ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2025 Управление, вычислительная техника и информатика № 73
Tomsk State University Journal of Control and Computer Science

Научная статья
УДК 681.5:517
doi: 10.17223/19988605/73/2

О редукции модальных тестов на управляемость и наблюдаемость MIMO-системы

Николай Евгеньевич Зубов[1], Владимир Николаевич Рябченко[2]

[1, 2] Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
[1] nik.zubov@gmail.com
[2] ryabchenko.vn@mail.ru

Аннотация. Показано, что анализ управляемости и наблюдаемости линейной стационарной системы с многими входами и многими выходами путем редукции моделей системы сводится к анализу управляемости и наблюдаемости систем с существенно меньшей размерностью пространства состояний. Предельным случаем редукции являются скалярные системы.
Ключевые слова: линейные стационарные системы; управляемость; наблюдаемость; редукция систем.

Для цитирования: Зубов Н.Е., Рябченко В.Н. О редукции модальных тестов на управляемость и наблюдаемость MIMO-системы // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2025. № 73. С. 15–22. doi: 10.17223/19988605/73/2

Original article
doi: 10.17223/19988605/73/2

On reduction of modal tests on controllability and observability of MIMO system

Nikolay E. Zubov[1] Vladimir N. Ryabchenko[2]

[1, 2] Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
[1] nik.zubov@gmail.com
[2] ryabchenko.vn@mail.ru

Abstract. It is shown that the analysis of controllability and observability of a linear stationary system with many inputs and many outputs by reduction of the system models is reduced to the analysis of controllability and observability of systems with substantially lower dimensionality of the state space. The limiting case of reduction is scalar systems.
Keywords: linear stationary systems; controllability; observability; reduction of systems.

For citation: Zubov, N.E., Ryabchenko, V.N. (2025) On reduction of modal tests on controllability and observability of MIMO system. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 73. pp. 15–22. doi: 10.17223/19988605/73/2

Введение

Рассмотрим линейную стационарную систему с многими входами и многими выходами (MIMO-систему)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad (1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $u(t) \in \mathbb{R}^r$ – вектор управления; $y(t) \in \mathbb{R}^m$ – вектор выхода; $\operatorname{rank} B = r$, $\operatorname{rank} C = m$.

Известными (модальными) критериями управляемости и наблюдаемости (1) являются тесты Попова–Белевича–Хотиса (PBH-tests) [1. С. 265]. Согласно этим тестам для управляемости и наблюдаемости MIMO-системы необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall\lambda \in \mathbb{C}: \ \operatorname{rank}\left[A-\lambda I_n \;\vdots\; B\right] = n, \tag{2}$$

$$\forall\lambda \in \mathbb{C}: \ \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A-\lambda I_n \\ \hdashline C \end{bmatrix} = n. \tag{3}$$

Заметим, что условие $\forall\lambda \in \mathbb{C}$ может быть заменено на $\forall\lambda \in \operatorname{eig}(A)$, где множество собственных значений матрицы A

$$\operatorname{eig}(A) = \left\{\lambda_i \middle| \det\left(A-\lambda_i I_n\right) = 0\right\}.$$

В практических задачах анализа управляемости и наблюдаемости больших линейных многомерных систем (Large Scale Systems), которые характерны для электроэнергетики [2–4], зачастую встречаются ситуации, когда размерность векторов управления и выхода сопоставима с размерностью пространства состояний, т.е. $r \approx n$, $m \approx n$. В этом случае стандартные тесты на управляемость системы (1) представляют собой высокоразмерные плохо обусловленные задачи.

Сходные трудности возникают в MIMO-системах, где некоторые элементы представлены неопределенными параметрами (так называемые параметризованные системы).

Цель данной работы – распространение предложенного в работе [2] подхода для энергетических систем в общем случае на MIMO-системы, который основан на построении цепочки преобразований (редукций), что позволяло бы выносить суждение об управляемости и наблюдаемости системы (1) на основе изучения управляемости и наблюдаемости систем существенно меньшей размерности состояний.

1. Редукция тестов при анализе управляемости

Известно, что любую числовую матрицу $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$ ранга r можно привести к виду [5, 6]

$$\begin{bmatrix} I_r \\ \hdashline 0_{(n-r)\times r} \end{bmatrix}$$

путем невырожденного преобразования T вида

$$T = \begin{bmatrix} B^+ \\ \hdashline L_0 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

где B^+ – псевдообратная по Муру–Пенроузу матрица [7], L_0 –максимальное решение однородного уравнения [8, 9]

$$L_0 B = 0_{(n-r)\times r}.$$

Используя (4), осуществим преобразование матрицы $\left[A-\lambda I_n \;\vdots\; B\right]$ по типу

$$T\left[A-\lambda I_n \;\vdots\; B\right] = \begin{bmatrix} B^+ \\ \hdashline L_0 \end{bmatrix}\left[A-\lambda I_n \;\vdots\; B\right]. \tag{5}$$

Раскрывая правую часть (5), получим

$$\begin{bmatrix} B^+ \\ \hdashline L_0 \end{bmatrix}\left[A-\lambda I_n \;\vdots\; B\right] = \left[\begin{array}{c:c} B^+\left(A-\lambda I_n\right) & I_r \\ \hdashline L_0\left(A-\lambda I_n\right) & 0_{(n-r)\times r} \end{array}\right],$$

при этом в силу невырожденности матрицы (4)

$$\operatorname{rank}\left[A-\lambda I_n \;\vdots\; B\right] = \operatorname{rank}\left[\begin{array}{c:c} B^+\left(A-\lambda I_n\right) & I_r \\ \hdashline L_0\left(A-\lambda I_n\right) & 0_{(n-r)\times r} \end{array}\right]. \tag{6}$$

Как следует из структуры (6), подматрица

$$\left[B^+\left(A-\lambda I_n\right) \;\vdots\; I_r\right]$$

при любых λ имеет ранг *r*. Поэтому для выполнения условия (2) необходимо и достаточно, чтобы ранг подматрицы $L_0\left(A-\lambda I_n\right)$ удовлетворял требованию

$$\forall\lambda\in\mathbb{C}:\ \ \mathrm{rank}\ L\left(A-\lambda I_n\right)=n-r\,.$$

Введем в рассмотрение невырожденную матрицу

$$T_1=\left[L^+\ \vdots\ B\right],$$

как видно, удовлетворяющую уравнению

$$L_0T_1=L\left[L_0^+\ \vdots\ B\right]=\left[I_{n-r}\ \vdots\ 0_{(n-r)\times r}\right].$$

Осуществим далее невырожденное преобразование подматрицы $L_0\left(A-\lambda I_n\right)$ по типу

$$L_0\left(A-\lambda I_n\right)T_1=L_0\left(A-\lambda I_n\right)\left[L_0^+\ \vdots\ B\right].\tag{7}$$

Раскроем правую часть (7):

$$L\left(A-\lambda I_n\right)\left[L^+\ \vdots\ B\right]=\left[LAL^+-\lambda I_{n-r}\ \vdots\ LAB\right].\tag{8}$$

При этом, как и в предыдущем случае (6),

$$\mathrm{rank}\ L_0\left(A-\lambda I_n\right)=\mathrm{rank}\left[L_0AL_0^+-\lambda I_{n-r}\ \vdots\ L_0AB\right].\tag{9}$$

Сравнивая правые части из (2) и (9), приходим к справедливости следующего утверждения.

Лемма 1. *MIMO-система* (1) *управляема, если и только если выполняются эквивалентные условия:*

A: *управляема система*

$$\dot{x}_1(t)=L_0AL_0^+x_1(t)+L_0ABu_1(t)\,,\tag{10}$$

где $x_1(t)\in\mathbb{R}^{n-r}$ *– вектор состояния;* $u_1(t)\in\mathbb{R}^{r}$ *– вектор управления;*

B:

$$\forall\lambda\in\mathrm{eig}\left(LAL^+\right):\ \ \mathrm{rank}\left[L_0AL_0^+-\lambda I_{n-r}\ \vdots\ L_0AB\right]=n-r\,,\tag{11}$$

где $\mathrm{eig}\left(L_0AL_0^+\right)$ *– множество собственных значений матрицы* $L_0AL_0^+$.

Как видно, в результате проведенных преобразований произошла редукция размерности пространства состояний с *n* до величины *n – r*. Более того, если

$$\mathrm{rank}\ L_0AB=n-r\le r\,,$$

то (10) является управляемой независимо от вида и свойств матрицы LAL^+.

Отметим также, что в общем случае очевидным является соотношение $\mathrm{eig}\left(LAL^+\right)\not\subset\mathrm{eig}(A)$.

Введем новые обозначения:

$$A_1=L_0AL_0^+,\quad B_1=L_0AB,\quad n-r=n_1,\quad \mathrm{rank}\ L_0AB=r_1\,.\tag{12}$$

С учетом (12) условие управляемости системы (11) примет вид:

$$\forall\lambda\in\Lambda(A_1):\ \ \mathrm{rank}\left[A_1-\lambda I_{n_1}\ \vdots\ B_1\right]=n_1\,.$$

Далее нам понадобятся максимальные решения следующих матричных уравнений:

$$\begin{aligned}&L_1B_1=0_{(n_1-r_1)\times r_1},\\&B_1R_1=0_{n_1\times(r-r_1)},\\&J_1^LB_1J_1^R=I_{r_1},\end{aligned}\tag{13}$$

относительно матриц $L_1,\ J_1^L,\ R_1,\ J_1^R$. Отметим, что уравнения (13) разрешимы для любой ненулевой матрицы над $\mathbb{R}$, при этом существуют (неединственные) невырожденные блочные матрицы [5]

$$T_1^L=\begin{bmatrix}J_1^L\\ \hdashline L_1\end{bmatrix},\quad T_1^R=\left[J_1^R\ \vdots\ R_1\right].\tag{14}$$

Как следует из (13), преобразование вида

$$T_1^LB_1T_1^R$$

с учетом (14) приводит к тождеству

$$T_1^L B_1 T_1^R = \left[\begin{array}{c} J_1^L \\ \hdashline L_1 \end{array}\right] B_1 \left[\begin{array}{c:c} J_1^R & R_1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} I_{r_1} & 0_{r_1 \times (r-r_1)} \\ \hdashline 0_{(n_1-r_1)\times r_1} & 0_{(n_1-r_1)\times(r-r_1)} \end{array}\right]. \tag{15}$$

Применяя данное преобразование к матрице $\left[\begin{array}{c:c} A_1 - \lambda I_{n_1} & B_1 \end{array}\right]$, с учетом (15) получим

$$\left[\begin{array}{c} J_1^L \\ \hdashline L_1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c:c} A_1 - \lambda I_{n_1} & B_1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c:c} J_1^R & R_1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c:c:c} J_1^L\left(A_1 - \lambda I_{n_1}\right)J_1^R & J_1^L\left(A_1 - \lambda I_{n_1}\right)R_1 & I_{r_1} & 0_{r_1\times(r-r_1)} \\ \hdashline L_1\left(A_1 - \lambda I_{n_1}\right)J_1^R & L_1\left(A_1 - \lambda I_{n_1}\right)R_1 & 0_{(n_1-r_1)\times r_1} & 0_{(n_1-r_1)\times(r-r_1)} \end{array}\right]. \tag{16}$$

Анализ (16) показывает, что в данном случае справедлива цепочка ранговых условий

$$\begin{aligned} &\operatorname{rank}\left[\begin{array}{c:c:c:c} J_1^L\left(A_1 - \lambda I_{n_1}\right)J_1^R & J_1^L\left(A_1 - \lambda I_{n_1}\right)R_1 & I_{r_1} & 0_{r_1\times(r-r_1)} \\ \hdashline L_1\left(A_1 - \lambda I_{n_1}\right)J_1^R & L_1\left(A_1 - \lambda I_{n_1}\right)R_1 & 0_{(n_1-r_1)\times r_1} & 0_{(n_1-r_1)\times(r-r_1)} \end{array}\right] = \\ &= \operatorname{rank}\left[\begin{array}{c:c:c:c} J_1^L\left(A_1 - \lambda I_{n_1}\right)J_1^R & J_1^L\left(A_1 - \lambda I_{n_1}\right)R_1 & I_{r_1} & 0_{r_1\times(r-r_1)} \end{array}\right] + \\ &+ \operatorname{rank}\left[\begin{array}{c:c:c:c} L_1\left(A_1 - \lambda I_{n_1}\right)J_1^R & L_1\left(A_1 - \lambda I_{n_1}\right)R_1 & 0_{(n_1-r_1)\times r_1} & 0_{(n_1-r_1)\times(r-r_1)} \end{array}\right] = \\ &= r_1 + \operatorname{rank}\left[\begin{array}{c:c} L_1\left(A_1 - \lambda I_{n_1}\right)J_1^R & L_1\left(A_1 - \lambda I_{n_1}\right)R_1 \end{array}\right] = \\ &= r_1 + \operatorname{rank} L_1\left(A_1 - \lambda I_{n_1}\right)\left[\begin{array}{c:c} J_1^R & R_1 \end{array}\right] = \\ &= r_1 + \operatorname{rank} L_1\left(A_1 - \lambda I_{n_1}\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Как видно, структура матрицы $L_1\left(A_1 - \lambda I_{n_1}\right)$ из (17) в точности соответствует структуре матрицы $L\left(A - \lambda I_n\right)$ из (8).

Это позволяет нам сформулировать еще одну лемму.

Лемма 2. *MIMO-системы* (1), (10) *управляемы, если и только если выполняются эквивалентные условия:*

A: *управляема система*

$$\dot{x}_2(t) = L_1 A_1 L_1^+ x_2(t) + L_1 A_1 R_{L_1} u_2(t),$$

где $x_2(t) \in \mathbb{R}^{n_1 - r_1}$ *– вектор состояния;* $u_2(t) \in \mathbb{R}^{r_1}$ *– вектор управления;* R_{L_1} *– максимальное решение уравнения*

$$L_1 R_{L_1} = 0_{(n_1-r_1)\times r_1};$$

B:

$$\forall\lambda \in \operatorname{eig}\left(L_1 A_1 L_1^+\right):\ \operatorname{rank}\left[\begin{array}{c:c} L_1 A_1 L_1^+ - \lambda I_{n_1 - r} & L_1 A_1 R_{L_1} \end{array}\right] = n_1 - r_1,$$

где $\operatorname{eig}\left(L_1 A_1 L_1^+\right)$ *– множество собственных значений матрицы* $L_1 A_1 L_1^+$.

Продолжая рассуждения по индукции, приходим к следующей теореме, справедливость которой нами фактически доказана.

Теорема 1. *MIMO-система* (1) *управляема, если и только если управляемо множество MIMO-систем*

$$\dot{x}_i(t) = L_{i-1} A_{i-1} L_{i-1}^+ x_i(t) + L_{i-1} A_{i-1} R_{L_{i-1}} u_i(t), \quad i = \overline{1, n-r},$$

где $x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i - r_i}$ *– вектор состояния i-й системы;* $u_i(t) \in \mathbb{R}^{r_i}$ *– вектор управления i-й системы;* $n_i = n_{i-1} - r_{i-1}$, $r_i = \operatorname{rank} L_{i-1} A_{i-1} R_{i-1}$; L_{i-1}, $R_{L_{i-1}}$ *– максимальные решения соответственно уравнений*

$$L_{i-1} R_{i-1} = 0_{(n_{i-1} - r_{i-1})\times r_{i-1}},$$

$$L_{i-1} R_{L_{i-1}} = 0_{(n_{i-1} - r_{i-1})\times r_{i-1}},$$

$A_0 = A$, $R_0 = B$, $n_0 = n$, $r_0 = r$.

Из теоремы вытекает легко доказываемое следствие.

Следствие 1. *MIMO-система* (1), *где* $n>1$, $u(t)\in\mathbb{R}^1$ *– скаляр, управляема, если и только если управляема скалярная система*

$$\dot{x}_{n-1}(t)=L_{n-2}A_{n-2}L_{n-2}^{+}x_{n-1}(t)+L_{n-2}A_{n-2}R_{L_{n-2}}u_{n-1}(t)\,, \tag{18}$$

т.е. в (18) *скаляр* $L_{n-1}A_{n-1}R_{L_{n-1}}\neq 0$.

В качестве методического числового примера рассмотрим две SIMO-системы, каждая из которых являются предельным вариантом MIMO-системы (1) с матрицами

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&2&3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \tag{19}$$

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&2&3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}. \tag{20}$$

Первая из данных систем – управляема, а вторая – нет.

В результате преобразований, выполненных по теореме 1, приходим к двум скалярным системам

$$\dot{x}_2=u_2(t)\,, \tag{21}$$

$$\dot{x}_2=x_2(t)\,. \tag{22}$$

Система (21) соответствует редукции состояния (19), а система (22) – (20). Очевидно, что (21) – управляема, а (22) – неуправляема. Это и требовалось показать.

2. Редукция тестов при анализе наблюдаемости

Для решения задачи редукции размерности состояния при анализе наблюдаемости MIMO-системы (1) воспользуемся преобразованиями матрицы (3), дуализированными к выполненным в предыдущем разделе преобразованиям матрицы (2). В результате придем к теореме.

Теорема 2. *MIMO-система* (1) *наблюдаема, если и только если наблюдаемо множество MIMO-систем*

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t)&=R_{i-1}^{+}A_{i-1}R_{i-1}x_i(t),\\ y_i(t)&=L_{R_{i-1}}A_{i-1}R_{i-1}x_i(t),\quad i=\overline{1,\,n-m},\end{aligned}$$

где $x_i(t)\in\mathbb{R}^{n_i-r_i}$ *– вектор состояния i-й системы;* $y_i(t)\in\mathbb{R}^{m_i}$ *– вектор выхода i-й системы;* $n_i=n_{i-1}-m_{i-1}$, $m_i=\operatorname{rank}L_{R_{i-1}}A_{i-1}R_{i-1}$; R_{i-1}, $L_{R_{i-1}}$ *– максимальные решения соответственно уравнений*

$$L_{i-1}R_{i-1}=0_{m_{i-1}\times(n_{i-1}-m_{i-1})}\,, \tag{23}$$

$$L_{R_{i-1}}R_{i-1}=0_{m_{i-1}\times(n_{i-1}-m_{i-1})}\,, \tag{24}$$

$A_0=A$, $L_0=C$, $n_0=n,$ $m_0=m$.

Следствие 2. *MIMO-система* (1), *где* $n>1$, $y(t)\in\mathbb{R}^1$ *– скаляр, наблюдаема, если и только если наблюдаема скалярная система*

$$\begin{aligned}\dot{x}_{n-1}(t)&=R_{n-2}^{+}A_{n-2}R_{n-2}x_{n-1}(t),\\ y_{n-1}(t)&=L_{R_{n-2}}A_{n-2}R_{n-2}x_{n-1}(t),\end{aligned} \tag{25}$$

т.е. в (25) *скаляр* $L_{R_{n-2}}A_{n-2}R_{n-2}\neq 0$.

На основе данной теоремы осуществим анализ наблюдаемости следующей модели, описывающей поведение электроэнергетической системы [10]:

$$A = \begin{bmatrix} -G_1 M_1^{-1} & 0 & -M_1^{-1} & 0 & 0 & M_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -G_2 M_2^{-1} & M_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & M_2^{-1} \\ T_{12} & -T_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -E_1 T_{g_1}^{-1} & 0 & 0 & -T_{g_2}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E_2 T_{g_2}^{-1} & 0 & 0 & -T_{g_2}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{t_1}^{-1} & 0 & -T_{t_1}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_{t_2}^{-1} & 0 & -T_{t_2}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2D_2^{-1} & 0 & 2\left(D_2^{-1} + T_{t_2}^{-1}\right) & -2D_2^{-1} \end{bmatrix}, \tag{26}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[I_3 \;\vdots\; 0_{3\times5} \right]. \tag{27}$$

Определим решения однородных уравнений (23), (24) для $i = 1$. Сначала рассмотрим уравнение

$$CR_0 = 0_{3\times5}$$

с матрицей C (27). Получим

$$R_0 = \begin{bmatrix} 0_{3\times5} \\ I_5 \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Подставим матрицу (28) в уравнение (24):

$$L_{R_0} R_0 = 0_{3\times5},$$

и решим его относительно матрицы L_{R_0}. Будем иметь

$$L_{R_0} = \left[I_3 \;\vdots\; 0_{3\times5} \right] = C.$$

Из (28) также следует, что

$$R_0^+ = R_0^{\mathrm{T}} = \left[0_{5\times3} \;\vdots\; I_5 \right].$$

Теперь можно свести анализ наблюдаемости (26), (27) к анализу наблюдаемости системы

$$\dot{x}_1(t) = R_0^+ A R_0 x_1(t),$$
$$y_1(t) = L_{R_0} A R_0 x_1(t),$$

где

$$R_0^+ A R_0 = A_1 = \begin{bmatrix} -T_{g_2}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -T_{g_2}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ T_{t_1}^{-1} & 0 & -T_{t_1}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & T_{t_2}^{-1} & 0 & -T_{t_2}^{-1} & 0 \\ 0 & -2D_2^{-1} & 0 & 2\left(D_2^{-1} + T_{t_2}^{-1}\right) & -2D_2^{-1} \end{bmatrix},$$

$$L_{R_0} A R_0 = C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & M_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_2^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Осуществляя далее аналогичные преобразования для $i = 2$, придем к анализу наблюдаемости системы

$$\dot{x}_2(t) = R_1^+ A_1 R_1 x_2(t),$$
$$y_2(t) = L_{R_1} A_1 R_1 x_2(t),$$

где

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_1^+ = R_1^{\mathrm{T}}, \quad L_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и

$$R_1^+ A_1 R_1 = A_2 = \begin{bmatrix} -T_{g_2}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -T_{g_2}^{-1} & 0 \\ 0 & T_{t_2}^{-1} & -T_{t_2}^{-1} \end{bmatrix}, \tag{29}$$

$$L_{R_1} A_1 R_1 = C_2 = \begin{bmatrix} T_{t_1}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -2D_2^{-1} & 2\left(D_2^{-1} + T_{t_2}^{-1}\right) \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Итак, анализ наблюдаемости MIMO-системы с матрицами (26), (27) и $x(t) \in \mathbb{R}^8$, $y(t) \in \mathbb{R}^3$ сведен к анализу наблюдаемости MIMO-системы с матрицами (29), (30) и $x_2(t) \in \mathbb{R}^3$, $y_2(t) \in \mathbb{R}^2$.

Если осуществить еще одну редукцию, то получим MIMO-систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_3(t) &= R_2^+ A_2 R_2 x_3(t), \\ y_3(t) &= L_{R_2} A_2 R_2 x_3(t), \end{aligned} \tag{31}$$

где

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{2D_2^{-1}}{2\left(D_2^{-1} + T_{t_2}^{-1}\right)} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad R_2^+ = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{2D_2^{-1}}{2\left(D_2^{-1} + T_{t_2}^{-1}\right)}\right)^2} \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{2D_2^{-1}}{2\left(D_2^{-1} + T_{t_2}^{-1}\right)} & 1 \end{bmatrix},$$

$$L_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\dfrac{2D_2^{-1}}{2\left(D_2^{-1} + T_{t_2}^{-1}\right)} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

и

$$R_2^+ A_2 R_2 = A_3 \in \mathbb{R}^1 \neq 0, \qquad L_{R_2} A_2 R_2 = C_3 \in \mathbb{R}^2 \neq 0\,. \tag{32}$$

Как видно, MIMO-система (31) с параметрами (32) всегда наблюдаема, поэтому в силу теоремы 2 MIMO-система (1) с матрицами (26), (27) также является наблюдаемой.

Заключение

В работе доказаны утверждения, согласно которым анализ управляемости и наблюдаемости исходной MIMO-системы путем редукции может быть сведен к анализу управляемости и наблюдаемости MIMO-систем с существенно меньшей размерностью пространства состояний. В предельном случае анализ исходной MIMO-системы сводится к анализу скалярных систем.

Список источников

1. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М. : Наука, 2002.
2. Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Редукция размерности состояния при анализе управляемости и наблюдаемости линейных моделей энергосистем // Известия ТРГУ. 2005. Т. 55, № 11. С. 45–54.

3. Гуссейнов Ф.Г. Упрощение расчетных схем электрических систем. М. : Энергия. 1978.
4. Kundur P. Power system stability and control. McGraw-Hill, Inc., 1994.
5. Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н. Матричные методы в теории и практике систем автоматического управления летательных аппаратов. М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016.
6. Мисриханов М.Ш. Ленточные критерии управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем // Вестник ИГЭУ. 2002. Вып. 3. С. 61–69.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М. : Наука, 1987.
8. Уонем М. Линейные многомерные системы управления: геометрический подход. М. : Наука, 1980.
9. Тауфер И. Решение граничных задач для систем линейных дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1981.
10. Christensen G.S., El-Hawary M.E., Soliman S.A. Optimal Control Applications Electric Power Systems. New York ; London : Plenum Press, 1987.

References

1. Polyak, B.T. & Shcherbakov, P.S. (2002) *Robastnaya ustoychivost' i upravlenie* [Robust Stability and Control]. Moscow: Nauka.
2. Misrikhanov, M.Sh. & Ryabchenko, V.N. (2005) Reduktsiya razmernosti sostoyaniya pri analize upravlyaemosti i nablyudaemosti lineynykh modeley energosistem [State Dimension Reduction in the Analysis of Controllability and Observability of Linear Power System Models]. *Izvestiya TRGU.* 55(11). pp. 45–54.
3. Guseynov, F.G. (1978) *Uproshchenie raschetnykh skhem elektricheskikh sistem* [Simplification of calculation schemes of electrical systems]. Moscow: Energiya.
4. Kundur, P. (1994) *Power System Stability and Control*. McGraw-Hill, Inc.
5. Zubov, N.E., Mikrin, E.A. & Ryabchenko, V.N. (2016) *Matrichnye metody v teorii i praktike sistem avtomaticheskogo upravleniya letatel'nykh apparatov* [Matrix methods in the theory and practice of automatic control systems of aircraft]. Moscow: Bauman Moscow State Technical University.
6. Misrikhanov, M.Sh. (2002) Lentochmye kriterii upravlyayemosti i nablyudayemosti lineynykh dinamicheskikh system [Tape criteria of controllability and observability of linear dynamic systems]. *Vestnik IGEU.* 3. pp. 61–69.
7. Gantmacher, F.R. (1987) *Teoriya matrits* [The Theory of Matrices]. Moscow: Nauka.
8. Wonham, W.M. (1980) *Lineynye mnogomernye sistemy upravleniya: geometricheskiy podkhod* [Linear Multivariable Control: A Geometric Approach]. Translated from English. Moscow: Nauka.
9. Taufer, I. (1981) *Reshenie granichnykh zadach dlya sistem lineynykh differentsial'nykh uravneniy* [Solution of Boundary Problems for Systems of Linear Differential Equations]. Moscow: Nauka.
10. Christensen, G.S., El-Hawary, M.E. & Soliman, S.A. (1987) *Optimal Control Applications Electric Power Systems*. New York & London: Plenum Press.

***Информация об авторах*:**
Зубов Николай Евгеньевич – профессор, доктор технических наук, декан факультета «Ракетно-космическая техника», профессор кафедры «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Москва, Россия). E-mail: nik.zubov@gmail.com
Рябченко Владимир Николаевич – доцент, доктор технических наук, профессор кафедры «Системы автоматического управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Москва, Россия). E-mail: ryabchenko.vn@mail.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

***Information about the authors*:**
Zubov Nikolay E. (Professor, Doctor of Technical Sciences, Dean of Rocket and Space Techniques Faculty, Professor of Department of Automatic Control Systems at Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation). E-mail: nik.zubov@gmail.com
Ryabchenko Vladimir N. (Associate Professor, Doctor of Technical Sciences, Professor of Department of the Automatic Control Systems at Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation). E-mail: ryabchenko.vn@mail.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 21.04.2025; принята к публикации 02.12.2025

Received 21.04.2025; accepted for publication 02.12.2025