

Научная статья

УДК 532.517.2, 66.063.8

doi: 10.17223/19988621/98/7

## Численное моделирование течений неньютоновской жидкости в аппарате с лопастными мешалками

Евгений Иванович Борзенко<sup>1</sup>, Дмитрий Николаевич Гарбузов<sup>2</sup>,  
Максим Андреевич Ефремов<sup>3</sup>

*<sup>1, 2, 3</sup> Томский государственный университет, Томск, Россия*

*<sup>1</sup> borzenko@ftf.tsu.ru*

*<sup>2</sup> dmitrij.garbuzov.98@mail.ru*

*<sup>3</sup> 33murman@gmail.com*

**Аннотация.** Проведено численное моделирование течения неньютоновской жидкости в смесительном аппарате лопастного типа. В основе численного решения задачи лежат метод контрольного объема и корректирующая процедура SIMPLE. Продемонстрирована кинематика потока в аппаратах с одно-, двух- и четырехлопастной мешалкой. Дополнительно решена задача о перераспределении ансамбля маркерных частиц с течением времени. Количественно смещение исследовалось с помощью числа мощности и оригинальной характеристики неоднородности. Выполнены параметрические исследования зависимости рассматриваемого течения от основных безразмерных параметров задачи.

**Ключевые слова:** смещение, модель Шведова–Бингама, неньютоновская жидкость, анализ качества смещения

**Благодарности:** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-29-00594).

**Для цитирования:** Борзенко Е.И., Гарбузов Д.Н., Ефремов М.А. Численное моделирование течений неньютоновской жидкости в аппарате с лопастными мешалками // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2025. № 98. С. 70–83. doi: 10.17223/19988621/98/7

Original article

## Numerical modeling of non-newtonian fluid flows in an apparatus with blade mixers

Evgeniy I. Borzenko<sup>1</sup>, Dmitriy N. Garbuzov<sup>2</sup>, Maksim A. Efremov<sup>3</sup>

*<sup>1, 2, 3</sup> Tomsk State University, Tomsk, Tomsk, Russian Federation*

*<sup>1</sup> borzenko@ftf.tsu.ru*

<sup>2</sup> dmitrij.garbuзов.98@mail.ru

<sup>3</sup> 33murman@gmail.com

**Abstract.** A numerical simulation of the non-Newtonian fluid flow in a paddle-type mixer is performed in a two-dimensional approximation. The rheological behavior of the medium is described using the Shvedov-Bingham model. The numerical solution is based on the finite volume method and the SIMPLE correction procedure implemented on an orthogonal grid. The singularity of the rheological law associated with the infinite viscosity in the regions with zero strain rates is eliminated using Papanastasiou regularization. The flow kinematics in mixers with one, two, and four blades is demonstrated, characterized by the formation of unyielded regions and stagnant zones near the mixer boundaries and the vessel walls. In addition, the problem of marker-particle redistribution over time is solved, allowing for a qualitative assessment of the mixing dynamics. The characteristic mixing modes of the markers are determined. The mixing process is quantitatively analyzed using the power number and a unique heterogeneity characteristics. Parametric studies of the flow are performed with respect to the main dimensionless parameters of the problem.

**Keywords:** mixing, Shvedov-Bingham model, non-Newtonian fluids, mixing quality analysis

**Acknowledgments:** This work was partially supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-79-10028), <https://rscf.ru/project/24-29-00594/>

**For citation:** Borzenko, E.I., Garbuзов, D.N., Efremov, M.A. (2025) Numerical modeling of non-newtonian fluid flows in an apparatus with blade mixers. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 98. pp. 70–83. doi: 10.17223/19988621/98/7

## Введение

Смесительные аппараты играют большую роль в различных технологических процессах в химической, пищевой, строительной и других индустриях [1] на этапах смешения исходных компонентов и диспергирования твердых частиц и газовых пузырьков, при этом жидкие среды часто демонстрируют сложное реологическое поведение. Вязкопластичные жидкости характеризуются формированием в потоке квазитвердых ядер или застойных зон в областях малых скоростей деформации [2], которые существенно влияют на качество и скорость процесса смешения.

В литературе существует достаточно большое число экспериментальных исследований течений вязкопластичных жидкостей в аппаратах с мешалками, например [3–5]. Однако такой подход зачастую является дорогостоящим и сложным в реализации и не позволяет получать полную информацию о распределении изучаемых характеристик по объему. Теоретические методы исследования с использованием аппарата вычислительной гидродинамики, наоборот, дают эту информацию, но при этом требуют экспериментальной верификации. Характерной особенностью большинства численных методов является регуляризация реологического закона [6, 7], связанная с преодолением особенности бесконечных значений вязкости в квазитвердых ядрах. Численное моделирование процесса течения жидкости в смесителях якорного типа выполнено в работах [8–10] с использованием коммерческих пакетов, а процесс смешения оценивается с использованием числа мощности.

Исследования процесса перемешивания неньютоновской среды с пределом текучести и высокой вязкостью с использованием якорных мешалок представлены в [10, 11].

Цель настоящей работы – численное моделирование двумерного течения вязкопластичной жидкости в смесительном аппарате лопастного типа и исследование кинематики потока, распределения областей квазитвердого движения и застойных зон, а также анализ структуры течения посредством решения задачи о перераспределении ансамбля маркерных частиц со временем.

### Постановка задачи

Движение высоковязких сред в смесительных аппаратах можно разложить на три составляющие: радиальную, тангенциальную и осевую, количественное соотношение которых зависит от геометрических, реологических и технологических параметров. При низких значениях числа Рейнольдса в исследуемой области преобладают радиальная и тангенциальная составляющие [12, 13], что оправдывает допущение о двумерной постановке. Рассматривается плоское течение Бингамовской жидкости в смесительном аппарате, имеющем форму круга радиуса  $R$  (м), на оси которого расположена вращающаяся с постоянной угловой скоростью  $\omega$  ( $\text{с}^{-1}$ ) одно-, двух- или четырехлопастная мешалка (рис. 1).

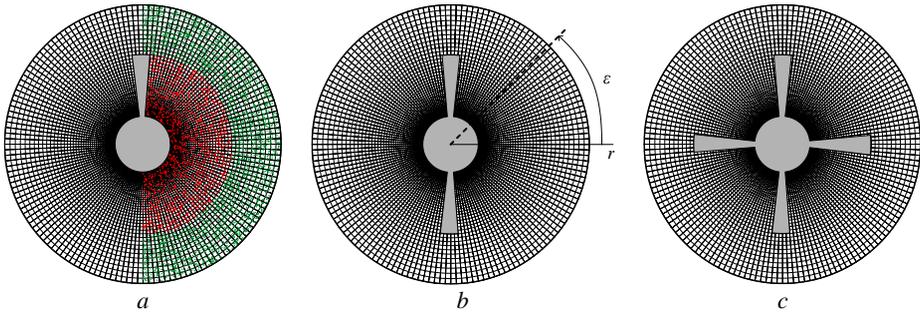


Рис. 1. Область течения и расчетная сетка: однолопастной (а), двухлопастной (b), четырехлопастной (c) смеситель

Fig. 1. Flow area and calculation grid: single-bladed (a), two-bladed (b), four-bladed (c) mixer

Математическая постановка задачи включает уравнения движения и неразрывности, записанные в безразмерном виде, с использованием следующих масштабов: длины  $R$ , времени  $\omega^{-1}$ , скорости  $\omega R$ , давления  $\rho \omega^2 R$ , вязкости  $\mu_0$ . Здесь  $\mu_0$  (Па с) – параметр реологической модели,  $\rho$  ( $\text{кг}/\text{м}^3$ ) – плотность жидкости. Для упрощения реализации численной методики выполняется переход в систему отсчета, связанную с мешалкой, который обеспечивает неподвижность границ области решения. В итоге система уравнений записывается в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \nabla \cdot \left( -p \mathbf{I} + \frac{2}{\text{Re}} \mu(I_2) \mathbf{E} \right) - 2\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0.$$

Здесь  $\mathbf{V}$  – вектор скорости,  $p$  – гидродинамическое давление,  $t$  – время,  $\mathbf{I}$  – единичный тензор,  $\mathbf{E}$  – тензор скоростей деформаций,  $\boldsymbol{\omega}_0$  – безразмерный вектор угловой

скорости,  $Re = \rho\omega R^2/\mu_0$  – число Рейнольдса. Последние два слагаемых в уравнении движения связаны с неинерциальностью используемой системы отсчета.

Система замыкается реологическим уравнением Шведова–Бингама, согласно которому безразмерная эффективная вязкость  $\mu$  определяется формулой

$$\mu = \frac{Bn + I_2}{I_2}, \quad (2)$$

где  $I_2$  – второй инвариант тензора скоростей деформации,  $Bn = \tau_0/\mu_0\omega$  – число Бингама,  $\tau_0$  (Па) – предел текучести. В качестве граничных условий на твердых стенках используются условия прилипания. При реализации численной методики уравнения (1) проектируются на оси полярной системы координат  $(r, \varepsilon)$ , представленные на рис. 1, *b*.

Процесс смешения анализируется с помощью ансамбля маркерных частиц двух сортов (отмечены красным и зеленым цветом на рис. 1, *a*), которые в начальный момент времени располагаются в выделенной области  $(\pi/2 \leq \varepsilon \leq \pi/2)$  случайным образом. Число частиц в ансамбле бралось равным 5 000. Уравнения движения маркеров записаны с учетом предположения, что их скорость совпадает со скоростью жидкости, и частицы не оказывают на течение никакого влияния и не взаимодействуют друг с другом:

$$\frac{dr_p}{dt} = V(r_p, \varepsilon_p), \quad r_p \frac{d\varepsilon_p}{dt} = U(r_p, \varepsilon_p), \quad (3)$$

где  $r_p, \varepsilon_p$  – полярные координаты маркерной частицы,  $V, U$  – радиальная и тангенциальная составляющие вектора скорости. В начальный момент времени скорости как для красных, так и для зеленых частиц задавались равными скорости жидкости в данной точке пространства. Данное предположение адекватно описывает процесс диспергирования твердых частиц субмиллиметровых размеров с небольшими значениями объемной концентрации [14].

Используемые в работе значения безразмерных критериев  $Re$  и  $Bn$  соответствуют случаям ламинарных течений полимерных жидкостей в промышленных и лабораторных смесительных аппаратах с умеренными скоростями вращения мешалки.

Решение задачи заключается в отыскании установившихся полей скорости и давления, а также построении областей квазитвердого движения, в которых уровень напряжений не превышает предела текучести. Оценка качества смешения выполняется по картине перераспределения маркеров по всей области течения.

### Метод решения

Поставленная задача решается численно. Область решения дискретизируется с помощью ортогональной разнесенной сетки с неравномерным шагом по радиусу и равномерным шагом по углу для сохранения пропорциональных размеров контрольного объема по мере роста радиальной координаты (см. рис. 1). В данной работе используется сетка, состоящая из 12 500 контрольных объемов. Дифференциальные уравнения (1) дискретизируются с помощью метода контрольного объема. Уравнение неразрывности удовлетворяется с использованием корректирующей процедуры SIMPLE [15]. Для определения стационарных полей скорости и давления применяется метод установления. С целью устранения сингулярных значений

эффективной вязкости в областях малой интенсивности используется регуляризация, заключающаяся в введении в реологическое уравнение малого параметра  $\delta$ . Данная методика позволяет организовать сквозной счет без явного выделения границы квазитвердого движения. В настоящей работе используется следующая регуляризация [7]:

$$\mu = 1 + \frac{Bn}{I_2} (1 - \exp(-I_2 / \delta)),$$

Интегрирование уравнений (3) выполнялось с использованием схемы Рунге–Кутты второго порядка точности.

Проверка аппроксимационной сходимости разработанной программы расчета производилась на последовательности сеток для тестовой задачи о течении в смешительном аппарате без лопастей с внутренним радиусом  $r_0$  (коаксиальный зазор).

Дополнительно сформулирована задача об одномерном течении в коаксиальном зазоре:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \mu \left( \frac{dU}{dr} - \frac{U}{r} \right) \right) = 0, \quad (4)$$

$$U(r_0) = 0, \quad U(1) = 1,$$

которая имеет следующее аналитическое решение:

$$U = \begin{cases} \frac{Bn \cdot r_1^2}{2} r \left( \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) - Bn \cdot r \cdot \ln \frac{r}{r_0}, & r \leq r_1; \\ r, & r > r_1. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь  $r_1$  – координата границы квазитвердого ядра, примыкающего к внешней стенке, значение которой находится из решения следующего нелинейного уравнения:

$$\frac{Bn}{2} \left( \frac{r_1}{r_0} \right)^2 - Bn \cdot \ln \frac{r_1}{r_0} - \frac{Bn}{2} - 1 = 0. \quad (6)$$

В качестве характеристики оценки сходимости использовалось значение расхода через поперечное сечение (табл. 1). Порядок сходимости можно оценить по формуле

$$\log_2 \left( \left| \frac{Q_{40} - Q_{20}}{Q_{80} - Q_{40}} \right| \right) = 1.572.$$

Здесь  $Q_{20}$ ,  $Q_{40}$  и  $Q_{80}$  – расход, полученный на сетке с 20, 40 и 80 контрольными объемами на ширину зазора соответственно.

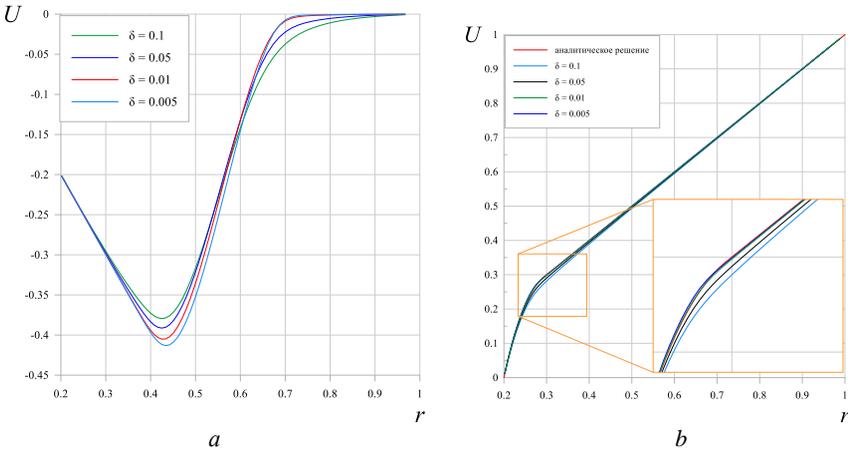
Таблица 1

**Расход через радиальное сечение в зависимости от количества узлов сетки ( $Bn = 5$ ,  $\delta = 0.01$ )**

N	20 × 78	40 × 156	80 × 313	Одномерная задача
$Q$	0.474751	0.473981	0.473722	0.473589
$r_l$	0.291275	0.296053	0.297578	0.295212

На рис. 2 представлены результаты расчета безлопастной и однолопастной мешалок при различных значениях параметра регуляризации на сетке  $80 \times 313$ , за контрольный параметр выбрана тангенциальная составляющая скорости  $U$ . Видно,

что кривые, полученные при  $\delta = 0.01$  и  $0.005$ , практически совпадают. Последующее уменьшение параметра регуляризации приводит к ухудшению устойчивости счета. Все дальнейшие расчеты получены при  $\delta = 0.01$  на сетках с 80 контрольными объемами на ширину зазора. Сравнение численных результатов, полученных с помощью предложенной методики, с данными других авторов представлено в [16].



**Рис. 2.** Распределение угловой компоненты вектора скорости: *a* – для коаксиального зазора при  $Bn = 5$ ; *b* – для однолопастного смесителя в сечении  $\varepsilon = 45^\circ$  при  $Bn = 20$  и  $Re = 1$

**Fig. 2.** Distribution of the angular component of the velocity vector (*a*) for the coaxial gap at  $Bn = 5$ , (*b*) for a single-bladed mixer in section  $\varepsilon = 45$  at  $Bn = 20$  and  $Re = 1$

## Результаты

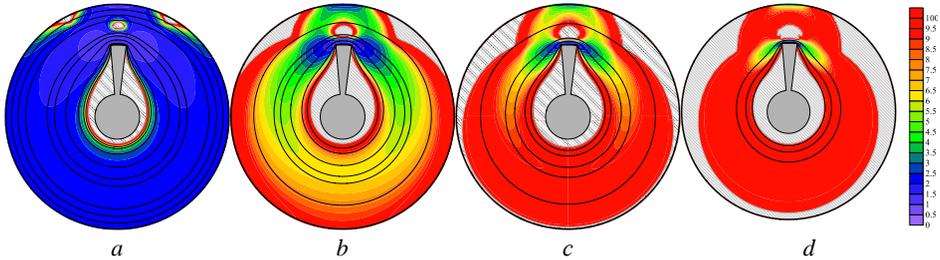
Характерным для Бингамовских жидкостей является формирование областей, в которых уровень напряжений не превышает предела текучести, и жидкость ведет себя как твердое тело. Эти зоны, называемые квазитвердыми ядрами, оказывают существенное влияние на структуру потока и качество смешения. Применительно к данной задаче геометрия границ ядер существенно зависит от конфигурации смесителя и безразмерных чисел Бингама и Рейнольдса. Количественное условие выделения квазитвердых ядер в безразмерной форме записывается следующим образом:

$$\mu I_2 < Bn, \quad (7)$$

и является аналогом условия выделения областей с уровнем напряжения, меньшим предела текучести.

Распределения квазитвердых ядер и полей эффективной вязкости для установившегося случая течения с ростом Бингама представлены на рис 3. Штриховкой выделены области квазитвердого движения. Сплошными линиями показаны линии тока. Видно, что при малых значениях числа Бингама ( $Bn = 1$ ) формируются одно внутреннее ядро вокруг лопасти и три локальных ядра, два из которых расположены симметрично на внешней стенке и еще одно – на некотором удалении над кромкой лопасти. При увеличении числа Бингама происходит симметричный рост ядер на внешних стенках, и при  $Bn = 10$  они смыкаются вдоль стенки. При этом во всех случаях наблюдается небольшая зона квазитвердого течения над лопастью.

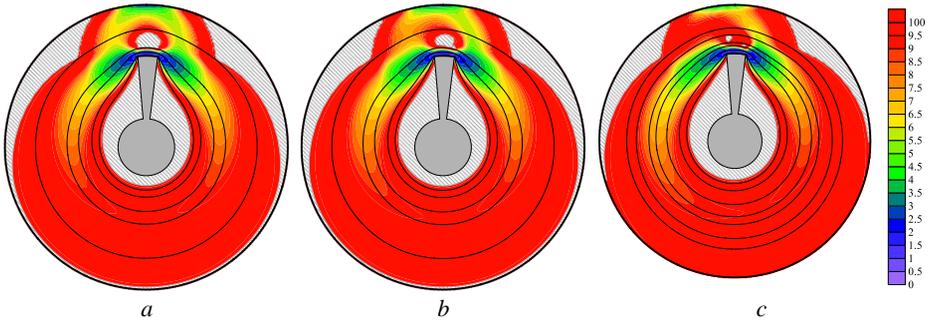
Дальнейшее увеличение числа Бингама сопровождается ростом ядер. Область минимальной вязкости, соответствующая области высокоинтенсивного течения, с ростом числа Бингама локализуется в окрестности верхней кромки лопасти.



**Рис. 3.** Эволюция ядер и поля эффективной вязкости с ростом числа Бингама при  $Re = 1$  и  $Bn = 1, 5, 10, 20$  (a–d)

**Fig. 3** Evolution of core and effective viscosity fields with increasing Bingham at  $Re = 1$  and (a), (b), (c), (d) –  $Bn = 1, 5, 10, 20$

С ростом числа Рейнольдса нарушается симметрия в расположении ядер наряду с уменьшением их размеров (рис. 4). При  $Re = 100$  ядро вокруг внешней стенки уже не сплошное, «надлопастное» ядро полностью разрушается.



**Рис. 4.** Эволюция ядер и поля эффективной вязкости с ростом числа Рейнольдса при  $Bn = 10$  и  $Re = 10, 40, 100$  (a–c)

**Fig. 4.** Evolution of core and effective viscosity fields with increasing Reynolds at  $Bn = 10$  and (a), (b), (c) –  $Re = 10, 40, 100$

Влияние конфигурации смесителя на структуру потока показано на рис. 5 для  $Bn = 5$ . Характерным отличием двух- и четырехлопастных смесителей от однолопастного является образование единого ядра над лопастями. При этом для четырехлопастного смесителя наблюдается образование сплошного ядра вдоль внешней стенки. Отметим, что образование такого же ядра для однолопастного смесителя происходит только при  $Bn = 10$ . В областях сдвигового течения значения эффективной вязкости меньше для двух- и четырехлопастных мешалок, что говорит о более интенсивном течении по сравнению с однолопастной. Однако так как перемешивания внутри квазитвердых ядер не происходит, использование четырехлопастного смесителя менее эффективно из-за больших ядер.

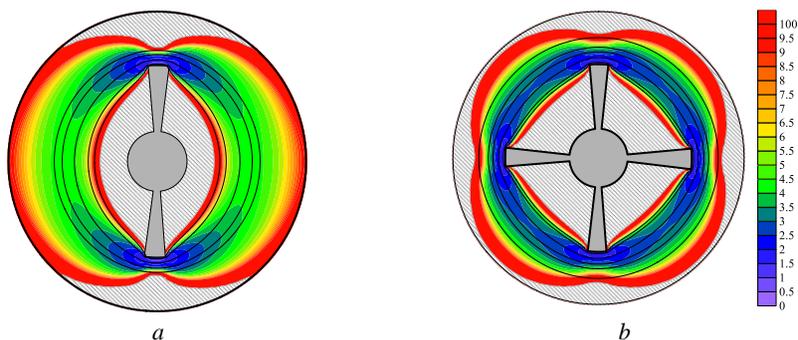


Рис. 5. Ядра для двухлопастного (а) и четырехлопастного (b) смесителя при  $Bn = 5$  и  $Re = 1$

Fig. 5. Cores for (a) – two-bladed and (b) – four-bladed mixer at  $Bn = 5$  and  $Re = 1$

Параметрические исследования показали, что процесс перемешивания маркеров по объему существенно зависит от геометрии ядер. Так, для  $Bn = 10$  в однолопастном смесителе (рис. 6) маркеры, находящиеся во внутреннем ядре, в процессе движения практически не перераспределяются по объему, образуется локальная неоднородность. Картина распределения маркеров вне области внутреннего ядра характеризуется слоистой структурой, масштаб которой уменьшается с течением времени. В зоне внешнего ядра маркеры перемещаются, только когда под ними проходит лопасть, это происходит благодаря области текучести над лопастью. Как следствие, в слое, примыкающем к внешней стенке, формируется структура с высокой неоднородностью. Таким образом, структуру потока можно условно разделить на три зоны: зона неоднородности в квазитвердом ядре, примыкающая к лопасти; зона неоднородности вдоль твердой стенки, в которой можно добиться равномерного распределения маркеров при достаточно высоком числе оборотов; зона сдвигового потока, расположенная между двумя предыдущими, с однородным распределением маркеров. Анализ показывает, что в рамках используемых конфигураций мешалок перемешивания маркеров различных сортов (красного и зеленого) друг с другом не происходит.

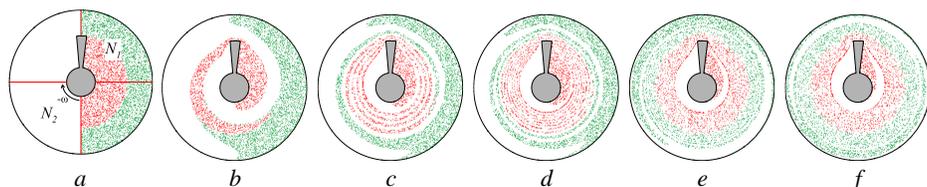
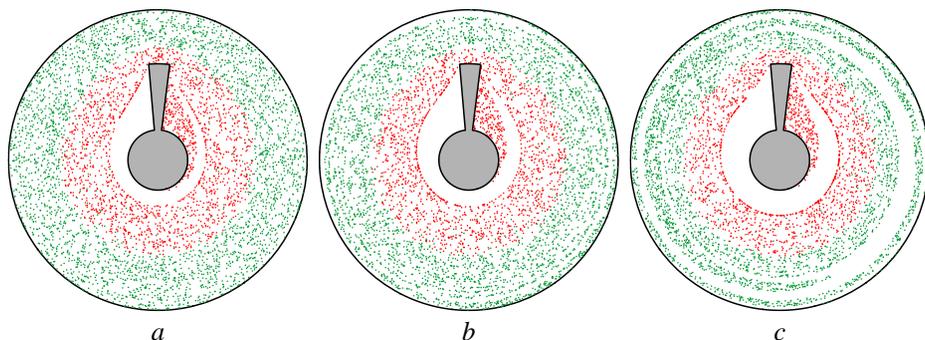


Рис. 6. Эволюция распределения маркерных частиц при  $Bn = 10$ ,  $Re = 1$  и (a) – 0, (b) – 1, (c) – 5, (d) – 10, (e) – 40, (f) – 80 оборотах

Fig. 6. Evolution of the distribution of marker particles in  $Bn = 10$ ,  $Re = 1$  and (a) – 0, (b) – 1, (c) – 5, (d) – 10, (e) – 40, (f) – 80 revolutions

Картина распределения маркеров после 80 оборотов мешалки для разных чисел Бингама демонстрируется на рис. 7. Так как для  $Bn = 1$  размеры внешнего ядра малы, то течение во внешней области носит сдвиговой характер, соответственно,

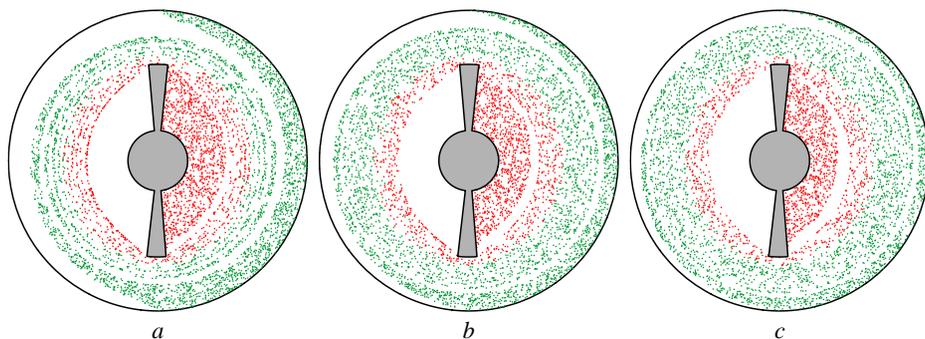
маркеры в этой области формируют слоистую структуру, которая к концу смешения размывается. При  $Bn = 5$  влияние внешнего ядра уже присутствует, благодаря чему к 80 оборотам еще наблюдается небольшая неоднородность в тонком слое на внешней стенке. При  $Bn = 20$  из-за большего внешнего ядра слоистая маркерная структура вдоль стенки сохраняется после 80 оборотов, и на ее размывание требуется дополнительное время.



**Рис. 7.** Эволюция распределения частиц после 80 оборотов для  $Re = 1$  и (a), (b), (c) –  $Bn = 1, 5, 20$

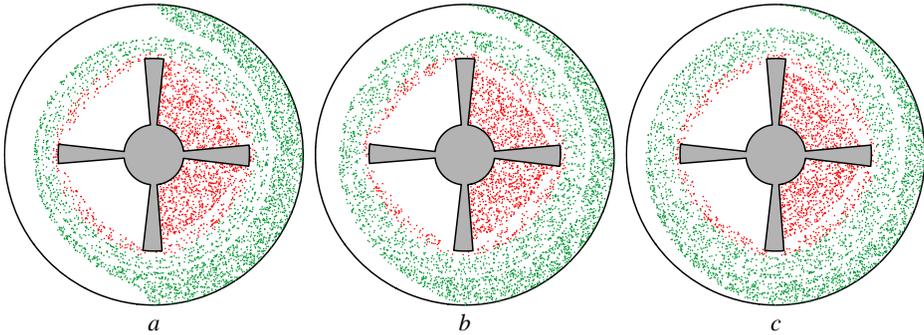
**Fig. 7.** Evolution of the marker particle distribution after 80 revolutions for  $Re = 1$  and (a), (b), (c) –  $Bn = 1, 5, 20$

С увеличением числа лопастей изменяется структура потока. Для двух- или четырехлопастной мешалки зона примыкающего к ней квазитвердого ядра значительно увеличивается в размерах, что приводит к формированию больших областей неоднородности (рис. 8, 9). Картина перераспределения маркеров в пристенном слое аналогична рассмотренному ранее случаю однолопастной мешалки. При этом время для достижения однородности распределения маркеров в зоне сдвигового потока уменьшается с ростом числа лопастей.



**Рис. 8.** Эволюция распределения маркерных частиц для двухлопастного смесителя при  $Bn = 10$ ,  $Re = 1$  и (a) – 10, (b) – 40, (c) – 80 оборотах

**Fig. 8.** Evolution of the marker particle distribution for a two-blade mixer at  $Bn = 10$ ,  $Re = 1$  and (a) – 10, (b) – 40, (c) – 80 revolutions



**Рис. 9.** Эволюция распределения маркерных частиц для четырехлопастного смесителя при  $Bn = 10$ ,  $Re = 1$  и (a) – 10, (b) – 40, (c) – 80 оборотах

**Fig. 9.** Evolution of the marker particle distribution for a four-bladed mixer at  $Bn = 10$ ,  $Re = 1$  and (a) – 10, (b) – 40, (c) – 80 revolutions

Дальнейшие исследования были посвящены количественному анализу смешения. В качестве характеристики процесса смешения используется безразмерное число мощности [17], которое широко применяют на практике в технических приложениях:

$$N_p = \frac{P}{\rho\omega^3 (2R)^5} = \frac{\Phi}{32 Re}, \quad (8)$$

где  $P$  и  $\Phi$  – размерное и безразмерное значения интеграла от диссипативной функции по области течения  $\Omega$ :

$$\Phi = \iint_{\Omega} \mu (I_2^2) \left\{ 2 \left( \frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} + \frac{V}{r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r} \right)^2 \right\} r dr d\varepsilon. \quad (9)$$

Величина  $N_p$  в стационарном режиме показывает потери на вязкое трение и характеризует энергетические затраты на организацию течения. В табл. 2 приведены значения  $N_p$  в зависимости от числа Бингама и числа Рейнольдса для случая установившегося течения в однолопастном смесителе. Видно, что наибольшее значение числа мощности реализуется при высоких числах Бингама. Однако структура течения при больших  $Bn$  характеризуется формированием больших зон неоднородности распределения маркеров, и использование данной характеристики для оценки качества неадекватно.

Таблица 2

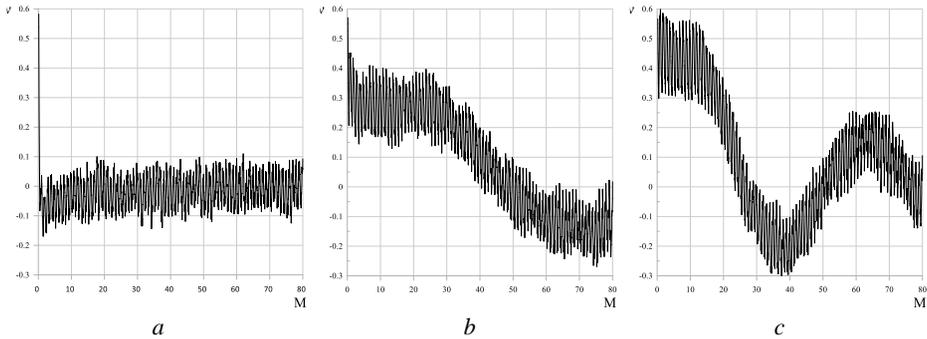
**Число мощности для различных  $Bn$  и  $Re$**

$N_p$	$Bn = 1$	$Bn = 5$	$Bn = 10$	$Bn = 20$
$Re = 1$	4 577.2	11 831.9	20 475.8	37 021.9
$Re = 40$	116.1	296.8	512.8	926.0
$Re = 100$	48.2	120.1	206.3	371.8

На основе процесса распределения маркеров был рассчитан оригинальный параметр неоднородности, который позволяет оценить качество смешения с течением времени:

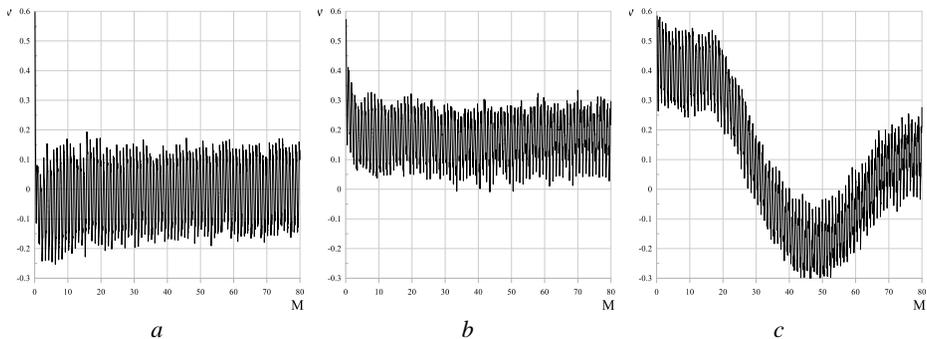
$$v = \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} \quad (10)$$

Здесь  $N_1$  и  $N_2$  – количество маркерных частиц в I и III четвертях области смешения в текущий момент времени (см. рис. 6, *a*),  $M$  – количество оборотов, пройденных мешалкой. Поведение характеристик  $\nu$  в зависимости от числа оборотов для однолопастного смесителя при  $Bn = 1, 10, 20$  и  $Re = 1$  проиллюстрировано на рис. 10. Во всех случаях наблюдается колебательная составляющая с частотой, соответствующей частоте вращения мешалки, вызванная движением маркеров, находящихся во внутреннем ядре. Для  $Bn = 1$  амплитуда колебаний слабо меняется с течением времени. С ростом  $Bn$  появляется еще одна низкочастотная мода, амплитуда которой затухает в процессе смешения. При этом чем больше  $Bn$ , тем выше частота этой составляющей. Появление этой моды связано с медленным перераспределением маркеров вдоль внешней стенки.



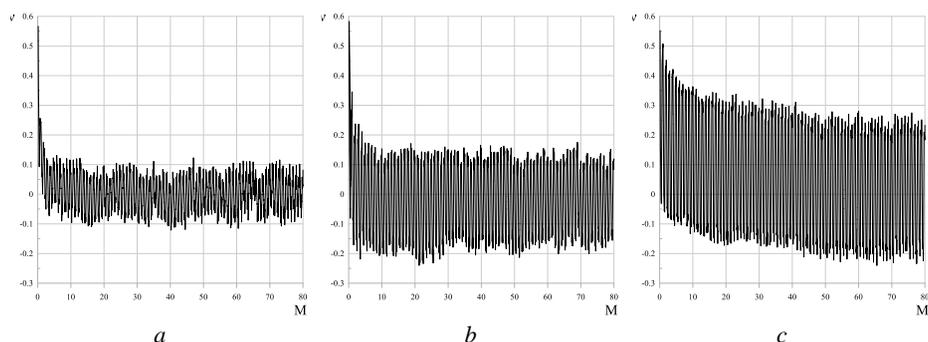
**Рис. 10.** Характеристики неоднородности при  $Re = 1$  и  $Bn = 1, 10, 20$  (*a–c*)  
**Fig. 10.** Characteristics of heterogeneity at  $Re = 1$  and (*a*), (*b*), (*c*) –  $Bn = 1, 10, 20$

При  $Re = 100$  (рис. 11) низкочастотная мода образуется при больших Бингамах, так как увеличение  $Re$  препятствует образованию внешнего ядра. При этом ее частота уменьшается по сравнению с меньшим Рейнольдсом при одинаковых  $Bn$ .



**Рис. 11.** Характеристики неоднородности при  $Re = 100$  и  $Bn = 1, 10, 20$  (*a–c*)  
**Fig. 11.** Characteristics of heterogeneity at  $Re = 100$  and (*a*), (*b*), (*c*) –  $Bn = 1, 10, 20$

Сравнение графиков характеристики неоднородности для разных конфигураций смесителя (рис. 12), показывает низкую эффективность перемешивания для смесителя с более чем одной лопастью, это отражается на значительном росте амплитуды за счет увеличившейся внутренней неоднородности.



**Рис. 12.** Характеристики неоднородности при  $Re = 1$  и  $Bn = 5$  для (a), (b), (c) – однолопастного, двухлопастного и четырехлопастного смесителя

**Fig. 12.** Characteristics of heterogeneity at  $Re = 1$  and  $Bn = 5$  for (a), (b), (c) – single-bladed, two-bladed and four-bladed mixer

### Заключение

Выполнены параметрические исследования плоских течений Бингамовской жидкости для различных конфигураций мешалок, отличающихся количеством лопастей, для чисел  $Bn$  и  $Re$ , изменяющихся в диапазоне от 1 до 20 и от 1 до 100 соответственно. Проанализировано изменение геометрии ядер в зависимости от конфигурации мешалки и безразмерных чисел. Для иллюстрации и анализа качества смешения решена задача о движении ансамбля маркерных частиц. Выявлено три характерных режима поведения маркерных частиц. Первый режим, реализующийся во внутреннем ядре, соответствует отсутствию движения маркеров относительно лопасти. Второй осуществляется в зоне между ядрами, для него характерна слоистая структура потока маркеров. Наконец, третий реализуется во внешнем ядре, где маркеры образуют сильно неоднородную структуру. Количественно оценка процесса перемешивания осуществлялась с помощью характеристик неоднородности распределения маркерных частиц и интеграла диссипативной функции. Проведенный сравнительный анализ показал более качественное перемешивание для однолопастных мешалок.

### Список источников

1. Барабаш В.М., Абиев Р.Ш., Кулов Н.Н. Обзор работ по теории и практике перемешивания // Теоретические основы химической технологии. 2018. V. 52 (4). P. 367–383. doi: 10.1134/S0040357118040024
2. Balmforth N.J., Frigaard I.A., Ovarlez G. Yielding to Stress: Recent Developments in Viscoplastic Fluid Mechanics // Annu. Rev. Fluid Mech. 2014. V. 46 (1). P. 121–146. doi: 10.1146/annurev-fluid-010313-141424
3. Russell A.W., Patrick M.P., Paul F.L., Konstantin S.P., Christos N.M. An experimental study of the mixing characteristics of viscoplastic fluids in dual-impeller agitation systems // Chem. Eng. Res. Des. 2025. V. 216. P. 216–229. doi: 10.1016/j.cherd.2025.02.032
4. Curran S.J., Hayes R.E., Afacan A., Williams M.C., Tanguy P.A. Experimental Mixing Study of a Yield Stress Fluid in a Laminar Stirred Tank // Ind. Eng. Chem. Res. 2000. V. 39 (1). P. 195–202. doi: 10.1021/IE990468E

5. Pakzad L., Ein-Mozaffari F., Upreti S.R., Lohi A. Experimental and numerical studies on mixing of yield-pseudoplastic fluids with a coaxial mixer // *Chem. Eng. Commun.* 2013. V. 200 (12). P. 1553–1577. doi: 10.1080/00986445.2012.751380
6. Bercovier M., Engelman M. A finite-element method for incompressible non-Newtonian flows // *J. Comput. Phys.* 1980. V. 36 (3). P. 313–326. doi: 10.1016/0021-9991(80)90163-1
7. Papanastasiou T.C. *Flows of Materials with Yield* // *J. Rheol.* (N. Y. N. Y.). The Society of Rheology, 1987. V. 31 (5). P. 385–404. doi: 10.1122/1.549926
8. Benmoussa A., Páscoa J.C. A Chamfered Anchor Impeller Design for Enhanced Efficiency in Agitating Viscoplastic Fluids // *Fluids*. 2024. V. 9 (12). Art. 288. doi: 10.3390/fluids9120288
9. Kada B., Lakhdar R., Brahim M., Ameer H. Agitation of Complex Fluids in Cylindrical Vessels by Newly Designed Anchor Impellers // *Period. Polytech. Mech. Eng.* 2022. V. 66 (2). P. 109–119. doi: 10.3311/PPme.18438
10. Alraddadi I., Yang D., Katbar N.M., Benhanifia K., Rahmani L., Mebarki B., Ameer H. Effect of curved anchor impellers on power consumption and hydrodynamic parameters of yield stress fluids (Bingham–Papanastasiou model) in stirred tanks // *Rev. Adv. Mater. Sci.* 2023. V. 62. Art. 20230156. P. 1–18. doi: 10.1515/rams-2023-0156
11. Mokhefi A. Hydrodynamic and thermal performance analysis of an inclined anchor impeller designed for yield stress food mixing applications // *Food Bioprod. Process.* 2024. V. 143. P. 255–270. doi: 10.1016/j.fbp.2023.12.006
12. Komoda Y., Date T. Enhancement of laminar mixing by an anchor impeller with rotationally reciprocating motion // *AIP Adv.* 2022. V. 12 (1). doi: 10.1063/5.0075750
13. Benhanifia K., Redouane F., Lakhdar R., Brahim M., Al-Farhanu K., Jamshed W., Eid M.R., El Din S.M., Raizah Z. Investigation of mixing viscoplastic fluid with a modified anchor impeller inside a cylindrical stirred vessel using Casson–Papanastasiou model // *Sci. Rep.* 2022. V. 12 (1). Art. 17534. doi: 10.1038/s41598-022-22415-6
14. Брагинский Л.Н., Бегачев В.И., Барабаи В.М. Перемешивание в жидких средах: физические основы и инженерные методы расчета. Л.: Химия, 1984. 336 p.
15. Патанкар С.В. Численные методы решения задач теплообмена и механики жидкости. М.: Энергоиздат, 1988. 526 p.
16. Борзенко Е.И., Гарбузов Д.Н. Течение ньютоновской жидкости в смесителях различных конфигураций // *Comput. Contin. Mech.* 2025. V. 17 (4). P. 486–495. doi: 10.7242/1999-6691/2024.17.4.39
17. Brown D.A.R., Jones P.N., Middleton J.C. *Experimental Methods* // *Handbook of Industrial Mixing*. New Jersey: Wiley, 2003. P. 145–256.

### References

1. Barabash V.M., Abiev R.S., Kulov N.N. (2018) Theory and practice of mixing: a review. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 52. pp. 367–383. doi: 10.1134/S0040357118040024
2. Balmforth N.J., Frigaard I.A., Ovarlez G. (2014) Yielding to stress: recent developments in viscoplastic fluid mechanics. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 46. pp. 121–146. doi: 10.1146/annurev-fluid-010313-141424
3. Russell A.W., Patrick M.P., Paul F.L., Konstantin S.P., Christos N.M. (2025) An experimental study of the mixing characteristics of viscoplastic fluids in dual-impeller agitation systems. *Chemical Engineering Research and Design*. 216. pp. 216–229. doi: 10.1016/j.cherd.2025.02.032
4. Curran S.J., Hayes R.E., Afacan A., Williams M.C., Tanguy P.A. (2000) Experimental mixing study of a yield stress fluid in a laminar stirred tank. *Industrial & Engineering Chemistry Research*. 39. pp. 195–202. doi: 10.1021/IE990468E
5. Pakzad L., Ein-Mozaffari F., Upreti S.R., Lohi A. (2013) Experimental and numerical studies on mixing of yield-pseudoplastic fluids with a coaxial mixer. *Chemical Engineering Communications*. 200. pp. 1553–1577. doi: 10.1080/00986445.2012.751380

6. Bercovier M., Engelman M. (1980) A finite-element method for incompressible non-Newtonian flows. *Journal of Computational Physics*. 36. pp. 313–326. doi: 10.1016/0021-9991(80)90163-1
7. Papanastasiou T.C. (1987) Flows of materials with yield. *Journal of Rheology*. 31. pp. 385–404. doi: 10.1122/1.549926
8. Benmoussa A., Páscoa J.C. (2024) A chamfered anchor impeller design for enhanced efficiency in agitating viscoplastic fluids. *Fluids*. 9. P. 288. doi: 10.3390/fluids9120288
9. Kada B., Lakhdar R., Brahim M., Ameer H. (2022) Agitation of complex fluids in cylindrical vessels by newly designed anchor impellers. *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering*. 66. pp. 109–119. doi: 10.3311/PPme.18438
10. Alraddadi I., Yang D., Katbar N.M., Benhanifia K., Rahmani L., Mebarki B., Ameer H. (2023) Effect of curved anchor impellers on power consumption and hydrodynamic parameters of yield stress fluids (Bingham–Papanastasiou model) in stirred tanks. *Reviews on Advanced Materials Science*. 62. pp. 1–18. doi: 10.1515/rams-2023-0156
11. Mokhefi A. (2024) Hydrodynamic and thermal performance analysis of an inclined anchor impeller designed for yield stress food mixing applications. *Food and Bioprocess Processing*. 143. pp. 255–270. doi: 10.1016/j.fbp.2023.12.006
12. Komoda Y., Date T. (2022) Enhancement of laminar mixing by an anchor impeller with rotationally reciprocating motion. *AIP Advances*. 12. Article 015013. doi: 10.1063/5.0075750
13. Benhanifia K., Redouane F., Lakhdar R., Brahim M., Al-Farhanu K., Jamshed W., Eid M.R., El Din S.M., Raizah Z. (2022) Investigation of mixing viscoplastic fluid with a modified anchor impeller inside a cylindrical stirred vessel using Casson–Papanastasiou model. *Scientific Reports*. 12. Article 17534. doi: 10.1038/s41598-022-22415-6
14. Braginsky L.N., Begachev V.I., Barabash V.M. (1984) *Peremeshivanie v zhidkikh sredakh: Fizicheskie osnovy i inzhenernye prilozheniya* [Mixing in liquid media: Physical fundamentals and engineering calculation methods]. Leningrad: Khimiya.
15. Patankar S.V. (1988) *Chislennyye metody resheniya zadach teploobmena i mekhaniki zhidkosti* [Numerical heat transfer and fluid flow]. Moscow: Energoizdat.
16. Borzenko Y.I., Garbuzov D.N. (2025) Flow of a Newtonian fluid in agitators of different configurations. *Computational Continuum Mechanics*. 17. pp. 486–495. doi: 10.7242/1999-6691/2024.17.4.39
17. Brown D.A.R., Jones P.N., Middleton J.C. (2003) *Experimental Methods. Handbook of Industrial Mixing*. New Jersey: Wiley.

#### Сведения об авторах:

**Борзенко Евгений Иванович** – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой автоматизации технологических процессов Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: borzenko@ftf.tsu.ru

**Гарбузов Дмитрий Николаевич** – аспирант физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: dmitrij.garbuzov.98@mail.ru

**Ефремов Максим Андреевич** – студент физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: 33murman@gmail.com

#### Information about the authors:

**Borzenko Evgeniy I.** (Doctor of Physics and Mathematics, Head of Department, Department of Automation of Technological Processes, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: borzenko@ftf.tsu.ru

**Garbuzov Dmitriy N.** (Tomsk State University Tomsk, Russian Federation). E-mail: dmitrij.garbuzov.98@mail.ru

**Efremov Maksim A.** (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: 33murman@gmail.com

*Статья поступила в редакцию 29.09.2025; принята к публикации 08.12.2025*

*The article was submitted 29.09.2025; accepted for publication 08.12.2025*