics*. 39. pp. 159–192. doi: 10.1146/annurev.fluid.38.050304.092144
13. Hicks P.D., Ermanyuk E.V., Gavrilov N.V., Purvis R. (2012) Air trapping at impact of a rigid sphere onto a liquid. *Journal of Fluid Mechanics*. 695. pp. 310–320. doi: 10.1017/jfm.2012.20
14. Kumar S. (2015) Liquid transfer in printing processes: liquid bridges with moving contact lines. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 47. pp. 67–94. doi: 10.1146/annurev-fluid-010814-014620
15. Anna S.L. (2016) Droplets and bubbles in microfluidic devices. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 48. pp. 285–309. doi: 10.1146/annurev-fluid-122414-034425
16. Bureš L., Sato Y. (2021) On the modelling of the transition between contact-line and micro-layer evaporation regimes in nucleate boiling. *Journal of Fluid Mechanics*. 916(A53). doi: 10.1017/jfm.2021.204
17. Dussan V.E.B. (1979) On the spreading of liquids on solid surfaces: static and dynamic contact lines. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 11. pp. 371–400. doi: 10.1146/annurev.fl.11.010179.002103
18. Ding H., Gilani M.N.H., Spelt P.D.M. (2010) Sliding, pinch-off and detachment of a droplet on a wall in shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 644. pp. 217–244. doi: 10.1615/10.1017/S0022112009992217
19. Voinov O.V. (1976) Hydrodynamics of wetting. *Fluid Dynamics*. 11(5). pp. 714–721. doi: 10.1007/BF01012963
20. Alabuzhev A.A. (2019) Oscillations and parametric instability of a cylindrical drop of a low-viscous liquid. *International Journal of Fluid Mechanics Research*. 46. pp. 441–457. doi: 10.1615/InterJFluidMechRes.2019025743
21. Alabuzhev A.A., Pyankova M.A. (2022) Parametric instability of a single drop and an ensemble of drops under circular vibrations. *Bulletin of Perm University. Physics*. 3. pp. 56–65. doi: 10.17072/1994-3598-2022-3-56-65
22. Ting C.-L., Perlin M. (1995) Boundary conditions in the vicinity of the contact line at a vertically oscillating upright plate: An experimental investigation. *Journal of Fluid Mechanics*. 295. pp. 263–300. doi: 10.1017/S0022112095001960
23. Shklyaev S., Straube A.V. (2008) Linear oscillations of a hemispherical bubble on a solid substrate. *Physics of Fluids*. 20. Article 052102. doi: 10.1063/1.2918728

24. Alabuzhev A.A., Kolupaev V.S. (2021) The effect of substrate surface on the dynamics of sessile drop under axisymmetric vibrations. *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*. 9(1). pp. 75–85. doi: 10.1615/INTERFACPHENOMHEATTRANSFER.2021035378
25. Alabuzhev A.A., Lyubimov D.V. (2007) Effect of the contact-line dynamics on the natural oscillations of a cylindrical droplet. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 48. pp. 686–693. doi: 10.1007/s10808-007-0088-6
26. Alabuzhev A.A. (2014) Behavior of a cylindrical bubble under vibrations. *Computational Continuum Mechanics*. 7(2). pp. 151–161. doi: 10.7242/1999-6691/2014.7.2.16
27. Alabuzhev A.A., Kashina M.A. (2019) Influence of surface properties on axisymmetric oscillations of an oblate drop in an alternating electric field. *Radiophysics and Quantum Electronics*. 61(8-9). pp. 589–602. doi: 10.1007/s11141-019-09919-4
28. Miles J.W. (1991) The capillary boundary layer for standing waves. *Journal of Fluid Mechanics*. 222. pp. 197–205. doi: 10.1017/S0022112091001052
29. Pyankova M.A., Alabuzhev A.A. (2022) Influence of the properties of the plate surface on the oscillations of the craped drop. *Physics of Fluids*. 34(092015). doi: 10.1063/5.0101011
30. Xia Y., Steen P.H. (2018) Moving contact–line mobility measured. *Journal of Fluid Mechanics*. 841. pp. 767–783. doi: 10.1017/jfm.2018.105
31. Xia Y., Steen P.H. (2020) Dissipation of oscillatory contact lines using resonant mode scanning. *Npj Microgravity*. 6(3). doi: 10.1038/s41526-019-0093-0
32. Ludwicki J.M., Kern V.R., McCraney J., Bostwick J.B., Daniel S., Steen P.H. (2022) Is contact-line mobility a material parameter? *Npj Microgravity*. 8(6). doi: 10.1038/s41526-022-00190-y
33. McCraney J., Ludwicki J., Bostwick J., Daniel S., Steen P. (2022) Coalescence-induced droplet spreading: Experiments aboard the International Space Station. *Physics of Fluids*. 34(122110). doi: 10.1063/5.0125279
34. Hocking L.M. (1987) Waves produced by a vertically oscillating plate. *Journal of Fluid Mechanics*. 179. pp. 267–281. doi: 10.1017/S0022112087001526
35. Alabuzhev A.A. (2019) Influence of surface properties on axisymmetrical oscillations of a cylindrical bubble. *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*. 7(3). pp. 255–268. doi: 10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.2019031147
36. Loitsyanskiy L.G. (1995) *Mechanics of Liquids and Gases*. New York: Begell House Inc.
37. Alabuzhev A.A., Lyubimov D.V. (2012) Effect of the contact-line dynamics on the oscillations of a compressed droplet. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 53. pp. 9–19. doi: 10.1134/S0021894412010026
38. Alabuzhev A.A. (2016) Axisymmetric oscillations of a cylindrical droplet with a moving contact line. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 57(6). pp. 1006–1015. doi: 10.1134/S0021894416060079

#### **Сведения об авторе:**

**Алабужев Алексей Анатольевич** – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник лаборатории вычислительной гидродинамики Института механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук (Пермь, Россия); профессор кафедры теоретической физики Пермского государственного национального исследовательского университета (Пермь, Россия). E-mail: alabuzhev@mail.ru

#### **Information about the author:**

**Alabuzhev Aleksey A.** (Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Perm, Russian Federation; Professor, Department of Theoretical Physics, Perm State University, Perm, Russian Federation). E-mail: alabuzhev@mail.ru

*Статья поступила в редакцию 01.10.2024; принята к публикации 06.09.2025*

*The article was submitted 01.10.2024; accepted for publication 06.09.2025*