

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.17223/19988621/97/11

## Изгиб упруго-пластического бруса коробчатого сечения, армированного упругими волокнами

Сергей Иванович Сенашов<sup>1</sup>, Ирина Леонидовна Савостьянова<sup>2</sup>

<sup>1, 2</sup> Сибирский государственный университет науки и технологий  
им. академика М.Ф. Решетнева, Красноярск, Россия

<sup>1</sup> sen@sibsau.ru

<sup>2</sup> ruppa@inbox.ru

**Аннотация.** Рассмотрен коробчатый брус, который изгибается под действием силы, приложенной к его концу. Центр тяжести поперечного сечения не совпадает с точкой приложения изгибающей силы. Предполагается, что деформация в брусѣ упруго-пластическая, и боковая поверхность его свободна от напряжений. Построено точное решение с помощью законов сохранения, описывающее напряженное состояние этой конструкции. Напряженное состояние вычисляется в каждой точке рассмотренной фигуры с помощью интегралов по внешним контурам поперечного сечения и контурам сечений волокон.

**Ключевые слова:** упругопластический изгиб, коробчатый композитный брус, точное решение, законы сохранения

**Для цитирования:** Сенашов С.И., Савостьянова И.Л. Изгиб упруго-пластического бруса коробчатого сечения, армированного упругими волокнами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 97. С. 158–167. doi: 10.17223/19988621/97/11

Original article

## Bending of the elastic-plastic box-shaped beam reinforced with elastic fibers

Sergey I. Senashov<sup>1</sup>, Irina L. Savost'yanova<sup>2</sup>

<sup>1, 2</sup> Reshetnev Siberian State University of Science and Technology,  
Krasnoyarsk, Russian Federation

<sup>1</sup> sen@sibsau.ru

<sup>2</sup> ruppa@inbox.ru

**Abstract.** For the deployment of antennas on spacecraft, long hollow box-shaped beams are used in space technology. These beams are fabricated from composite materials. Solar radiation induces stresses in the beams, which significantly affect the performance of the devices mounted on the deployed structure.

This study examines a box-shaped beam subjected to bending by a force applied at its free end. The center of gravity of the cross-section does not coincide with the point of the bending force application. The analysis assumes elastoplastic deformations and a lateral surface free of stresses. An exact solution is derived using conservation laws that provide a detailed description of the stress state in the structure. The stress state is calculated at each point of the considered domain through integrals along the external boundaries of the cross-section and along the contours of the fiber sections.

**Keywords:** elastic-plastic bending, box-shaped composite beam, exact solution, conservation laws

**For citation:** Senashov, S.I., Savost'yanova, I.L. (2025) Bending of the elastic-plastic box-shaped beam reinforced with elastic fibers. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 97. pp. 158–167. doi: 10.17223/19988621/97/11

## Введение

Проблема компактного размещения и развертывания крупногабаритных трансформируемых конструкций из транспортного положения в рабочее для наземных и космических условий ставит задачи поиска концепций, способных разрешить основное противоречие: минимальная масса, максимальные компактность и необходимые габариты в рабочем состоянии. Перспективный способ развертывания крупногабаритных трансформируемых конструкций базируется на упругой энергии, запасаемой в процессе компактного размещения. Перспективными составными частями таких конструкций являются гибкие, упругие стержни из армированных композиционных материалов. Проблема изгиба и кручения армированного композитного бруса во многом определяет потенциальные возможности конструкции в целом. Ситуация, когда масса изделия должна быть минимальной, а надежность развертывания максимальной, требует детального изучения механики процесса с полным пониманием ограничений, накладываемых на конструкцию, и, как следствие, ограничений на технологию изготовления составных частей таких конструкций.

В настоящее время большое внимание уделяется всестороннему исследованию композитных материалов. Так, в [1] разработана многослойная броня: алюмооксидная керамика – тканый материал, армированный эпоксидной смолой и алюминиевым сплавом. В [2] исследованы колебания композитной балки из функционально-градиентного в двух направлениях материала, армированного углеродными нанотрубками. В работе [3] определена и сопоставлена эффективность различных схем облицовки пластины композитными покрытиями. В [4] исследована устойчивость подкрепленного отсека фюзеляжа самолета, выполненного из композиционного материала, при чистом изгибе и нагружении внутренним давлением. В [5] проведены исследования стойкости формируемого композитного материала при высокоскоростном соударении. В [6] приводится математическая постановка задачи о вынужденных установившихся и собственных колебаниях рассматриваемых смарт-систем, а также результаты численных расчетов, из которых следует, что графеновые композиты могут быть использованы для дополнительного демпфирования колебаний смарт-структур на основе пьезоэлементов. В работе [7] на основе метода конечных элементов разработан вычислительный алгоритм для решения ограниченного класса задач об изгибе композитных пластин, армированных

системами однонаправленных высокопрочных волокон. Разработана модель динамического деформирования и разрушения композитных материалов, в которой учитывается нелинейность диаграмм ударного нагружения с упрочнением, зависящего от скорости деформирования [8]. В работе В.Э. Богачева и соавт. [9] рассмотрена задача нахождения предела упругого деформирования предельно тонкого адгезионного слоя при нормальном разрыве. Показано, что при плоской деформации напряжение отрыва значительно превышает аналогичное напряжение плоского напряженного состояния.

Авторы статьи [10] представили результаты моделирования основных этапов технологического процесса производства крупногабаритной оболочки методом непрерывной намотки. Они сформулировали систему граничных и начальных условий для конечно-элементного анализа.

В [11] представлены результаты экспериментальных исследований эффективности противоударной стойкости керамических и композитных образцов в диапазоне высоких скоростей удара.

В обзоре [12] описан существующий задел для разработки композитов с металлической матрицей. В [13] описаны подходы к расчету максимального усилия при продавливании стеклопластиковых труб для микротоннелирования, определены упруго-прочностные характеристики труб на элементарных образцах труб и сборках из двух образцов труб, соединенных между собой стальной муфтой. В [14] рассмотрено упругопластическое деформирование тонкого адгезионного слоя упругими консолями, соответствующее нагружению нормального разрыва. Ю.Н. Работнов предложил модель композитного материала с упруго-пластическим связующим и упругими волокнами [15. С. 722]. При этом между волокнами и матрицей при нагружении действует постоянное касательное напряжение. На основе этой модели в предлагаемой статье рассмотрено напряженное состояние коробчатого бруса, изготовленного из композиционных материалов. Задача решена с помощью законов сохранения, что уже применяется для решения и других задач механики [16].

### Постановка задачи

Рассмотрим упруго-пластическое состояние бруса коробчатого сечения, армированного упругими волокнами, который находится под действием поперечной силы (рис. 1). С помощью построенных законов сохранения вычислим напряженное состояние в каждой точке этой конструкции.

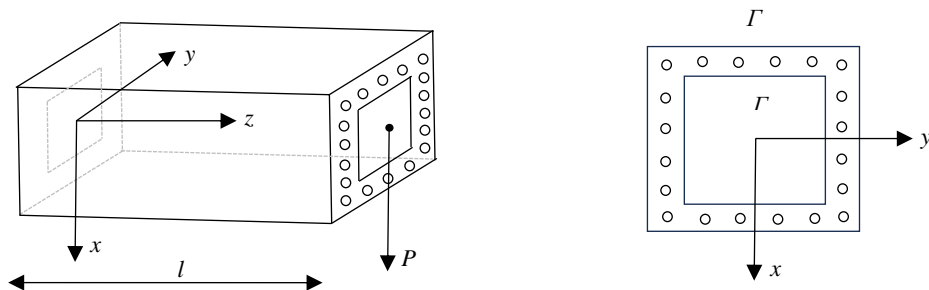


Рис. 1. Изгибаемый брус  
Fig. 1. Bent beam

В матрице  $S$  выполняются уравнение равновесия и уравнение, которое является следствием соотношений Бельтрами–Митчелла

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\partial \tau_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_2}{\partial y} - P[\delta_1(x - x^0) + \delta_2(y - y^0)] = 0, \\ F_2 &= \frac{\partial \tau_1}{\partial y} - \frac{\partial \tau_2}{\partial x} + P[\delta_1(y - y^0) - \delta_2(x - x^0)] + 2K = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_1 &= -\frac{I_{11}S - S_1^2}{\Delta}, \delta_2 = \frac{I_{12}S - S_1S_2}{\Delta}, \Delta = \begin{vmatrix} I_{22} & I_{12} & S_2 \\ I_{12} & I_{11} & S_1 \\ S_2 & S_1 & S \end{vmatrix}, \\ x^0 &= \frac{S_2}{S}, y^0 = \frac{S_1}{S}, \\ \sigma_{33} &= P(l - z)(\delta_1(x - x^0) + \delta_2(y - y^0)), \\ S &= \iint_S ds, S_1 = \iint_S y ds, S_2 = \iint_S x ds, \\ I_{11} &= \iint_S y^2 ds, I_{12} = \iint_S xy ds, I_{22} = \iint_S x^2 ds, \end{aligned}$$

$S$  – поперечное сечение,  $I_{ij}$  – моменты инерции сечения,  $S_i$  – статические моменты,  $\tau_1 = \tau_{xz}$ ,  $\tau_2 = \tau_{yz}$ ,  $\sigma_{33}$  – компоненты тензора напряжений,  $\nu$  – коэффициент Пуассона матрицы,  $x^0$ ,  $y^0$  – координаты центра тяжести сечения. Пусть брус нагружен в конечном сечении силами, равномерно распределенными с равнодействующей  $P = (P, 0, 0)$ , которая действует в направлении оси  $x$ , центр тяжести поперечного сечения бруса не совпадает с началом координат. Постоянная  $K$  характеризует крутку вокруг продольной оси бруса; вычисление этой постоянной можно найти в [17. С. 455]. Матрица имеет предел текучести  $k_s$ .

Волокна расположены в произвольном порядке параллельно оси бруса. Каждое волокно имеет круглое сечение, центр волокна располагается в точке с координатами  $(x_i, y_i)$ , радиус волокна равен  $R$ , упругие постоянные  $\nu_1$ ,  $G_1$ . Пределы текучести волокон превосходят предел текучести матрицы  $k_1 > k > 0$ . Касательное напряжение между волокном и матрицей равно  $\tau < k$ .

*Замечание.* Второе уравнение (1) без труда получается как следствие первого уравнения (1) и соотношений Бельтрами–Митчелла

$$\Delta \tau_1 = \frac{P\delta_1}{(1 + \nu)}, \Delta \tau_2 = \frac{P\delta_2}{1 + \nu},$$

$\Delta$  – оператор Лапласа.

### Граничные условия

Внутренняя и внешние боковые поверхности бруса предполагаются свободными от напряжений и находящимися в пластическом состоянии, поэтому на них выполняются условие

$$\tau_1 n + \tau_2 m = 0 \quad (2)$$

и условие пластичности

$$\tau_1^2 + \tau_2^2 = k^2 = k_s^2 - \frac{1}{3}\sigma_{33}^2, \quad (3)$$

$k_s$  – предел текучести матрицы,  $n$ ,  $m$  – компоненты вектора внешней нормали к боковой поверхности.

В результате из (2), (3) получаем следующие граничные условия:

$$\tau_1 = -mk, \tau_2 = nk. \quad (4)$$

На границе между волокном и матрицей выполняются условия

$$\tau_{xz} m_i - \tau_{yz} n_i = \tau, \quad \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2,$$

где  $n_i$ ,  $m_i$  – компоненты вектора нормали к боковой поверхности  $i$ -го волокна, которые запишем в виде:

$$\tau_1 = m_i \tau \mp n_i \sqrt{k^2 - \tau^2}, \tau_2 = n_i \tau \pm m_i \sqrt{k^2 - \tau^2}. \quad (5)$$

### Законы сохранения уравнений (1)

Сохраняющийся ток закона сохранения ищем в виде:

$$A = \alpha^1 \tau_1 + \beta^1 \tau_2 + \gamma^1, B = \alpha^2 \tau_1 + \beta^2 \tau_2 + \gamma^2, \quad (6)$$

где  $\alpha^i, \beta^i, \gamma^i$  – функции от  $x, y$ .

Тогда закон сохранения для дифференциальных уравнений (1) запишется в виде:

$$D_x A + D_y B = \omega_1 F_1 + \omega_2 F_2, \quad (7)$$

где  $D_x = \partial_x + \partial_x \tau_1 \partial_{\tau_1} + \partial_x \tau_2 \partial_{\tau_2}$ ,  $D_y = \partial_y + \partial_y \tau_1 \partial_{\tau_1} + \partial_y \tau_2 \partial_{\tau_2}$ ,  $\omega_1, \omega_2$  – некоторые линейные дифференциальные операторы, одновременно не тождественно равные нулю.

*Замечание.* Более общее определение закона сохранения и способы его построения можно найти в [18, 19].

Подставляем (6) в (7), получаем

$$\begin{aligned} & \partial_x (\alpha^1 \tau_1 + \beta^1 \tau_2 + \gamma^1) + \partial_y (\alpha^2 \tau_1 + \beta^2 \tau_2 + \gamma^2) = \\ & = \omega_1 (\partial_x \tau_1 + \partial_y \tau_2 + C) + \omega_2 (\partial_x \tau_2 - \partial_y \tau_1 + D). \end{aligned} \quad (8)$$

В (8) для краткости введены обозначения

$$C = -P[\delta_1(x - x^0) + \delta_2(y - y^0)], \quad D = P[\delta_1(y - y^0) - \delta_2(x - x^0)] + 2K.$$

Из (8) получаем

$$\alpha^1 = \beta^2, \alpha^2 = -\beta^1, \partial_x \beta^1 + \partial_y \alpha^1 = 0, \partial_x \alpha^1 - \partial_y \beta^1 = 0, \partial_x \gamma^1 + \partial_y \gamma^2 = \alpha^1 C + \beta^1 D. \quad (9)$$

Из (9) следует, что система уравнений (1) допускает бесконечную серию законов сохранения.

### Вычисления компонент тензора напряжений в матрице

Пусть  $(x_0, y_0) \in S$ . Рассмотрим решение уравнений (9), которое имеет особенность в этой точке.

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \beta^1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \\ \gamma^1 &= P[-[\delta_1(x_0 - x^0) + \delta_2(y_0 - y^0 + x - x_0)] \arctg \frac{x - x_0}{y - y_0} + \end{aligned} \quad (10)$$

$$+ \frac{[\delta_1(y_0 - y^0) + \delta_2(x_0 - x^0)]}{2} \ln[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2], \gamma^2 = 0.$$

Опишем вокруг точки  $(x_0, y_0) \in S_1$  окружность радиуса  $\varepsilon: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$ , сделаем разрез, как это изображено на рис. 2.

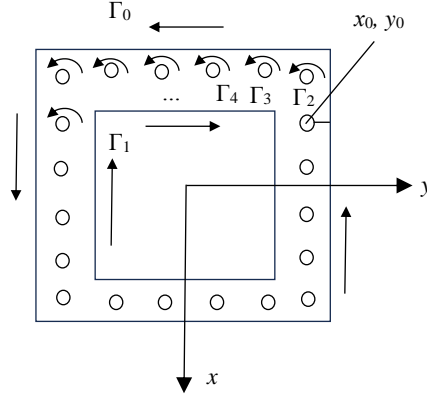


Рис. 2. Поперечное сечение бруса. Направление обхода

Fig. 2. A cross-section of the beam with indicated directions

По формуле Грина из (7) получаем

$$\iint_S (A_x + B_y) dx dy = \oint_{\Gamma_0} A dy - B dx - \sum_{i=1}^n \oint_{\Gamma_i} A dy - B dx - \oint_{\varepsilon} A dy - B dx = 0, \quad (11)$$

где  $\varepsilon$  – окружность:  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$ .

Рассмотрим решение (10), полагая  $x - x_0 = \varepsilon \cos \varphi$ ,  $y - y_0 = \varepsilon \sin \varphi$ , тогда из (11) с учетом (9) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  получаем

$$\begin{aligned} 2\pi\tau_{xz}(x_0, y_0) = & \oint_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} \left( m_0 k \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - n_0 k \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \gamma^1 \right) dy - \\ & - \left( m_0 k \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + n_0 k \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right) dx + \\ & + \sum_{i=1}^n \oint_{\Gamma_i} \left( \frac{(m_i \tau - n_i \sqrt{k^2 - \tau^2})(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - \frac{(-n_i \tau + m_i \sqrt{k^2 - \tau^2})(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \gamma^1 \right) dy - \\ & - \left( \frac{(m_i \tau - n_i \sqrt{k^2 - \tau^2})(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \frac{(n_i \tau + m_i \sqrt{k^2 - \tau^2})(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right) dx. \end{aligned} \quad (12)$$

Рассмотрим другое решение уравнений (9):

$$\begin{aligned} \alpha_*^1 = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \beta_*^2 = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \partial_x \gamma_*^1 + \partial_y \gamma_*^2 = \alpha_*^1 C + \beta_*^2 D. \\ \gamma_*^1 = P[-\delta_1(x - x_0) + \frac{(-\delta_1(x_0 - x^0) + \delta_2(y_0 - y^0))}{2} \ln((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) + \\ + (\delta_2(x_0 - x^0) + \frac{2K}{y - y_0} \operatorname{arctg} \frac{x - x_0}{y - y_0}), \gamma_*^2 = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Почти дословно повторяя предыдущие рассуждения с решением (13), получаем

$$\begin{aligned}
 2\pi\tau_{yz}(x_0, y_0) = & \oint_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} \left( m_0 k \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + n_0 k \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right) dy - \\
 & - \left( -m_0 k \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + n_0 k \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \gamma_*^1 \right) dx + \\
 & + \sum_{i=1}^n \oint_{\Gamma_i} \left( \frac{(m_i \tau - n_i \sqrt{k^2 - \tau^2})(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \frac{(n_i \tau + m_i \sqrt{k^2 - \tau^2})(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \gamma_*^1 \right) dy - \\
 & - \left( -(m_i \tau - n_i \sqrt{k^2 - \tau^2}) \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + (n_i \tau + m_i \sqrt{k^2 - \tau^2}) \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right) dx.
 \end{aligned} \tag{14}$$

### Заключение

В работе построены законы сохранения для уравнений, описывающих напряженное состояние упругого-пластического бруса коробчатого сечения, армированного упругими волокнами, под действием поперечной силы для каждого фиксированного сечения  $z$ . Законы сохранения позволили вычислить напряженное состояние в каждой точке бруса по формулам (13) и (14) с помощью интегралов по внешним границам бруса и волокон.

### Список источников

1. Ахмед П.С., Абед М.С., Салим И.А. Экспериментальное исследование и численное моделирование баллистического воздействия на гибридный композит (оксид алюминия – тканый материал – эпоксидная смола – алюминий), используемый при изготовлении бронезиelta // Прикладная механика и техническая физика. 2023. № 4. С. 3–13.
2. Пан М., Чжоу С.М., Ху Б.Л., Чжан Ю.Ц. Свободные колебания композитной балки из функционально-градиентного в двух направлениях материала, армированной углеродными нанотрубками // Прикладная механика и техническая физика. 2023. № 5. С. 166–178.
3. Кирпичников В.Ю., Коцеев А.П., Сятковский А.И. Экспериментальное исследование эффективности армированных вибропоглощающих покрытий // Прикладная механика и техническая физика. 2022. № 1. С. 65–70.
4. Железнов Л.П., Серьезнов А.Н. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости композитной оболочки при чистом изгибе и внутреннем давлении // Прикладная механика и техническая физика. 2022. № 2. С. 207–216.
5. Гольшиев А.А., Долгова С.В. Влияние керамического волокна SiC в металломатричном композите на его стойкость при высокоскоростном нагружении // Прикладная механика и техническая физика. 2022. № 6. С. 145–149.
6. Матвеев В.П., Ошмарин Д.А., Юрлова Н.А. Использование электропроводящих композиционных материалов для дополнительного демпфирования смарт-систем на основе пьезоэлементов // Прикладная механика и техническая физика. 2021. № 5. С. 45–57.
7. Петраков И.Е., Садовский В.М., Садовская О.В. Анализ изгиба композитных пластин с учетом различия сопротивлений растяжению и сжатию // Прикладная механика и техническая физика. 2021. № 5. С. 172–183.
8. Федоренко А.Н., Федулов Б.Н., Ломакин Е.В. Моделирование ударного воздействия на демпфирующие элементы, изготовленные из композитных материалов // Прикладная механика и техническая физика. 2021. № 5. С. 100–107.

9. Богачева В.Э., Глаголев В.В., Глаголев Л.В., Маркин А.А. К нахождению предела упругости адгезионного слоя при его нормальном разрыве // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2023. № 83. С. 59–73. doi: 10.17223/19988621/83/6
10. Сахабутдинова Л.Р., Сметанников О.Ю., Ильиных Г.В. Численное моделирование процесса изготовления крупногабаритного композитного кокона с учетом термовязкоупругости // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 76. С. 165–181. doi: 10.17223/19988621
11. Зелепугин С.А., Толкачев В.Ф., Тырышкин И.М. Анализ эффективности противоударной стойкости двух групп керамических и композитных материалов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 80. С. 85–96. doi: 10.17223/19988621/80/8
12. Милейко С.Т. Антони Келли и композиты сегодня. Часть 2: Композиты с металлической матрицей // Композиты и наноструктуры. 2021. Т. 13, № 3-4 (51-52). С. 59–107.
13. Мельников Д.А., Иванов С.В., Антошин В.А., Албагачиев А.Ю. Исследование упруго-прочностных характеристик стеклопластиковых труб для микротоннелирования при осевом сжатии // Композиты и наноструктуры. 2022. Т. 14, № 1 (53). С. 48–59. doi: 10.36236/1999-7590-2021-13-3-4-59-107
14. Богачева В.Э., Глаголев В.В., Глаголев Л.В., Маркин А.А. Влияние пластических свойств тонкого адгезионного слоя на распределение зон пластичности и значения  $j$ -интеграла в состоянии плоской деформации // Механика композиционных материалов и конструкций. 2023. Т. 29, № 1. С. 115–131.
15. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979.
16. Гомонова О.В., Сенашов С.И. Определение областей упругого и пластического деформирования в задаче об одноосном растяжении пластины, ослабленной отверстиями // Прикладная механика и техническая физика. 2021. Т. 62, № 1. С. 208–216.
17. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.
18. Vinogradov A.M. Local symmetries and conservation laws // Acta Appl. Math. 1984. V. 2. P. 21–78.
19. Senashov S.I., Vinogradov A.M. Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity // Proc. Edinburg Math. Soc. 1988. V. 31. P. 415–439.

## References

1. Akhmed P.S., Abed M.S., Salim I.A. (2023) Eksperimental'noe issledovanie i chislennoe modelirovanie ballisticheskogo vozdeystviya na gibridnyy kompozit (oksid alyuminiya - tkanny material - epoksidnaya smola - alyuminiy), ispol'zuemyy pri izgotovlenii bronezhileta [Experimental investigation and numerical modeling of ballistic effects on a hybrid composite (aluminum oxide - woven material - epoxy resin - aluminum) used in the manufacture of body armor]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 64(4). pp. 3–13. doi: 10.15372/PMTF202115020
2. Pan M., Zhou S. M., Hu B.L., Chzan Yu.Ts. (2023) Svobodnye kolebaniya kompozitnoy balki iz funktsional'no-gradientnogo v dvukh napravleniyakh materiala, armirovannoy uglerodnymi nanotrubkami [Free vibrations of a composite beam made of a functionally gradient in two directions material reinforced with carbon nanotubes]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 64(5). pp. 166–178. doi: 10.15372/PMTF202215136
3. Kirpichnikov V.Yu., Kosheev A.P., Syatkovsky I.I. (2022) Eksperimental'noe issledovanie effektivnosti armirovannykh vibropogloshchayushchikh pokrytiy [Experimental study of the effectiveness of reinforced vibration-absorbing coatings]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 63(1). pp. 65–70. doi: 10.15372/PMTF20220109



4. Zheleznov L.P., Ser'oznov A.N. (2022) Issledovanie nelineynogo deformirovaniya i ustoychivosti kompozitnoy obolochki pri chistom izgibe i vnutrennem davlenii [Investigation of nonlinear deformation and stability of a composite shell under pure bending and internal pressure]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 63(2). pp. 207–216. doi: 10.15372/PMTF20220220
5. Golyshev A.A., Dolgova S.V. (2022) Vliyanie keramicheskogo volokna SiC v metallomatrixnom kompozite na ego stoykost' pri vysokoskorostnom nagruzhении [Influence of ceramic fiber SiC in a metal matrix composite on its resistance to high-speed loading]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 63(6). pp. 145–149. doi: 10.15372/PMTF20220616
6. Matveenko V.P., Oshmarin D.A., Yurlova N.A. (2021) Ispol'zovanie elektroprovodyashchikh kompozitsionnykh materialov dlya dopolnitel'nogo dempfirovaniya smart-sistem na osnove p'zeoelementov [The use of electrically conductive composite materials for additional damping of smart systems based on piezoelectric elements]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 62(5). pp. 45–57. doi: 10.15372/PMTF20210505
7. Petrakov I.E., Sadovskiy V.M., Sadovskaya O.V. (2021) Analiz izgiba kompozitnykh plastin s uchetoм razlichiya soprotivleniy rastyazheniyu i szhatiyu [Analysis of bending of composite plates taking into account differences in tensile and compressive resistances]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 62(5). pp. 172–183. doi: 10.15372/PMTF20210517
8. Fedorenko A.N., Fedulov B.N., Lomakin E.V. (2021) Modelirovanie udarnogo vozdeystviya na dempfiruyushchie elementy, izgotovlennye iz kompozitnykh materialov [Modeling of impact on damping elements made of composite materials]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 62(5). pp. 100–107. doi: 10.15372/PMTF20210510
9. Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. (2023) K nakhozheniyu predela uprugosti adgezionnogo sloya pri ego normal'nom razryve [On determining the elastic limit of an adhesive layer in the opening mode of loading]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 83. pp. 59–73. doi: 10.17223/19988621/83/6
10. Sakhabutdinova L.R., Smetannikov O.Yu., Il'inykh G.V. (2022) Chislennoe modelirovanie protsessa izgotovleniya krupnogabaritnogo kompozitnogo kokona s uchetoм termovyazkouprugosti [Numerical simulation of the process manufacture of large-scale composite shell taking into account thermo viscoelastic]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 76. pp. 165–181. doi: 10.17223/19988621/76/12
11. Zelepugin S.A., Tolkachev V.F., Tyryshkin I.M. (2022) Analiz effektivnosti protivoudarnoy stoykosti dvukh grupp keramicheskikh i kompozitnykh materialov [Analysis of impact resistance for two groups of ceramic and composite materials]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 80. pp. 85–96. doi: 10.17223/19988621/80/8
12. Mileyko S.T. (2021) Antoni Kelli i kompozity segodnya. Chast' 2: kompozity s metallicheskey matritsey [Anthony Kelly and composites today. Part 2: composites with a metal matrix]. *Kompozity i nanostrukturny – Composites and Nanostructures*. 13. 3-4(51-52). pp. 59–107. doi: 10.36236/1999-7590-2021-13-3-4-59-107
13. Mel'nikov D.A., Ivanov S.V., Antoshin V.A., Albagachiev A.Yu. (2022) Issledovanie uprugoprochnostnykh kharakteristik stekloplastikovyykh trub dlya mikrotonnelirovaniya pri osevom szhatii [Investigation of elastic-strength characteristics of fiberglass pipes for microtunneling under axial compression]. *Kompozity i nanostrukturny – Composites and Nanostructures*. 14. 1(53). pp. 48–59. doi: 10.36236/1999-7590-2021-13-3-4-59-107

14. Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. (2023) Vliyaniye plasticheskikh svoystv tonkogo adgezionnogo sloya na raspredeleniye zon plastichnosti i znacheniya  $j$ -integrala v sostoyanii ploskoy deformatsii [Influence of plastic properties of a thin adhesive layer on the distribution of plasticity zones and the values of the  $J$ -integral in a state of plane deformation]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsey – Mechanics of Composite Materials and Structures*. 29(1). pp. 115–131. doi: 10.33113/mkmk.ras.2023.29.01.08
15. Rabotnov Yu.N. (1979) *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of a deformable solid]. Moscow: Nauka.
16. Gomonova O.V., Senashov S.I. (2021) Opredeleniye oblastey uprugogo i plasticheskogo deformirovaniya v zadache ob odnoosnom rastyazhenii plastiny, oslablennoy otverstiyami [Determination of elastic and plastic deformation regions in the problem of uniaxial tension of a plate weakened by holes]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 62(1). pp. 208–216. doi: 10.15372/PMTF20210119
17. Novatskiy V. (1975) *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow: Mir.
18. Vinogradov A.M. (1984) Local symmetries and conservation laws. *Acta Applicandae Mathematicae*. 2. pp. 21–78. doi: 10.1007/BF01405491
19. Senashov S.I., Vinogradov A.M. (1988) Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*. 31. pp. 415–439. doi: 10.1017/S0013091500006817

**Сведения об авторах:**

**Сенашов Сергей Иванович** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры информационных экономических систем Сибирского государственного университета науки и технологий им. академика М.Ф. Решетнева (Красноярск, Россия). E-mail: sen@sibsau.ru

**Савостьянова Ирина Леонидовна** – кандидат педагогических наук, доцент, заместитель директора Научно-образовательного центра «Институт космических исследований и высоких технологий» Сибирского государственного университета науки и технологий им. академика М.Ф. Решетнева (Красноярск, Россия). E-mail: ruppa@inbox.ru

**Information about the authors:**

**Senashov Sergey I.** (Doctor of Physics and Mathematics, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russian Federation). E-mail: sen@sibsau.ru

**Savost'yanova Irina L.** (Candidate of Pedagogical Sciences, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russian Federation). E-mail: ruppa@inbox.ru

*Статья поступила в редакцию 20.03.2024; принята к публикации 06.09.2025*

*The article was submitted 20.03.2024; accepted for publication 06.09.2025*