

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/97/8

Решение краевых стационарно-динамических задач теории упругости для трансверсально-изотропного тела вращения

Дмитрий Алексеевич Иwanyчев

*Липецкий государственный технический университет, Липецк, Россия
Lsivdmal@mail.ru*

Аннотация. Представлен метод определения упругого состояния конечного трансверсально-изотропного тела вращения в условиях стационарной динамической задачи, когда на поверхность тела наложены кинематические условия, гармонические во времени. Метод решения заключается в разложении искомого упругого состояния в ряд Фурье по элементам ортонормированного базиса пространства граничных состояний. В качестве базисных элементов выступают частные решения пространственной осесимметричной задачи теории упругости для трансверсально-изотропного тела. Приведено решение второй основной задачи для кругового трансверсально-изотропного цилиндра.

Ключевые слова: метод граничных состояний, стационарно-изотропные задачи, вторая основная задача, трансверсально-изотропное тело, осесимметричная деформация

Для цитирования: Иwanyчев Д.А. Решение краевых стационарно-динамических задач теории упругости для трансверсально-изотропного тела вращения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 97. С. 116–129. doi: 10.17223/19988621/97/8

Original article

Solution of the boundary stationary-dynamic problems of the elasticity theory for a transversely isotropic body of revolution

Dmitriy A. Ivanychev

*Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russian Federation
Lsivdmal@mail.ru*

Abstract. This paper presents a mathematical model for constructing elastic fields for transversely isotropic bodies of revolution under the conditions of the inverse problem

of elasticity, where the displacements prescribed on the body surface vary over time according to a cyclic law. An axisymmetric disturbance propagates at a constant velocity along one of the elastic symmetry axes of the material. The boundary state method is used to solve the problem. Using the method of integral superposition, a relationship is established between the spatial stress-strain state of the transversely isotropic elastic body and certain auxiliary two-dimensional states. The auxiliary states are constructed based on the general solution of the plane stationary dynamic problem. A set of such plane auxiliary states is generated, and a corresponding set of spatial states is obtained by applying the transformation formulas. This set forms a finite-dimensional basis of the internal states with the desired solution expanded after orthogonalization into a Fourier series with the same coefficients.

The solution of the inverse dynamic problem of elasticity is presented for a transversely isotropic circular cylinder with the kinematic boundary conditions varying according to the cosine law.

Keywords: method of boundary states, stationary isotropic problems, inverse problem of elasticity, transversely isotropic body, axisymmetric deformation

For citation: Ivanychev, D.A. (2025) Solution of the boundary stationary-dynamic problems of the elasticity theory for a transversely isotropic body of revolution. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 97. pp. 116–129. doi: 10.17223/19988621/97/8

Введение

Колбательные процессы в механике физических процессов встречаются довольно часто. Если возмущение распространяется с постоянной скоростью, то речь идет о динамических задачах стационарного типа. Учет инерционных составляющих в задаче по определению напряженно-деформированного состояния тела, находящегося под действием данных возмущений, усложняет ее решение, а если тело еще является и анизотропным, то важность иметь математическую модель построения упругих полей в стационарно-динамической задаче очевидна.

Решению задач динамики для изотропных и анизотропных сред посвящено множество работ. Например, в работе [1] исследуются краевые динамические задачи для трансверсально-изотропного упругого сферического слоя. С помощью вариационного принципа Гамильтона получены асимптотические разложения, позволяющие получить напряженно-деформированное состояние при различных значениях частоты возмущающей нагрузки. В работе [2] в рамках модели Тимошенко решена стационарно-динамическая задача для кольцеобразной плоской области. С помощью системы компьютерной алгебры определены частоты и формы собственных колебаний пластины при различных способах ее закрепления. В работе [3] с помощью численных преобразований получены граничные интегральные уравнения для решения различных краевых задач теории упругости для изотропных тел. В работе [4] рассмотрен вопрос применения трех упругих потенциалов для решения пространственных динамических задач для упругого полупространства. Интегральное преобразование Радона позволило перейти к плоской задаче в образах. В работе на основе этого решения исследовались волны Рэлея. Работа [5] посвящена построению квадратур для решения динамических задач теории упругости со смешанными поверхностными условиями для ограниченных сред из линейно-однородного анизотропного материала.

Разнообразие методов решения задач динамики иллюстрируют следующие работы. В [6] обсуждалась возможность решения динамических задач теории упругости в конечно-элементных технологиях. В работе сравнивались три типа вариационных постановок: принцип Гамильтона, принцип Лагранжа и принцип возможных перемещений. Полученные уравнения в матричном виде описывают волновое движение конечно-элементной сетки и могут применяться при решении различных задач о распространении волны. В работе [7] показана численная реализация разностной схемы решения плоских динамических задач для областей сложной формы. В работе [8] представлен численно-аналитический метод решения нестационарно-динамических контактных задач об ударе. Для решения двумерных интегральных уравнений использовался метод последовательных приближений. В работе [9] решение задачи о движущейся нагрузке, приложенной к телам вращения, проводилось методом граничных интегральных уравнений. Рассмотрена плоская динамическая задача для сферической оболочки, нагруженной двумя подвижными сосредоточенными силами. В работе [10] исследовалась динамическая контактная задача с двумя деформируемыми штампами, лежащими на деформируемом основании. Исследование опирается на метод блочного элемента, позволяющего строить точные решения граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных.

1. Постановка задачи

Исследуется осесимметричная динамическая деформация конечного тела вращения из трансверсально-изотропного материала, ось анизотропии которого совпадает с осью вращения тела (рис. 1).

В стационарной динамической задаче компоненты упругого поля (перемещения, деформации и напряжения) зависят от координат r , z и времени t . Заданными являются перемещения точек границы $\mathbf{u} = \{u, w\}$, возмущения в которых распространяются с постоянной скоростью c вдоль координаты z . Вводя подвижную координату $z_0 = z - ct$, можно исключить параметр t из определяющих уравнений, и компоненты упругого поля будут зависеть только от двух переменных r и z_0 .

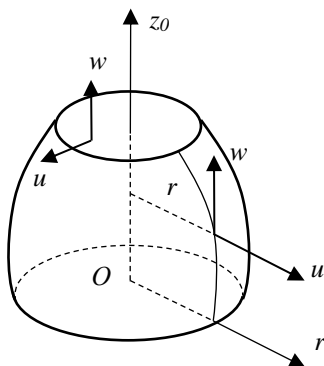


Рис. 1. Анизотропное тело вращения
Fig. 1. Anisotropic solid of revolution

Задача состоит в отыскании переменного во времени напряженно-деформированного состояния.

2. Определяющие соотношения

В цилиндрической системе координат r, z_0 в случае осевой симметрии между неравными нулю перемещениями u, w , деформациями $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_{z_0}, \gamma_{z_0r}$, напряжениями $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{z_0}, \tau_{z_0r}$, а также между техническими $E_{z_0}, E_r, \nu_{z_0}, \nu_r, G_r, G_{z_0}$ константами материала тела имеют место следующие зависимости.

Уравнения равновесия (объемные силы отсутствуют) [11]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{z_0r}}{\partial z_0} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \tau_{z_0\theta}}{\partial z_0} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Соотношения Коши [11]:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z_0}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}; \quad \gamma_{z_0r} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z_0}; \quad u = -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi z_0}{2}\right); \quad \gamma_{z_0\theta} = 0. \quad (2)$$

Уравнения совместности деформаций [12]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} &= 0; \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial z_0} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial z_0} &= 0; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial z_0^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial \varepsilon_{z_0r}}{\partial z_0} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial z_0^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{z_0}}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{z_0r}}{\partial r \partial z_0} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Обобщенный закон Гука [11]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E_r} \left[(\sigma_r - \nu_r \sigma_\theta) - \frac{\nu_{z_0}}{E_{z_0}} \sigma_{z_0} \right]; \\ \varepsilon_{z_0} &= \frac{1}{E_{z_0}} \left[\sigma_{z_0} - \nu_{z_0} (\sigma_r + \sigma_\theta) \right]; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E_r} (\sigma_\theta - \nu_r \sigma_r) - \frac{\nu_{z_0}}{E_{z_0}} \sigma_{z_0}; \quad \gamma_{z_0r} = \frac{1}{G_z} \tau_{z_0r}. \end{aligned} \quad (4)$$

Дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях [11]:

$$\begin{aligned} (A_{33} - \rho c^2) \frac{\partial^2 w}{\partial z_0^2} + A_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + (A_{13} + A_{44}) \frac{\partial^2 u}{\partial z_0 \partial r} &= 0; \\ (A_{13} + A_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial z_0 \partial r} + (A_{44} - \rho c^2) \frac{\partial^2 u}{\partial z_0^2} + A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где ρ – плотность материала; c – скорость распространения волны.

3. Общее решение задачи

В работе [11] представлено общее решение пространственной краевой задачи статики в виде квадратур, ядра которых представляют собой некоторые плоские вспомогательные состояния $\mathbf{u}^{pl} = \{u_y^{pl}, u_{z_0}^{pl}\}$. Компоненты вектора перемещения этого решения имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{z_0} &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{\sigma_{z_0}^{pl}}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad \sigma_{z_0 r} = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{\sigma_{z_0 y}^{pl}}{r \sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad \sigma_{z_0 \theta} = \sigma_{r \theta} = 0; \\ \sigma_r - \sigma_\theta &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{(\sigma_y^{pl} - \sigma_\eta^{pl})(2y^2 - r^2)}{r^2 \sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad \sigma_r + \sigma_\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{(\sigma_y^{pl} + \sigma_\eta^{pl})}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy; \\ u &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{u_y^{pl}}{r \sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad w = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{u_{z_0}^{pl}}{r \sqrt{r^2 - y^2}} dy; \quad v = 0.\end{aligned}\quad (6)$$

Общее решение плоской стационарной динамической задачи как основа для перехода к пространственному состоянию имеет вид [11]:

$$\begin{aligned}u_{z_0}^{pl} &= \text{Re}[p_1^0 \varphi_1(\zeta_1) + p_2^0 \varphi_2(\zeta_2)]; \quad u_y^{pl} = \text{Re}[iq_1^0 \varphi_1(\zeta_1) + iq_2^0 \varphi_2(\zeta_2)]; \\ p_j^0 &= p_j - g\gamma_j; \quad q_j^0 = q_j - g\gamma_j; \quad g = \rho \Delta c^2 / (2G_r E_{z_0}); \quad \Delta = 1 - \nu_r - 2\nu_{z_0}^2 \frac{E_r}{E_{z_0}},\end{aligned}\quad (7)$$

где q_j и p_j – комплексные константы (определены упругими параметрами материала), $\zeta_j = z_0 / \gamma_j + iy$, γ_j – комплексные корни векового уравнения [11], функции $\varphi_j(\zeta_j)$ – комплексные функции переменной ζ_j .

4. Метод решения задачи

Совокупность компонент вектора перемещения, компонент тензора деформаций и тензора напряжений определяет допустимое упругое внутренне состояния среды $\xi_k = \{u_i^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)}, \sigma_{ij}^{(k)}\}$. Совокупность таких состояний можно организовать в базис конечномерного пространства внутренних состояний [13]:

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k, \dots\}.$$

Базисные элементы пространства Ξ можно организовать, если придать функциям $\varphi_j(\zeta_j)$ в (7) последовательно следующие значения:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(\zeta_1) \\ \varphi_2(\zeta_2) \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} \zeta_1^n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta_2^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i\zeta_1^n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i\zeta_2^n \end{pmatrix}, \dots \right\}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Тем самым построить набор плоских вспомогательных упругих состояний, которые могут быть использованы в интегральных операторах (6) для построения уже множества пространственных состояний для трансверсально-изотропной среды. Это множество и определит базис пространства Ξ .

Внутреннее состояние ξ_k на границе определит граничное состояние:

$$\gamma_k = \{u_{iv}^{(k)}, p_i^{(k)}\},$$

где $u_{iv}^{(k)}$ – перемещения точек границы тела; $p_i^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)} n_j$ – усилия на границе. Набор таких состояний образует базис пространства граничных состояний $G = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_k, \dots\}$.

После построения базисов пространств состояний их элементы подлежат ортонормированию, которое можно осуществить по разработанному рекурсивно-матричному алгоритму ортогонализации [14]. Алгоритм в своей работе использует назначенные в конкретной задаче перекрестные скалярные произведения, например для базиса пространства G :

$$(\gamma^k, \gamma^l) = \int_S u_{iv}^{(k)} u_{iv}^{(l)} dS, \quad (8)$$

где S – поверхность тела.

Решение представляет собой ряд Фурье:

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k. \\ u_i &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_i^{(k)}; \quad \varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_{ij}^{(k)}; \quad \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_{ij}^{(k)}. \end{aligned} \quad (9)$$

В условиях второй основной задачи теории упругости, когда на границы тела заданы перемещения ее точек u_{iv} , коэффициенты Фурье вычисляются следующим образом:

$$c_k = \int_S u_{iv} u_{iv}^{(k)} dS. \quad (10)$$

5. Решение задачи

Рассмотрим решение динамической задачи для конечного кругового цилиндра. Материал цилиндра – алевролит крупный темно-серый [15]. До начала решения в методе граничных состояний проводится обезразмеривание параметров задачи [16]. После процедуры:

– упругие характеристики материала: $E_{z_0} = 6.21$; $E_r = 5.68$; $G_r = 2.29$; $G_{z_0} = 2.55$;
 $\nu_{z_0} = 0.22$; $\nu_r = 0.24$;

– цилиндр занимает объем $V = \{(r, z_0) \mid 0 \leq r \leq 1, -2 \leq z_0 \leq 2\}$;

– плотность материала $\rho = 2$;

– скорость распространения возмущения $c = 0.25$.

С практической точки зрения интерес составляют возмущения, являющиеся гармоническими во времени. Пусть на боковой поверхности цилиндра в осевом направлении заданы перемещения по такой функции, изменяющейся от координаты z_0 , чтобы после подстановки $z_0 = z - ct$ перемещения изменялись по циклическому закону, а не устремлялись в бесконечность.

Пусть граничные условия (ГУ) на участках поверхности цилиндра заданы следующим образом:

$$\text{Граница 1:} \quad u = -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi z_0}{2}\right); w = 0 \mid r = 1, -2 \leq z_0 \leq 2;$$

$$\text{Граница 2:} \quad u = \frac{1}{2}; w = 0 \mid z_0 = -2, 0 \leq r \leq 1 \}; \quad (11)$$

$$\text{Граница 3:} \quad u = \frac{1}{2}; w = 0 \mid z_0 = 2, 0 \leq r \leq 1 \}.$$

Если проводить решение задачи, используя граничные условия непосредственно в форме (11), то полученное решение будет удовлетворять граничным условиям (с определенной погрешностью) лишь на области $-2 \leq z_0 \leq 2$. После обратной параметризации при фиксированной координате $-2 \leq z \leq 2$ и увеличении времени будет наблюдаться односторонние осцилляции компонент упругого поля, что не будет соответствовать поставленной задаче в гармонической форме.

Здесь необходимо представить функцию $u = -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi z_0}{2}\right)$ в виде степенного ряда:

$$u = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n \pi^{2n} z_0^{2n}}{(2n)! 4^n}. \quad (12)$$

Предположим, что нужно обеспечить сходимость рядов на конечном интервале времени $0 \leq t \leq 20$, при этом гарантированно не будет осцилляций? если удерживать 15 первых членов ряда, т.е. последний член ряда имеет переменную z_0^{28} .

Если использовать полный ряд (12) в качестве граничных условий, то восстановить в рамках одной задачи упругое поле, удовлетворяющее на границе заданному полю перемещений на принятом интервале времени, не представляется возможным. В данном случае возникает необходимость в использовании принципа независимости действия сил и, как следствие, в решении 15 отдельных краевых задач.

На боковой поверхности цилиндра при $n = 0$ ГУ: $u = 1/2$ и $w = 0$. В этой и последующих задачах граничные условия (11) на торцовых поверхностях (границы 2 и 3) остаются без изменений. Знаки и коэффициенты при членах ряда будут учитываться в окончательном решении.

В таблице приведен вид функций компонент вектора перемещения в базисных элементах пространства Ξ (показано 8 элементов).

Компоненты вектора перемещения ортонормированного базиса

N	u	w
ξ_1	$0.1624r$	$-0.3072z_0$
ξ_2	$-0.4425r$	$-0.1128z_0$
ξ_3	$0.1856rz_0$	$0.0838r^2 - 0.1805z_0^2$
ξ_4	$-0.2469rz_0$	$0.4366r^2 - 0.1648z_0^2$
ξ_5	$-0.3301r - 0.0617r^3 + 0.239rz_0^2$	$z_0(0.3081 + 0.2334r^2 - 0.1593rz_0^2)$
ξ_6	$0.4492r - 0.0882r^3 - 0.2235rz_0^2$	$z_0(-0.3104 + 0.6446r^2 - 0.0635z_0^2)$
ξ_7	$z_0(-0.2446r - 0.1417r^3 + 0.1738rz_0^2)$	$-0.025r^2 - 0.032r^4 + 0.174z_0^2 + 0.275r^2z_0^2 - 0.89z_0^4$
ξ_8	$z_0(0.6952r - 0.1147r^3 - 0.2118rz_0^2)$	$-0.17r^2 - 0.124r^4 - 0.318z_0^2 + 0.514r^2z_0^2 + 0.004z_0^4$

Решение первой задачи является строгим: $u = 1/2r$; $w = 0$. Потребовалось всего два элемента базиса. Коэффициенты Фурье (10): $c_1 = 0.365513$; $c_2 = -0.995691$.

Граничные условия на боковой поверхности во второй задаче ($n = 1$) имеют вид: $u = z_0^2/8$ и $w = 0$.

Для решения задачи используем базис внутренних состояний из 20 элементов. Оценку сходимости решения проведем путем сопоставления заданных ГУ с полученными в ходе решения. Штриховая линия – заданные граничные условия, сплошная – полученные в результате решения. На рис. 2 показаны граничные условия при использовании пяти членов ряда, а на рис. 3 – при 20.

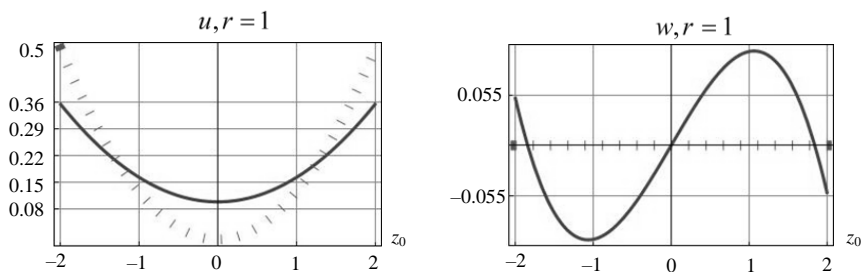


Рис. 2. Восстановленные перемещения на границе при 5 элементах базиса
Fig. 2. Reconstructed displacements at the boundary with 5 basis elements

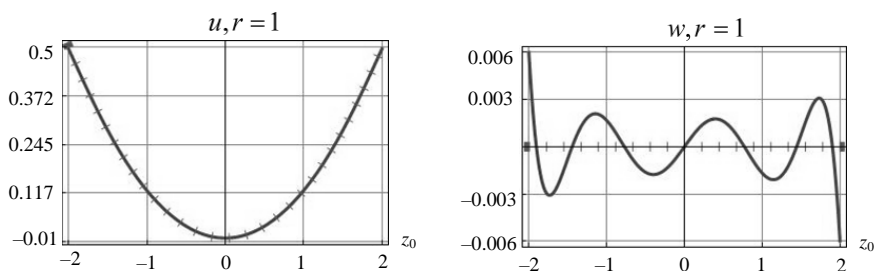


Рис. 3. Восстановленные перемещения на границе при 20 элементах базиса
Fig. 3. Reconstructed displacements at the boundary with 20 basis elements

Далее покажем решение задачи для последнего члена ряда (12) со степенью $n = 28$. ГУ имеют вид: $u = z_0^{28}/536870912$ и $w = 0$.

Для решения данной задачи уже потребовался базис из 60 элементов. Рисунок 4 представляет собой сумму Бесселя. График позволяет косвенным образом судить о сходимости решения.

На рис. 5 представлена верификация граничных условий на одной торцевой и боковой поверхностях.

Максимальная погрешность составила 3.38%. С увеличением числа используемых элементов базиса погрешность уменьшается.

Окончательное решение, представляющее собой сумму решений всех задач, умноженных на соответствующие коэффициенты, согласно (12) и подстановке в решение $z_0 = z - ct$.

На рис. 6 показана верификация граничных условий окончательного решения на боковой поверхности цилиндра в момент времени $t = 0$.

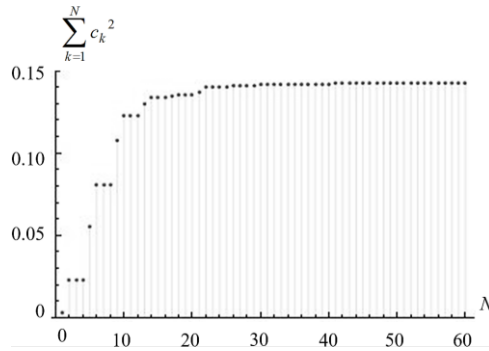
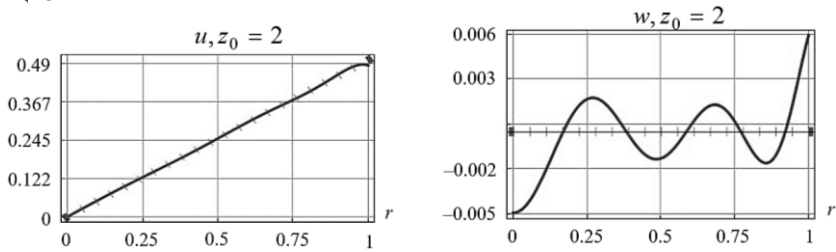


Рис. 4. Сумма Бесселя
Fig. 4. Bessel sum

Граница 3



Граница 1

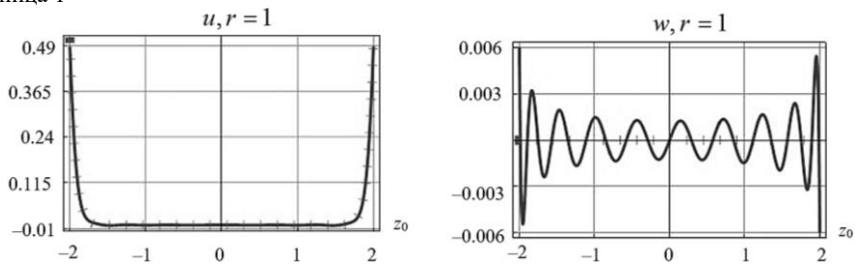


Рис. 5. Верификация граничных условий в пятнадцатой задаче
Fig. 5. Verification of boundary conditions in the fifteenth problem

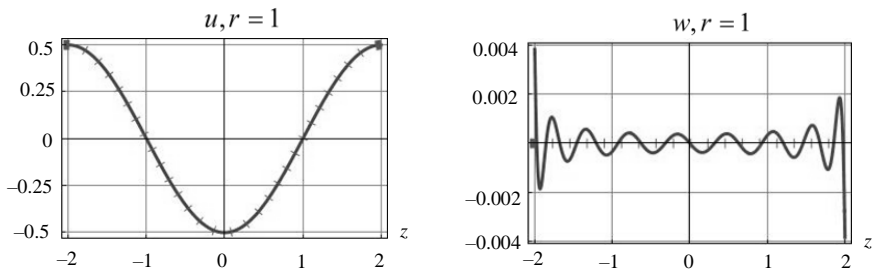


Рис. 6. Верификация граничных условий окончательного решения
Fig. 6. Verification of boundary conditions of the final solution

Благодаря тому, что ряд (12) является знакочередующимся, погрешности от каждой задачи не суммируются.

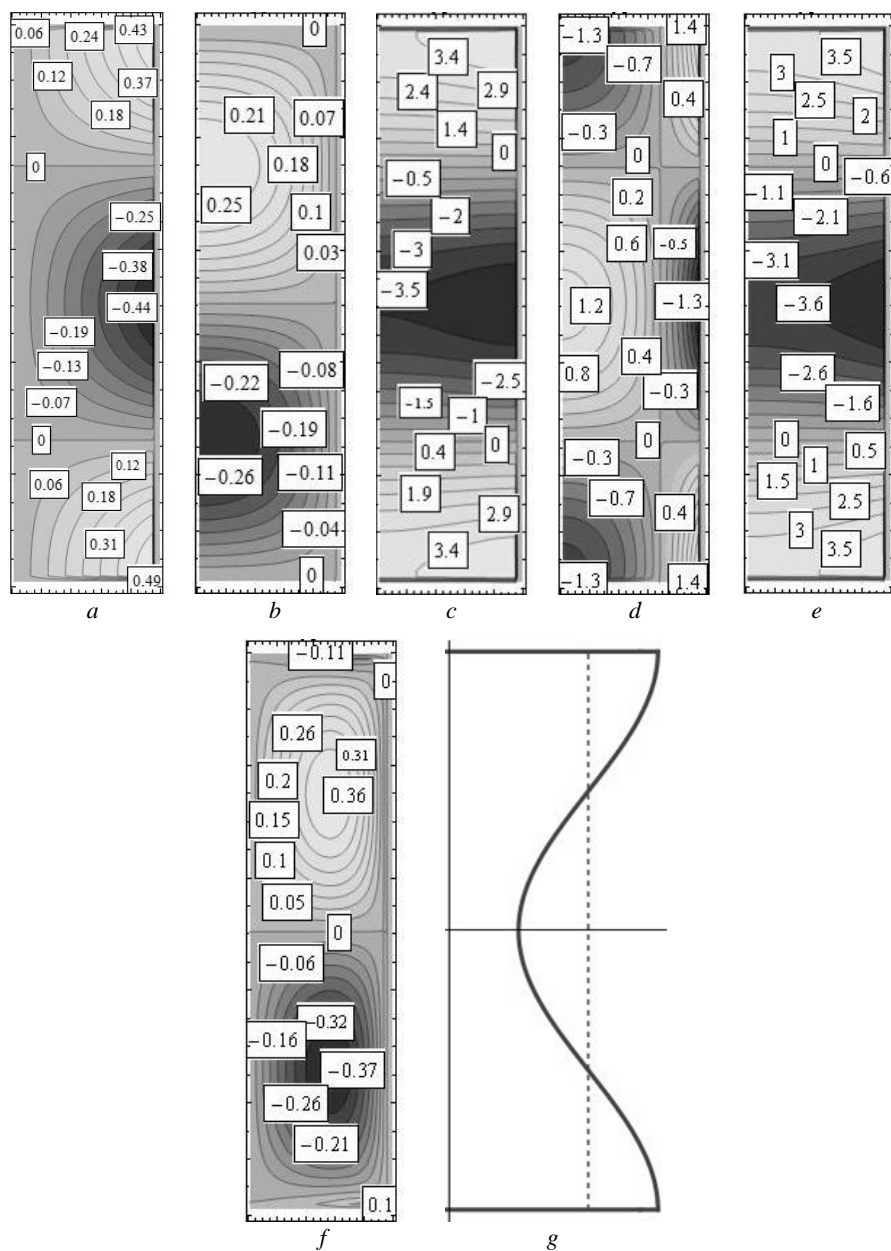


Рис. 7. Изолинии: a – перемещение u , b – перемещение w , c – напряжение σ_{rr} , d – напряжение σ_{zz} , e – напряжение $\sigma_{\theta\theta}$, f – напряжение σ_{zr} , g – контур деформированного состояния

Fig. 7. Isolines of (a) displacement u , (b) displacement w , (c) stress σ_{rr} , (d) stress σ_{zz} , (e) stress $\sigma_{\theta\theta}$, and (f) stress σ_{zr} , (g) contour of the deformed state

Изолинии компонент упругого поля окончательного решения имеют полиномиальный вид и представлены в виде изолиний (в явном виде необозримы) на рис. 7. С учетом осевой симметрии компонент упругого поля относительно оси вращения показано меридианное сечение с $0 \leq r \leq 1$ и $-2 \leq z \leq 2$. На рис. 7, *g* сплошной линией показан контур деформированного состояния, штриховой – недеформированного. В силу малости упругих деформаций контур показан в гипертрофированном виде.

Все полученные компоненты упругого поля строго удовлетворяют уравнениям (1)–(5).

Заключение

В работе решение стационарно-динамической задачи теории упругости в условиях, когда на границе тела заданы перемещения, строится следующим образом. По условию задачи, возмущения распространяются с постоянной скоростью c , что позволило ввести подвижную координату $z_0 = z - ct$ и использовать общее решение плоской стационарной задачи эластостатики (7) для трансверсально-изотропной среды с поправками на комплексные параметры среды и корни характеристического уравнения (теперь в нем учитываются скорость c и плотность ρ). На основе общего решения, определяющего упругие деформации и напряжения двумерного состояния тела, строится конечное множество плоских вспомогательных состояний. Далее по формулам (6) осуществляется переход к множеству пространственных осесимметричных состояний. Это множество определяет пространства внутренних и граничных состояний в аппарате метода граничных состояний. Затем пространства состояний ортонормируются «по перемещениям», используя перекрестные скалярные произведения (8). Окончательно искомые векторы и тензоры разлагаются в ряды (9) с одинаковыми коэффициентами Фурье (10).

В условиях второй основной задачи, когда в динамической задаче за возмущения принимаются перемещения точек границы и носят, например, колебательный характер, заданную гармоническую функцию необходимо разложить в степенной ряд с определенной точностью. Далее для каждого члена ряда проводится решение отдельной задачи, и затем полученные решения суммируются. Однако ввиду того, что ортонормированный базис как самая энергоемкая в плане машинного времени процедура строится один раз и используется в решении каждой задачи, решение множества задач не вызывает принципиальных трудностей. Следует только «наполнить» пространства состояний достаточным числом элементов для возможности решать задачи с большим показателем u степенной функции, так как там заданные перемещения носят практически сингулярный характер (левый график на рис. 5 границы 3).

В перспективе можно редуцировать решение несимметричных стационарно-динамических задач для анизотропных тел. Методика решения стационарных неосесимметричных краевых задач показана в работе [17], а методика построения упругих полей от действия неосесимметричных объемных сил – в работе [18].

Список источников

1. Мехтиев М.Ф., Ахмедов Н.К., Юсубова С.М. Асимптотическое поведение решения осесимметричной динамической задачи теории упругости для трансверсально-изотропного сферического слоя малой толщины // Известия вузов. Северо-Кавказский

- регион. Сер. Естественные науки. 2020. № 2 (206). С. 61–71. doi: 10.18522/1026-2237-2020-2-61-71
2. Фридман Л.И., Моргачев К.С. Решение стационарной динамической задачи для кольцевой пластины в рамках модели Тимошенко // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки. 2005. № 34. С. 68–71.
 3. Низомов Д.Н., Ходжибоев О.А., Ходжибоев А.А. Граничные уравнения динамической задачи теории упругости // Доклады Академии наук Таджикистана. 2014. Т. 57, № 11-12. С. 850–855.
 4. Приказчиков Д.А., Коваленко Е.В. Выбор потенциалов в трехмерных задачах динамической теории упругости // Инженерный журнал: наука и инновации. 2012. № 2 (2). С. 131–137.
 5. Ермоленко Г.Ю. Решение динамической задачи анизотропной теории упругости со смешанными краевыми условиями // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физико-математические науки. 2003. № 19. С. 19–21.
 6. Терпугов В.Н. О возможности построения конечно-элементных алгоритмов для динамических задач теории упругости // Вестник Пермского университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2007. № 7. С. 140–144.
 7. Немчинов В.В. Двухслойная разностная схема численного решения плоских динамических задач теории упругости // Вестник МГСУ. 2012. № 8. С. 104–111.
 8. Зеленцов В.Б. Об одном методе решения нестационарных динамических контактных задач теории упругости об ударе // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2010. № 6. С. 35–40.
 9. Галабурдин А.В. Применение метода граничных интегральных уравнений к решению задач о движущейся нагрузке // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Сер. Естественные науки. 2015. № 1(185). С. 9–11.
 10. Бабешко В.А., Уафа С.Б. и др. О динамической контактной задаче с двумя деформируемыми штампами // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24. вып. 1. С. 4–13. doi: 10.18500/1816-9791-2024-24-1-4-13
 11. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости (применение методов теории функций комплексного переменного). М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. 464 с.
 12. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Госиздат техн.-теор. лит., 1955. 491 с.
 13. Пеньков В.Б., Пеньков В.В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики // Дальневосточный математический журнал. 2001. Т. 2, № 2. С. 115–137.
 14. Сатакина Л.В. Нарращивание базиса пространства состояний при жестких ограничениях к энергоемкости вычислений // Сборник тезисов докладов научной конференции студентов и аспирантов Липецкого государственного технического университета. Липецк, 2007. С. 130–131.
 15. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. 2-е изд. М.: Наука, 1977. 416 с.
 16. Левина Л.В., Новикова О.С., Пеньков В.Б. Полнопараметрическое решение задачи теории упругости односвязного ограниченного тела // Вестник Липецкого государственного технического университета. 2016. № 2 (28). С. 16–24.
 17. Иванычев Д.А. Решение неосесимметричной задачи эластостатики для трансверсально-анизотропного тела вращения // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2022. № 2 (101). С. 4–21. doi: 10.18698/1812-3368-2022-2-4-21
 18. Иванычев Д.А., Левина Л.В. Определение неосесимметричных упругих полей в анизотропных телах вращения, вызванных действием объемных сил // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2022. № 4 (103). С. 22–38. doi: 10.18698/1812-3368-2022-4-22-38

References

1. Mekhtiev M.F., Akhmedov N.K., Yusubova S.M. (2020) Asimptoticheskoe povedenie resheniya osesimmetrichnoy dinamicheskoy zadachi teorii uprugosti dlya transversal'no-izotropnogo sfericheskogo sloya maloy tolshchiny [Asymptotic behavior of the solution of an axisymmetric dynamic problem of elasticity theory for a transversely isotropic spherical layer of small thickness]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Estestvennye nauki – Bulletin of Higher Education Institutes. North Caucasus Region. Natural Sciences*. 2(206). pp. 61–71. doi: 10.18522/1026-2237-2020-2-61-71
2. Fridman L.I., Morgachev K.S. (2005) Reshenie statsionarnoy dinamicheskoy zadachi dlya kol'tsevoy plastiny v ramkakh modeli Timoshenko [Solution of a stationary dynamic problem for an annular plate within the framework of the Timoshenko model]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki – Journal of Samara State Technical University. Physical and Mathematical Sciences*. 34. pp. 68–71.
3. Nizomov D.N., Khodzhiboev O.A., Khodzhiboev A.A. (2014) Granichnye uravneniya dinamicheskoy zadachi teorii uprugosti [Boundary equations of the dynamic problem of elasticity theory]. *DAN RT*. 57. 11–12. pp. 850–855.
4. Prikazchikov D.A., Kovalenko E.V. (2012) Vybore potentsialov v trekhmernykh zadachakh dinamicheskoy teorii uprugosti [Choice of potentials in three-dimensional problems of dynamic elasticity theory]. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii – Engineering Journal: Science and Innovation*. 2(2). pp. 131–137.
5. Ermolenko G.Yu. (2003) Reshenie dinamicheskoy zadachi anizotropnoy teorii uprugosti so smeshannymi kraevymi usloviyami [Solution of a dynamic problem of anisotropic elasticity theory with mixed boundary conditions]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki – Journal of Samara State Technical University. Physical and Mathematical Sciences*. 19. pp. 19–21.
6. Terpugov V.N. (2007) O vozmozhnosti postroyeniya konechno-elementnykh algoritmov dlya dinamicheskikh zadach teorii uprugosti [On the possibility of developing finite element algorithms for dynamic problems in the theory of elasticity]. *Vestnik Permskogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika – Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*. 7. pp. 140–144.
7. Nemchinov V.V. (2012) Dvukhsloynnaya raznostnaya skhema chislennogo resheniya ploskikh dinamicheskikh zadach teorii uprugosti [Two-layer difference scheme for numerical solution of plane dynamic problems of elasticity theory]. *Vestnik MGSU*. 8. pp. 104–111.
8. Zelentsov V.B. (2010) Ob odnom metode resheniya nestatsionarnykh dinamicheskikh kontaktnykh zadach teorii uprugosti ob udare [On one method for solving non-stationary dynamic contact problems of elasticity theory on impact]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki – Bulletin of Higher Education Institutes. North Caucasus Region. Natural Sciences*. 6. pp. 35–40.
9. Galaburdin A.V. (2015) Primenenie metoda granichnykh integral'nykh uravneniy k resheniyu zadach o dvizhushchey nagruzke [Application of the method of boundary integral equations to solving problems of moving loads]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Estestvennye nauki – Bulletin of Higher Education Institutes. North Caucasus Region. Natural Sciences*. 1(185). pp. 9–11.
10. Babeshko V.A., Ufa S.B., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Telyatnikov I.S (2024) O dinamicheskoy kontaktной zadache s dvumya deformiruemyimi shtampami [On a dynamic contact problem with two deformable stamps]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika – Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 24(1). pp. 4–13. doi: 10.18500/1816-9791-2024-24-1-4-13
11. Aleksandrov A.Ya., Solov'ev Yu.I. (1978) *Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti (primenenie metodov teorii funktsii kompleksnogo peremennogo)* [Spatial problems of the theory of elasticity (application of methods of the theory of functions of a complex variable)]. Moscow: Nauka.

12. Lur'e A.I. (1955) *Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti* [Spatial problems of the theory of elasticity]. Moscow: Gosizdat tekhniko-teoreticheskoy literatury.
13. Pen'kov V.B., Pen'kov V.V. (2001) Metod granichnykh sostoyaniy dlya resheniya zadach lineynoy mekhaniki [The method of boundary states for solving problems of linear mechanics]. *Dal'nevostochnyi matematicheskii zhurnal – Far Eastern Mathematical Journal*. 2(2). pp. 115–137.
14. Satalkina L.V. (2007) Narashchivanie bazisa prostranstva sostoyaniy pri zhestkikh ogranicheniyakh k energoemkosti vychisleniy [Expansion of the basis of the state space with severe limitations on the energy consumption of computations]. *Sbornik tezisev dokladov nauchnoy konferentsii studentov i aspirantov Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. pp. 130–131.
15. Lekhnitskiy S.G. (1977) *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela* [The theory of elasticity of an anisotropic body]. Moscow: Nauka.
16. Levina L.V., Novikova O.S., Pen'kov V.B. (2016) Polnoparametricheskoe reshenie zadachi teorii uprugosti odnosvyaznogo ogranichenogo tela [Full-parameter solution of the problem of the theory of elasticity of a simply connected bounded body]. *Vestnik LGTU*. 2(28). pp. 16–24.
17. Ivanychev D.A. (2022) Reshenie neosesimmetrichnoy zadachi elastostatiki dlya transversal'no-izotropnogo tela vrashcheniya [Solution of a non-axisymmetric elastostatics problem for a transversely isotropic body of rotation]. *Vestnik MGTU im. N.E. Bauman. Ser. Estestvennye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*. 2(101). pp. 4–21. doi: 10.18698/1812-3368-2022-2-4-21
18. Ivanychev D.A., Levina L.V. (2022) Opredelenie neosesimmetrichnykh uprugikh poley v anizotropnykh telakh vrashcheniya, vyzvannykh deystviem ob'emnykh sil [Determination of non-axisymmetric elastic fields in anisotropic bodies of rotation caused by the action of body forces]. *Vestnik MGTU im. N.E. Bauman. Ser. Estestvennye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*. 3(103). pp. 22–38. doi: 10.18698/1812-3368-2022-4-22-38

Сведения об авторе:

Иванычев Дмитрий Алексеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей механики Липецкого государственного технического университета (Липецк, Россия). E-mail: Lsivdmal@mail.ru

Information about the author:

Ivanychev Dmitriy A. (Candidate of Physics and Mathematics, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russian Federation). E-mail: Lsivdmal@mail.ru

Статья поступила в редакцию 07.12.2024; принята к публикации 06.09.2025

The article was submitted 07.12.2024; accepted for publication 06.09.2025