ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2026 Математика и механика № 99
Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья
УДК 517.9 MSC: 90C26; 90C30
doi: 10.17223/19988621/99/1

О модификации понятия субдифференциала второго порядка

Мисраддин Аллахверди оглы Садыгов

Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан, misreddin08@rambler.ru

Аннотация. Показано, что если функция удовлетворяет 2-липшицеву условию, то производная второго порядка по направлению является бисублинейной функцией. Рассматривается производная второго порядка в направлении от максимума функции. Изучен ряд свойств субдифференциала второго порядка, и получен аналог теоремы Хермандера для бисублинейных функций. Получен ряд неравенств для квадрата функции расстояния. Показано, что при некоторых условиях квадрат функции расстояния удовлетворяет 2-липшицеву условию.
Ключевые слова: бисублинейная функция, субдифференциал, пространство, бивыпуклая функция

Для цитирования: Садыгов М.А. О модификации понятия субдифференциала второго порядка // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2026. № 99. С. 5–21. doi: 10.17223/19988621/99/1

Original article

On modification of the concept of the second-order subdifferential

Misraddin A. Sadygov

Baku State University, Baku, Azerbaijan, misreddin08@rambler.ru

Abstract. It is known that the derivative of higher order is an analogue of the first-order derivative. Although the second-order subdifferential is a generalization of the second-order derivative, the second-order subdifferential is not closely related to the first-order subdifferential. The article considers modifications of the concept of the second-order subdifferential. Like the first-order subdifferential, the second-order directional derivative plays an essential role in the study of the second-order subdifferential. The paper considers the second-order directional derivative which is a generalization of the first-order derivative in Penot's direction. It is proved that if a function satisfies the 2-Lipschitz condition in a neighborhood of a point, then the second-order directional derivative is a bisublinear

continuous symmetric function, i.e. it is a bipositively homogeneous biconvex continuous function. Using the tensor product, extensions of a bisublinear function on the space of the tensor product are considered. It is shown that the extension of a bisublinear even function on the space of the tensor product is a sublinear function. It is proved that if a bisublinear even function is continuous, then the sublinear function is also continuous. In this paper, it is shown that a bisublinear symmetric continuous function is an upper bound for a symmetric continuous bilinear function. In this paper, we study the second-order derivative in the direction of the maximum of a finite number of functions. We consider the subdifferential of the of continuous even bisublinear functions. We also consider a class of 2-Lipschitz functions in a neighborhood of a point. A number of properties of 2-Lipschitz functions are studied. The paper considers the square of the distance function of a set and studies when the square of the distance function of a set satisfies the 2-Lipschitz condition in a neighborhood of a point. It is shown that in a Hilbert space the square of the distance function of a convex closed set satisfies the global 2-Lipschitz condition with a coefficient of 6. The paper defines the bitangent bicone and the binormal cone. A number of their properties are studied. We consider the second-order subdifferential of the sum of a function that satisfies the 2-Lipschitz condition in the neighborhood of a point.
Keywords: bisublinear function, subdifferential, space, biconvex function

For citation: Sadygov, M.A. (2026) On modification of the concept of the second-order subdifferential. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 99. pp. 5–21. doi: 10.17223/19988621/99/1

1. Введение

Субдифференциал второго порядка изучался различными авторами, однако в настоящее время не существует однозначно принятого определения субдифференциала. Известно, что определение дифференциала второго порядка аналогично дифференциалу первого порядка. Однако в определениях субдифференциала второго порядка такие аналогии, как правило, в общем случае отсутствуют. Если рассмотреть субдифференциал Кларка, то можно получить различные аналоги субдифференциала второго порядка.

Пусть X – банахово пространство, $f : X \to R$. Рассмотрим для липшицевых функций в окрестности точки x_0 производную по направлению Ф. Кларка (см.: [1, 2]), П. Мишеля и Ж.П. Пеноте [3]

$$f^0(x_0;x) = \overline{\lim_{z\to x_0,\lambda\downarrow 0}} \frac{1}{\lambda}(f(z+\lambda x) - f(z)),$$

$$f^P(x_0;x) = \sup_{y\in X} \overline{\lim_{\lambda\downarrow 0}} \frac{1}{\lambda}(f(x_0+\lambda y+\lambda x) - f(x_0+\lambda y))$$

при $x \in X$, где $\overline{\lim_{z\to x}} g(z) = \limsup_{z\to x} g(z) \equiv \inf_{\delta>0} \sup_{z\in B(x,\delta)} g(z)$, $B(x,\delta) = \{z \in X : \|z-x\| \le \delta\}$, $g : X \to R$. Положив

$$f^{00}(x_0;x_1,x_2) = \overline{\lim_{z\to x_0,\lambda\downarrow 0}} \frac{1}{\lambda}(f^0(z+\lambda x_2;x_1) - f^0(z;x_1))$$

(предположим, что верхний предел конечен), можно рассмотреть субдифференциал второго порядка следующего вида:

$$\partial_2^0 f(x_0)=\{b\in \bar{B}(X^2;R):\, f^{00}(x_0;x_1,x_2)\ge b(x_1,x_2) \text{ при } (x_1,x_2)\in X^2\},$$

где через $\bar{B}(X^2;R)$ обозначаем множество всех непрерывных симметричных билинейных функций из X^2 в R, $X^2 = X\times X$.

Если для некоторого $\varepsilon>0$ удовлетворяется неравенство

$$\left| f(x+x_1+x_2)-f(x+x_1)-f(x+x_2)+f(x)\right|\le K\|x_1\|\|x_2\|$$

при $x\in x_0+\varepsilon B$ и $x_1,x_2\in\varepsilon B$, где $B=\left\{x\in X:\|x\|\le 1\right\}$, то функцию $f:X\to R$ назовем 2-липшицевой с постоянной K в окрестности точки x_0.

Если функция $f:X\to R$ является 2-липшицевой в окрестности точки x_0, то положим

$$f^{[2]}(x_0;x_1,x_2)=\overline{\lim_{\substack{z\to x_0,\\ \lambda_1\downarrow 0,\ \lambda_2\downarrow 0}}}\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}(f(z+\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)-f(z+\lambda_1x_1)-f(z+\lambda_2x_2)+f(z))$$

и рассмотрим субдифференциал второго порядка (см.: [4–8])

$$\partial_2 f(x_0)=\{b\in \bar{B}(X^2;R):\, f^{[2]}(x_0;x_1,x_2)\ge b(x_1,x_2) \text{ при } (x_1,x_2)\in X^2\}.$$

Аналогичные определение субдифференциала второго порядка рассматривается также в [9–11] (см. также ссылку на литературу в [11] по этой теме).

Отметим, что похожее определение субдифференциала второго порядка рассматривается в [12], но оно несколько отличается и с ним трудно работать.

Отметим, что

$$f^{00}(x_0;x_1,x_2)=\overline{\lim_{z\to x_0,t\downarrow 0}}\frac{1}{t}(f^0(z+tx_2;x_1)-f^0(z;x_1))=$$

$$=\overline{\lim_{z\to x_0,t\downarrow 0}}\frac{1}{t}[\overline{\lim_{\upsilon\to z+tx_2,\lambda\downarrow 0}}\frac{1}{\lambda}(f(\upsilon+\lambda x_1)-f(\upsilon))-\overline{\lim_{w\to z,\lambda\downarrow 0}}\frac{1}{\lambda}(f(w+\lambda x_1)-f(w))]=$$

$$=\overline{\lim_{z\to x_0,t\downarrow 0}}\frac{1}{t}[\overline{\lim_{w\to z,\lambda\downarrow 0}}\frac{1}{\lambda}(f(w+tx_2+\lambda x_1)-f(w+tx_2))-\overline{\lim_{w\to z,\lambda\downarrow 0}}\frac{1}{\lambda}(f(w+\lambda x_1)-f(w))]\le$$

$$\le\overline{\lim_{z\to x_0,t\downarrow 0}}\ \overline{\lim_{w\to z,\lambda\downarrow 0}}\frac{1}{t\lambda}[f(w+tx_2+\lambda x_1)-f(w+tx_2)-f(w+\lambda x_1)+f(w)]\le$$

$$\le\overline{\lim_{w\to x_0,t\downarrow 0,\lambda\downarrow 0}}\frac{1}{\lambda t}[f(w+tx_2+\lambda x_1)-f(w+tx_2)-f(w+\lambda x_1)+f(w)]=f^{[2]}(x_0;x_1,x_2)$$

при $(x_1,x_2)\in X^2$. Обозначим $U(x_0,\delta)=\{x\in X:\|x-x_0\|<\delta\}$. Если функция f и производная Фреше f' удовлетворяют условию Липшица на множестве $U(x_0,\delta)$, то

$$f^{00}(x_0;x_1,x_2)=\overline{\lim_{z\to x_0,\lambda\downarrow 0}}\frac{1}{\lambda}(f'(z+\lambda x_2)x_1-f'(z)x_1).$$

Хотя производные по направлению $f^{00}(x_0;x_1,x_2)$ и $f^{[2]}(x_0;x_1,x_2)$ близкие, но они в общем случае не совпадают. Производная по направлению $f^{[2]}(x_0;x_1,x_2)$ имеет ряд хороших свойств. При некоторых условиях $(x_1,x_2)\to f^{[2]}(x_0;x_1,x_2)$ – бисублинейная функция (см.: [4]). Отметим, что бисублинейная функция является частным случаем бивыпуклых функций, бисубдифференцируемость которых изучалась в [7, 8].

В [6] рассматривается ряд свойств субдифференциала второго порядка, которому дается следующее определение. Положим (предполагая, что правая часть конечна)

$$f^{\{2\}+}(x_0;x) = \sup_{z\in X} \overline{\lim_{\lambda\downarrow 0}} \frac{1}{\lambda^2}(f(x_0+\lambda z+2\lambda x) - 2f(x_0+\lambda z+\lambda x) + f(x_0+\lambda z)),$$

$$f^{\{2\}-}(x_0;x) = \inf_{z\in X} \underline{\lim_{\lambda\downarrow 0}} \frac{1}{\lambda^2}(f(x_0+\lambda z+2\lambda x) - 2f(x_0+\lambda z+\lambda x) + f(x_0+\lambda z))$$

при $x \in X$.

Множество $D_2 f(x_0) = \{Q \in B_0(X):\ f^{\{2\}-}(x_0;x) \le Q(x) \le f^{\{2\}+}(x_0;x)$ при $x\in X\}$ назовем бидифференциалом функции f в точке x_0 , где $B_0(X)$ – множество всех непрерывных квадратичных функций из X в R.

В работе [7] рассмотрено также другое определение субдифференциала произвольного порядка. В частности, из этой работы следует, что

$$f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2) = \sup_{z_1,z_2\in X} \overline{\lim_{\lambda_1\downarrow 0,\lambda_2\downarrow 0}} \frac{1}{\lambda_1\lambda_2}(f(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2) -$$
$$- f(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_1 x_1) - f(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_2 x_2) + f(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2))$$

и $\partial_{\{2\}} f(x_0) = \{b \in \bar{B}(X^2;R):\ f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2) \ge b(x_1,x_2)$ при $(x_1,x_2)\in X^2\}$.

Если функция $f: X \to R$ является 2-липшицевой в окрестности точки x_0 , то $f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2) \le f^{[2]}(x_0;x_1,x_2)$ при $(x_1,x_2)\in X^2$.

Настоящая работа состоит из четырех пунктов. В п. 2 изучен ряд свойств 2-субдифференциала $\partial_{\{2\}} f(x_0)$. Исследуется производная второго порядка по направлению функции, представленной в виде поточечного максимума конечного числа функций. В п. 3 получен ряд неравенств для квадрата функции расстояния. Определены бикасательный и бинормальный конусы к множеству в точке. В п. 4 с помощью тензорного произведения получен аналог теоремы Хермандера для четных бисублинейных функций и применен к изучению свойств 2-субдифференциала.

2. 2-субдифференциал

Пусть X – банахово пространство. Если функция $f: X \to R$ является 2-липшицевой в окрестности точки x_0 , то положим

$$f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2) = \sup_{z_1,z_2\in X} \overline{\lim_{\lambda_1\downarrow 0,\lambda_2\downarrow 0}} \frac{1}{\lambda_1\lambda_2}(f(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2) -$$
$$- f(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_1 x_1) - f(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_2 x_2) + f(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2)),$$

$$f_{\{2\}}(x_0;x_1,x_2) = \inf_{z_1,z_2\in X} \underline{\lim_{\lambda_1\downarrow 0,\lambda_2\downarrow 0}} \frac{1}{\lambda_1\lambda_2}(f(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2) -$$
$$- f(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_1 x_1) - f(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_2 x_2) + f(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2))$$

при $(x_1,x_2)\in X^2$. Из определения непосредственно следует, что

$$f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2) = f^{\{2\}}(x_0;x_2,x_1), \qquad f_{\{2\}}(x_0;x_1,x_2) = f_{\{2\}}(x_0;x_2,x_1),$$

$$f^{\{2\}}(x_0;-x_1,-x_2) = f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2), \qquad f_{\{2\}}(x_0;-x_1,-x_2) = f_{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)$$

при $(x_1,x_2)\in X^2$, т.е. $f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)$ и $f_{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)$ – четные и симметричные функции.

Отметим, что, положив $z_1 = y_1 - x_1$, $z_2 = y_2 - x_2$, где $y_1, y_2 \in X^2$, из определения $f^{\{2\}}(x_0; x_1, x_2)$ имеем, что $f^{\{2\}}(x_0; x_1, x_2) = f^{\{2\}}(x_0; -x_1, -x_2)$ при $(x_1, x_2) \in X^2$.

Непрерывный билинейный симметричный функционал b, удовлетворяющий неравенству $f^{\{2\}}(x_0; x_1, x_2) \geq b(x_1, x_2)$ при $(x_1, x_2) \in X^2$, назовем 2-субградиентой функции f в точке x_0, а множество 2-субградиент в точке x_0 назовем 2-субдифференциалом функции f в точке x_0 и обозначим через $\partial_{\{2\}} f(x_0)$ (см.: [6]).

Используя определение $f_{\{2\}}(x_0; x_1, x_2)$ и заменив z_1 через $z_1 - x_1$, имеем

$$-f_{\{2\}}(x_0; x_1, x_2) = \sup_{z_1, z_2 \in X} \overline{\lim_{\lambda_1 \downarrow 0, \lambda_2 \downarrow 0}} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} (-f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) +$$
$$+ f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_1 x_1) + f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_2 x_2) - f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)) =$$
$$= \sup_{z_1, z_2 \in X} \overline{\lim_{\lambda_1 \downarrow 0, \lambda_2 \downarrow 0}} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} (f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 - \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 - \lambda_1 x_1) -$$
$$- f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_2 x_2) + f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)) = f^{\{2\}}(x_0; -x_1, x_2).$$

Отсюда следует, что $f_{\{2\}}(x_0; x_1, x_2) = -f^{\{2\}}(x_0; -x_1, x_2)$ при $(x_1, x_2) \in X^2$. Поэтому имеем, что если $b \in \partial_{\{2\}} f(x_0)$, то $f_{\{2\}}(x_0; x_1, x_2) \leq b(x_1, x_2) \leq f^{\{2\}}(x_0; x_1, x_2)$ при $(x_1, x_2) \in X^2$.

Пусть $g : X \times X \to R_{+\infty} = R \bigcup \{+\infty\}$ и $(x_1, x_2) \in X^2$. Если функции $x_1 \to g(x_1, x_2)$, $x_2 \to g(x_1, x_2)$ положительно однородные и $g(0, x_2) = g(x_1, 0) = 0$, то функцию g назовем биположительно однородной. Если функции $x_1 \to g(x_1, x_2)$, $x_2 \to g(x_1, x_2)$ выпуклые и положительно однородные и $g(0, x_2) = g(x_1, 0) = 0$, то функцию g назовем бисублинейной. Ясно, что $f^{\{2\}}(x_0; 0, x_2) = f^{\{2\}}(x_0; x_1, 0) = 0$ и $f_{\{2\}}(x_0; 0, x_2) = f_{\{2\}}(x_0; x_1, 0) = 0$.

Теорема 1. Если $f : X \to R$ – 2-липшицева функция с постоянной K в окрестности точки x_0, то функция $f^{\{2\}}(x_0; x_1, x_2)$ бисублинейна, раздельно непрерывна и выполняется неравенство $\left| f^{\{2\}}(x_0; x_1, x_2) \right| \leq K \|x_1\| \|x_2\|$ при $(x_1, x_2) \in X^2$.

Доказательство. По определению $f^{\{2\}}(x_0; x_1, x_2)$ имеем, что

$$f^{\{2\}}(x_0; y_1 + y_2, x_2) = \sup_{z_1, z_2 \in X} \overline{\lim_{\lambda_1 \downarrow 0, \lambda_2 \downarrow 0}} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} (f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_1 (y_1 + y_2) + \lambda_2 x_2) -$$
$$- f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_1 (y_1 + y_2)) - f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_2 x_2) + f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)) \leq$$
$$\leq \sup_{z_1, z_2 \in X} \overline{\lim_{\lambda_1 \downarrow 0, \lambda_2 \downarrow 0}} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} (f(x_0 + \lambda_1 (z_1 + y_2) + \lambda_2 z_2 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 x_2) -$$
$$- f(x_0 + \lambda_1 (z_1 + y_2) + \lambda_2 z_2 + \lambda_1 y_1)) -$$
$$- f(x_0 + \lambda_1 (z_1 + y_2) + \lambda_2 z_2 + \lambda_2 x_2) + f(x_0 + \lambda_1 (z_1 + y_2) + \lambda_2 z_2) + f(x_0 + \lambda_1 (z_1 + y_2) +$$
$$+ \lambda_2 z_2 + \lambda_2 x_2) - - f(x_0 + \lambda_1 (z_1 + y_2) + \lambda_2 z_2) - f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_2 x_2) + f(x_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)) \leq$$
$$\leq \sup_{z_1, z_2 \in X} \overline{\lim_{\lambda_1 \downarrow 0, \lambda_2 \downarrow 0}} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} (f(x_0 + \lambda_1 (z_1 + y_2) + \lambda_2 z_2 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 x_2) - f(x_0 + \lambda_1 (z_1 + y_2) + \lambda_2 z_2 + \lambda_1 y_1)) -$$
$$- f(x_0 + \lambda_1 (z_1 + y_2) + \lambda_2 z_2 + \lambda_2 x_2) + f(x_0 + \lambda_1 (z_1 + y_2) + \lambda_2 z_2)) +$$

$$+\sup_{z_1,z_2\in X}\overline{\lim_{\lambda_1\downarrow 0,\lambda_2\downarrow 0}}\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}(f(x_0+\lambda_1(z_1+y_2)+\lambda_2 z_2+\lambda_2 x_2)-f(x_0+\lambda_1(z_1+y_2)+\lambda_2 z_2)-$$

$$-f(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_2 x_2)+f(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2))=f^{\{2\}}(x_0;y_1,x_2)+f^{\{2\}}(x_0;y_2,x_2)$$

при $y_1,y_2,x_2\in X$, т.е. $x_1\to f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)$ субаддитивна.

Аналогично проверяется, что $x_2\to f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)$ субаддитивна. Легко проверяется, что $f^{\{2\}}(x_0;\alpha x_1,x_2)=\alpha f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)$ при $\alpha\ge 0$ и $f^{\{2\}}(x_0;x_1,\beta x_2)=\beta f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)$ при $\beta\ge 0$. Поэтому функция $f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)$ бисублинейна.

По условию получим, что удовлетворяется неравенство $\left|f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)\right|\le K\|x_1\|\|x_2\|$ при $(x_1,x_2)\in X^2$.

Из теоремы 3.2.1 [13. С. 181] также имеем, что функции $x_1\to f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)$ при $x_2\in X$ и $x_2\to f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)$ при $x_1\in X$ непрерывны. Поэтому функция $f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)$ раздельно непрерывна. Теорема доказана.

Из условия теоремы 1 следует, что функция $(x_1,x_2)\to f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)$ непрерывна (см.: [7. С. 21]).

Лемма 1. Если f удовлетворяет 2-липшицеву условию с постоянной K в окрестности точки x_0, то множество $\partial_{\{2\}}f(x_0)$ ограничено.

Доказательство. Если $b\in\partial_{\{2\}}f(x_0)$, то $-f^{\{2\}}(x_0;-x_1,x_2)\le b(x_1,x_2)\le$ $\le f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)$ при $(x_1,x_2)\in X^2$. Поэтому $-K\|x_1\|\|x_2\|\le b(x_1,x_2)\le K\|x_1\|\|x_2\|$ при $(x_1,x_2)\in X^2$. Отсюда следует, что множество $\partial_{\{2\}}f(x_0)$ ограничено. Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть J – конечное множество, функции $f_i:X\to R$ непрерывны и удовлетворяют 2-липшицеву условию в окрестности точки x_0 при $i\in J$; $f(x)=\max_{i\in J}f_i(x)$ при $x\in X$. Тогда $f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)\le\max_{i\in J(x_0)}f_i^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)$ при $(x_1,x_2)\in X^2$, где $J(x_0)=\{i\in J:f_i(x_0)=f(x_0)\}$.

Доказательство. Покажем, что существует $\alpha>0$ такое, что $J(y)\subset J(x_0)$ при $\|y-x_0\|\le\alpha$. Случай $J(x_0)=J$ тривиален. Пусть $J(x_0)\ne J$ и $a=f(x_0)-\max_{i\in J\setminus J(x_0)}f_i(x_0)>0,$ $\varepsilon=\dfrac{a}{3}$ и $\alpha>0$ такое, что для всякого $i\in J$ выполнено $\left|f_i(y)-f_i(x_0)\right|\le\varepsilon$ при $\|y-x_0\|\le\alpha$. Легко можно проверить, что $\left|f(y)-f(x_0)\right|\le\varepsilon$ при $\|y-x_0\|\le\alpha$. Если $j\in J(y)$, то

$$f_j(x_0)\ge f_j(y)-\varepsilon=f(y)-\varepsilon\ge f(x_0)-2\varepsilon=\max_{i\in J\setminus J(x_0)}f_i(x_0)+a-2\varepsilon>\max_{i\in J\setminus J(x_0)}f_i(x_0).$$

Поэтому $j\in J(x_0)$. Возьмем $z_1,z_2\in X$ и $x_1,x_2\in X$. Пусть $\lambda_1>0,$ $\lambda_2>0$ такие, что $\|\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2\|\le\alpha$. Ясно, что $J(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2)\subset J(x_0).$ Аналогично имеем, что существует $\delta>0$ такое, что $J(y)\subset J(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2)$ при $\|y-x_0-\lambda_1 z_1-\lambda_2 z_2\|\le\delta.$ Пусть $\mu>0$ – достаточно малое число такое, что $\|\lambda_1\mu x_1+\lambda_2\mu x_2\|\le\delta$.

$$f(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_1\mu x_1+\lambda_2\mu x_2)-f(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_1\mu x_1)-$$
$$-f(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_2\mu x_2)+f(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2)=$$
$$=\max_{i\in J(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2)}(f_i(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_1\mu x_1+\lambda_2\mu x_2)+f_i(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2))-$$
$$-\max_{i\in J} f_i(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_1\mu x_1)-\max_{i\in J} f_i(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_2\mu x_2)\le$$
$$\le\max_{i\in J(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2)}(f_i(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_1\mu x_1+\lambda_2\mu x_2)+f_i(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2)-$$
$$-f_i(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_1\mu x_1)-f_i(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_2\mu x_2))\le$$
$$\le\max_{i\in J(x_0)}(f_i(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_1\mu x_1+\lambda_2\mu x_2)+f_i(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2)-$$
$$-f_i(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_1\mu x_1)-f_i(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_2\mu x_2)).$$

Поэтому получим, что

$$f^{\{2\}}(x_0;\mu x_1,\mu x_2)\le d=\sup_{z_1,z_2\in X}\inf_{\substack{\alpha>0,\\ \beta>0}}\max_{i\in J(x_0)}\sup_{\substack{0<\lambda_1\le\alpha,\\ 0<\lambda_2\le\beta}}\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}(f_i(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_1\mu x_1+\lambda_2\mu x_2)-$$
$$-f_i(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_1\mu x_1)-f_i(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2+\lambda_2\mu x_2)+f_i(x_0+\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2)).$$

Из определения супремума следует, что для $\varepsilon>0$ существуют $z_1^\varepsilon,\ z_2^\varepsilon\in X$ такие, что

$$\inf_{\substack{\alpha>0,\\ \beta>0}}\max_{i\in J(x_0)}\sup_{\substack{0<\lambda_1\le\alpha,\\ 0<\lambda_2\le\beta}}\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}(f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon+\lambda_1\mu x_1+\lambda_2\mu x_2)-f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon+\lambda_1\mu x_1)-$$
$$-f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon+\lambda_2\mu x_2)+f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon))>d-\varepsilon.$$

Ясно, что

$$\inf_{\substack{\alpha>0,\\ \beta>0}}\sup_{\substack{0<\lambda_1\le\alpha,\\ 0<\lambda_2\le\beta}}\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}(f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon+\lambda_1\mu x_1+\lambda_2\mu x_2)-f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon+\lambda_1\mu x_1)-$$
$$-f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon+\lambda_2\mu x_2)+f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon))\le f_i^{\{2\}}(x_0;\mu x_1,\mu x_2)$$

при $i\in J(x_0)$. Поэтому для $\varepsilon>0$ существуют $\alpha_i^\varepsilon>0,\ \beta_i^\varepsilon>0$ такие, что

$$\sup_{\substack{0<\lambda_1\le\alpha_i^\varepsilon,\\ 0<\lambda_2\le\beta_i^\varepsilon}}\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}(f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon+\lambda_1\mu x_1+\lambda_2\mu x_2)-f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon+\lambda_1\mu x_1)-$$
$$-f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon+\lambda_2\mu x_2)+f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon))\le f_i^{\{2\}}(x_0;\mu x_1,\mu x_2)+\varepsilon$$

при $\mathrm{i}\in \mathrm{J}(\mathrm{x}_0)$. Положив $\alpha^\varepsilon=\min_{i\in J(x_0)}\alpha_i^\varepsilon,\ \beta^\varepsilon=\min_{i\in J(x_0)}\beta_i^\varepsilon$ получим

$$d-\varepsilon<\max_{i\in J(x_0)}\sup_{\substack{0<\lambda_1\le\alpha^\varepsilon,\\ 0<\lambda_2\le\beta^\varepsilon}}\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}(f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon+\lambda_1\mu x_1+\lambda_2\mu x_2)-$$
$$-f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon+\lambda_1\mu x_1)-f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon+\lambda_2\mu x_2)+$$
$$+f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon))\le\max_{i\in J(x_0)} f_i^{\{2\}}(x_0;\mu x_1,\mu x_2)+\varepsilon.$$

Так как $f^{\{2\}}(x_0;\mu x_1,\mu x_2)\le d$, то отсюда следует, что

$$f^{\{2\}}(x_0;\mu x_1,\mu x_2)<\max_{i\in J(x_0)}\sup_{\substack{0<\lambda_1\le\alpha^\varepsilon,\\ 0<\lambda_2\le\beta^\varepsilon}}\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}(f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon+\lambda_1\mu x_1+\lambda_2\mu x_2)-$$

$$f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon+\lambda_1\mu x_1)-f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon+\lambda_2\mu x_2)+$$
$$+f_i(x_0+\lambda_1 z_1^\varepsilon+\lambda_2 z_2^\varepsilon))+\varepsilon\le\max_{i\in J(x_0)} f_i^{\{2\}}(x_0;\mu x_1,\mu x_2)+2\varepsilon.$$

Отсюда при $\varepsilon\to 0$ получим $f^{\{2\}}(x_0;\mu x_1,\mu x_2)\le\max\limits_{i\in J(x_0)} f_i^{\{2\}}(x_0;\mu x_1,\mu x_2)$. Поэтому $f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)\le\max\limits_{i\in J(x_0)} f_i^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)$ при $(x_1,x_2)\in X^2$. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $f(x)=\max\limits_{i\in J} b_i(x,x)$, где b_i – симметричный непрерывный билинейный функционал, *J*-конечное множество. Тогда

$$f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)\le 2\max_{i\in J(x_0)} b_i(x_1,x_2),$$

где $J(x_0)=\{i\in J: f(x_0)=b_i(x_0,x_0)\}$.

Пусть $U\subset X$ – открытое множество, и функция *f* непрерывно дифференцируема в *U*, т.е. функция *f* принадлежит $C^1(U)$. Скажем, что градиент $f'(x)$ этой функции удовлетворяет условию Липшица на множестве *U* с константой $L\ge 0$, если $|f'(x)-f'(y)|\le L\|x-y\|$ при всех $x,y\in U$. Класс таких функций будем обозначать через $C^{1,1}(U)$.

Лемма 2. Если функция *f* принадлежит $C^{1,1}(U)$ и $|f'(x)-f'(y)|\le L\|x-y\|$ при всех $x,y\in U$, где $L\ge 0$, то для каждой точки $x_0\in U$ существует $\varepsilon>0$ такое, что

$$|f(z+x+y)-f(z+x)-f(z+y)+f(z)|\le L\|x\|\|y\|$$

при $x,y\in\varepsilon B$, $z\in x_0+\varepsilon B$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ такое, что $x_0+3\varepsilon B\subset U$. Тогда имеем

$$|f(z+x+y)-f(z+x)-f(z+y)+f(z)|=\left|\int_0^1(f'(z+x+ty)y-f'(z+ty)y)dt\right|\le$$
$$\le\int_0^1\|(f'(z+x+ty)y-f'(z+ty)y)\|dt\le\int_0^1\|(f'(z+x+ty)-f'(z+ty))\|\|y\|dt\le$$
$$\le\int_0^1 L\|x\|\|y\|dt=L\|x\|\|y\|$$

при $x,y\in\varepsilon B$, $z\in x_0+\varepsilon B$. Лемма доказана.

Отметим, что если функция *f* принадлежит $C^1(U)$ и

$$|f(z+x+y)-f(z+x)-f(z+y)+f(z)|\le L\|x\|\|y\|$$

при $z,\ z+x,\ z+y,\ z+x+y\in U$, то легко проверяется, что $|f'(x)-f'(y)|\le L\|x-y\|$ при всех $x,y\in U$.

Множество всех дважды непрерывно дифференцируемых функций из $U(x_0,\delta)$ в *R* обозначим через $C^2(U(x_0,\delta))$. Если $f\in C^2(U(x_0,\delta))$, то аналогично лемме 2 проверяется, что $f^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)=f''(x_0)(x_1,x_2)$ при $(x_1,x_2)\in X^2$.

Если функция $f:X\to R$ достигает локального минимума в пространстве *X* в точке x_0, то

$$f^{\{2\}}(x_0;x,x) \geq \limsup_{\lambda\downarrow 0} \frac{1}{\lambda^2}(f(x_0+\lambda x)-2f(x_0)+f(x_0-\lambda x)) \geq 0$$

при $x \in X$.

Отметим, что аналогично в [7] и [8] можно рассмотреть геометрические аспекты 2-субдифференциала.

3. Бикасательные и бинормальные конусы

Пусть X – банахово пространство и $C \subset X$. Положим $d_C(y) = \inf\{\|y-z\| : z \in C\}$. Для простоты положим $d(y) = d_C(y)$ и $d_2(y) = d^2(y)$.

Лемма 3. Если C – непустое замкнутое выпуклое подмножество гильбертова пространства H, то при любых $z,x,y \in H$ выполняется соотношение

$$|d_2(z+x+y)-d_2(z+x)-d_2(z+y)+d_2(z)| \leq 6\|x\|\|y\|,$$

т.е. C – непустое замкнутое выпуклое подмножество гильбертова пространства H, то $y \to d_2(y)$ удовлетворяет глобальному 2-липшицеву условию с постоянной 6.

Доказательство. Пусть $x, y \in H$ и $\|y\| \leq \|x\|$. По теореме 2.1.2 [14. С. 48] существуют $c_1, c_2 \in C$ такие, что

$$d(z+x) = \|z+x-c_1\| \text{ и } d(z+y) = \|z+y-c_2\|.$$

По предложению 2.2.4 [14. С. 50] получим, что $\|c_2-c_1\| \leq \|y-x\|$.

Так как $\|x\|^2 - \|y\|^2 = \langle x+y, x-y\rangle$, то

$$\begin{aligned} d_2(z+x+y)-d_2(z+x)-d_2(z+y)+d_2(z) &\leq \|z+x+y-c_1\|^2 - \|z+x-c_1\|^2 - \|z+y-c_2\|^2 + \\ +\|z-c_2\|^2 &= \langle y, 2z+2x+y-2c_1\rangle - \langle y, 2z+y-2c_2\rangle = \langle y, 2x-2c_1+2c_2\rangle \leq \\ \leq \|y\|\|2x-2c_1+2c_2\| &\leq \|y\|(\|2x\|+2\|c_2-c_1\|) \leq \|y\|(\|2x\|+2\|y-x\|) \leq 6\|y\|\|x\|. \end{aligned}$$

Пусть $\|y\| \leq \|x\|$ и $\upsilon_1, \upsilon_2 \in C$ такие, что $d(z+x+y) = \|z+x+y-\upsilon_1\|$ и $d(z) = \|z-\upsilon_2\|$. Из предложения 2.2.4 [14. С. 50] следует, что $\|\upsilon_2-\upsilon_1\| \leq \|y+x\|$. Поэтому

$$\begin{aligned} d_2(z+x+y)-d_2(z+x)-d_2(z+y)+d_2(z) &\geq \|z+x+y-\upsilon_1\|^2 - \|z+x-\upsilon_1\|^2 - \|z+y-\upsilon_2\|^2 + \\ +\|z-\upsilon_2\|^2 &= \langle y, 2z+2x+y-2\upsilon_1\rangle - \langle y, 2z+y-2\upsilon_2\rangle = \langle y, 2x-2\upsilon_1+2\upsilon_2\rangle \geq \\ \geq -\|y\|\|2x-2\upsilon_1+2\upsilon_2\| &\geq -\|y\|(\|2x\|+2\|\upsilon_2-\upsilon_1\|) \geq -\|y\|(\|2x\|+2\|y+x\|) \geq -6\|y\|\|x\|. \end{aligned}$$

Тогда получим, что $|d_2(z+x+y)-d_2(z+x)-d_2(z+y)+d_2(z)| \leq 6\|x\|\|y\|$ при $x, y \in H$. Лемма доказана.

Лемма 4. Если C – непустое замкнутое выпуклое подмножество гильбертова пространства H, то

$$\begin{aligned} &|d_2(z+x+y)-d_2(z+x)-d_2(z+y)-d_2(z+\upsilon+w)+d_2(z+\upsilon)+d_2(z+w)| \leq \\ &\leq 2\|x-\upsilon\|^2 + 3\|x-\upsilon\|(\|y\|+\|w\|) + 2\|y-w\|^2 + 3\|y-w\|(\|x\|+\|\upsilon\|) \end{aligned}$$

при $z, x, y, \upsilon, w \in H$.

Доказательство. Если $z, x, y, \upsilon, w \in H$, то существуют $c_1, c_2, c_3 \in C$ такие, что

$$d(z+\upsilon+w) = \|z+\upsilon+w-c_1\|,\ d(z+x) = \|z+x-c_2\|,\ d(z+y) = \|z+y-c_3\|.$$

Поэтому

$$d_2(z+x+y)-d_2(z+x)-d_2(z+y)-d_2(z+\upsilon+w)+d_2(z+\upsilon)+d_2(z+w)\le$$
$$\le\|z+x+y-c_1\|^2-\|z+x-c_2\|^2-\|z+y-c_3\|^2-\|z+\upsilon+w-c_1\|^2+\|z+\upsilon-c_2\|^2+\|z+w-c_3\|^2\le$$
$$\le\langle x+y-\upsilon-w,2z+x+y+\upsilon+w-2c_1\rangle+\langle\upsilon-x,2z+x+\upsilon-2c_2\rangle+\langle w-y,\ 2z+y+w-2c_3\rangle=$$
$$=\langle x-\upsilon,\ 2z+x+y+\upsilon+w-2c_1\rangle+\langle y-w,\ 2z+x+y+\upsilon+w-2c_1\rangle+\langle\upsilon-x,2z+x+\upsilon-2c_2\rangle+$$
$$+\langle w-y,2z+y+w-2c_3\rangle=\langle x-\upsilon,\ y+w-2c_1+2c_2\rangle+\langle y-w,\ x+\upsilon-2c_1+2c_3\rangle\le$$
$$\le\|x-\upsilon\|(\|y\|+\|w\|+2\|c_2-c_1\|)+\|y-w\|(\|x\|+\|\upsilon\|+2\|c_3-c_1\|)\le$$
$$\le\|x-\upsilon\|(\|y\|+\|w\|+2\|\upsilon+w-x\|)+\|y-w\|(\|x\|+\|\upsilon\|+2\|\upsilon+w-y\|)\le$$
$$\le\|x-\upsilon\|(\|y\|+3\|w\|+2\|\upsilon-x\|)+\|y-w\|(\|x\|+3\|\upsilon\|+2\|w-y\|)\le$$
$$\le 2\|x-\upsilon\|^2+3\|x-\upsilon\|(\|y\|+\|w\|)+2\|y-w\|^2+3\|y-w\|(\|x\|+\|\upsilon\|).$$

Если $z,x,y,\upsilon,w\in H$, то существуют $e_1,e_2,e_3\in C$ такие, что $d(z+x+y)=$ $=\|z+x+y-e_1\|$, $d(z+\upsilon)=\|z+\upsilon-e_2\|$, $d(z+w)=\|z+w-e_3\|$. Поэтому

$$d_2(z+x+y)-d_2(z+x)-d_2(z+y)-d_2(z+\upsilon+w)+d_2(z+\upsilon)+d_2(z+w)\ge$$
$$\ge\|z+x+y-e_1\|^2-\|z+x-e_2\|^2-\|z+y-e_3\|^2-\|z+\upsilon+w-e_1\|^2+\|z+\upsilon-e_2\|^2+$$
$$+\|z+w-e_3\|^2\ge\langle x+y-\upsilon-w,2z+x+y+\upsilon+w-2e_1\rangle+\langle\upsilon-x,2z+x+\upsilon-2e_2\rangle+$$
$$+\langle w-y,2z+y+w-2e_3\rangle=\langle x-\upsilon,\ 2z+x+y+\upsilon+w-2e_1\rangle+$$
$$+\langle y-w,2z+x+y+\upsilon+w-2e_1\rangle++\langle\upsilon-x,2z+x+\upsilon-2e_2\rangle+\langle w-y,2z+y+w-2e_3\rangle=$$
$$=\langle x-\upsilon,y+w-2e_1+2e_2\rangle+\langle y-w,x+\upsilon-2e_1+2e_3\rangle\ge$$
$$\ge-\|x-\upsilon\|(\|y\|+\|w\|+2\|e_2-e_1\|)-\|y-w\|(\|x\|+\|\upsilon\|+2\|e_3-e_1\|)\ge$$
$$\ge-\|x-\upsilon\|(\|y\|+\|w\|+2\|x+y-\upsilon\|)-\|y-w\|(\|x\|+\|\upsilon\|+2\|x+y-w\|)\ge$$
$$\ge-\|x-\upsilon\|(3\|y\|+\|w\|+2\|x-\upsilon\|)-\|y-w\|(3\|x\|+\|\upsilon\|+2\|y-w\|)\ge$$
$$\ge-2\|x-\upsilon\|^2-3\|x-\upsilon\|(\|y\|+\|w\|)-2\|y-w\|^2-3\|y-w\|(\|x\|+\|\upsilon\|).$$

Поэтому получим справедливость леммы. Лемма доказана.

Из теоремы 2.1.2 [14. С. 48] и из предложения 2.2.4 [14. С. 50] следует, что если C – непустое полное выпуклое подмножество предгильбертова пространства H, то леммы 3 и 4 также верны.

Лемма 5. Если C – непустое подмножество банахова пространства X, то

$$|d_2(z+x+y)-d_2(z+x)-d_2(z+y)+d_2(z)|\le 4\|x\|\|y\|$$

при $x,y\in X$ и $z\in C$.

Доказательство. Если $x,y\in X$, $\|y\|\le\|x\|$ и $z\in C$, то $d(z)=0$ и

$$|d_2(z+x+y)-d_2(z+x)-d_2(z+y)+d_2(z)|=$$
$$=|d^2(z+x+y)-d^2(z+x)-d^2(z+y)+d^2(z)|\le$$
$$\le|(d(z+x+y)-d(z+x))(d(z+x+y)+d(z+x))|+$$
$$+|(d(z)-d(z+y))(d(z)+d(z+y))|\le$$
$$\le\|y\|(\|x+y\|+\|x\|)+\|y\|^2\le\|y\|(2\|x\|+\|y\|)+\|y\|^2\le 4\|x\|\|y\|.$$

Получим, что $|d_2(z+x+y)-d_2(z+x)-d_2(z+y)+d_2(z)|\le 4\|x\|\|y\|$ при $x,y\in X$ и $z\in C$. Лемма доказана.

Положим

$$Q_C(x_0)=\{(x_1,x_2)\in X\times X : d_2^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)\le 0\},$$

$$\Omega_C(x_0)=\{b\in \overline{B}(X^2;R): b(x_1,x_2)\le 0 \ \text{ при } \ (x_1,x_2)\in Q_C(x_0)\}.$$

Множество $Q_C(x_0)$ назовем бикасательным конусом, а множество $\Omega_C(x_0)$ – бинормальным конусом к C в точке x_0.

Лемма 6. Если $d_C^2(x)$ удовлетворяет 2-липшицеву условию в окрестности точки x_0, то $\bigcup\limits_{\lambda>0}\lambda\partial_{\{2\}}d_2(x_0)\subset\Omega_C(x_0)$.

Доказательство. Пусть $b\in\bigcup\limits_{\lambda>0}\lambda\partial_{\{2\}}d_2(x_0)$. Тогда существует $\lambda>0$ такое, что $b\in\lambda\partial_{\{2\}}d_2(x_0)$. Поэтому $\dfrac{b}{\lambda}=b_1\in\partial_{\{2\}}d_2(x_0)$ и $d_2^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)\ge b_1(x_1,x_2)$ при $(x_1,x_2)\in X\times X$. Так как из $(x_1,x_2)\in Q_C(x_0)$ следует, что $d_2^{\{2\}}(x_0;x_1,x_2)\le 0$, то $b_1(x_1,x_2)\le 0$ при $(x_1,x_2)\in Q_C(x_0)$. Тогда имеем, что $b(x_1,x_2)=\lambda b_1(x_1,x_2)\le 0$ при $(x_1,x_2)\in Q_C(x_0)$. Отсюда следует, что $b\in\Omega_C(x_0)$, т.е. $\bigcup\limits_{\lambda>0}\lambda\partial_{\{2\}}d_2(x_0)\subset\Omega_C(x_0)$. Лемма доказана.

В доказательстве леммы 6 условие, что $d_C^2(x)$ удовлетворяет 2-липшицеву условию в окрестности точки x_0, не используется. Если $d_C^2(x)$ удовлетворяет 2-липшицеву условию в окрестности точки x_0, то $\partial_{\{2\}}d_2(x_0)$ непусто.

Отметим, что множество $K\subset X\times X$ называется биконусом (см.: [8]), если для любого $(x,y)\in K$ множества $K_y=\{z:(z,y)\in K\}$ и $K_x=\{u:(x,u)\in K\}$ выпуклые конусы.

Лемма 7. Если $d_C^2(x)$ удовлетворяет 2-липшицеву условию в окрестности точки x_0, то $Q_C(x_0)$ является биконусом.

Доказательство. Пусть $(x,y)\in Q_C(x_0)$. Покажем, что $K_y=\{z\in X:(z,y)\in Q_C(x_0)\}$ является конусом.

Если $x\in K_y$ и $\lambda\ge 0$, то имеем, что $d_2^{\{2\}}(x_0;\lambda x,y)=\lambda d_2^{\{2\}}(x_0;x,y)\le 0$, т.е. $\lambda x\in K_y$. Если $x_1,x_2\in K_y$, то имеем, что $d_2^{\{2\}}(x_0;x_1+x_2,y)\le d_2^{\{2\}}(x_0;x_1,y)+d_2^{\{2\}}(x_0;x_2,y)\le 0$. Отсюда следует, что $x_1+x_2\in K_y$. Получим, что K_y является конусом. Аналогично проверяется, что $K_x=\{u\in X:(x,u)\in Q_C(x_0)\}$ является конусом. Лемма доказана.

4. Ряд свойств симметричных четных бисублинейных функций

Пусть X – действительное линейное пространство. Обозначим через $X\Theta X$ пространство формальных линейных комбинаций (с действительными коэффициентами) элементов $X\times X$. Употребляя запись $x\Theta y$ вместо $1(x,y)$ для элементов естественного базиса в $X\Theta X$, рассмотрим множество $M\subset X\Theta X$ элементов любого из следующих видов:

$(x_1+x_2)\Theta y-x_1\Theta y-x_2\Theta y;\ x\Theta(y_1+y_2)-x\Theta y_1-x\Theta y_2;\ \lambda x\Theta\mu y-\lambda\mu x\Theta y;\ x\Theta y-y\Theta x$, взятых по всем $x_1, x_2, x, y_1, y_2, y \in X$, $\lambda, \mu \in R$. Введем обозначения $X \widehat{\otimes} X$ для факторпространства $X\Theta X / \operatorname{Lin} M$ (см.: [8, 15]). Если $x, y \in X$, то класс эквивалентности, содержащий $x\Theta y$, обозначим $x \widehat{\otimes} y$, т.е. обозначим через $x \widehat{\otimes} y$ класс смежности $x\Theta y + \operatorname{Lin} M$.

Пусть $q : X \times X \to R_{+\infty}$ и q – биположительно однородная функция. Если функция $p : X \to R_{+\infty}$ выпукла, положительно однородна и $p(0) = 0$, то функцию p назовем сублинейной.

Если $\nu = X \widehat{\otimes} X$, то положим

$$\widehat{q}(\nu) = \inf\{\sum_{i=1}^{n} q(x^i, y^i) : \nu = \sum_{i=1}^{n} x^i \widehat{\otimes} y^i,\ (x^i, y^i) \in X \times X,\ n \in N\},$$

$$\widehat{q}(x \widehat{\otimes} y) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} q(x^i, y^i) : x \widehat{\otimes} y = \sum_{i=1}^{n} x^i \widehat{\otimes} y^i,\ (x^i, y^i) \in X \times X,\ n \in N\right\}.$$

Лемма 8. Если $q : X \times X \to R$ – симметричная четная бисублинейная функция, то $\widehat{q}(x \widehat{\otimes} y) = q(x, y)$ при $(x, y) \in X \times X$, и $\widehat{q} : X \widehat{\otimes} X \to R$ – сублинейная функция.

Доказательство. Так как $X \widehat{\otimes} X = X\Theta X / \operatorname{Lin} M$, то $x \widehat{\otimes} y = \sum_{i=1}^{n} x^i \widehat{\otimes} y^i$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{n} x^i \Theta y^i \in x\Theta y + Lin\{(x_1 + x_2)\Theta y - x_1\Theta y - x_2\Theta y,\ x\Theta(y_1 + y_2) - x\Theta y_1 - x\Theta y_2,$$
$$\lambda x\Theta\mu y - \lambda\mu x\Theta y,\ x\Theta y - y\Theta x :\ x_1, x_2 \in X; y_1, y_2 \in X; \lambda, \mu \in R\}.$$

Поэтому

$$\widehat{q}(x \widehat{\otimes} y) = \inf\{q(x, y) + \sum_{i=1}^{n} q(x_1^i + x_2^i, y^i) + \sum_{i=1}^{n} q(-x_1^i, y^i) + \sum_{i=1}^{n} q(-x_2^i, y^i) + \sum_{i=1}^{m} q(z^j, y_1^j + y_2^j) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} q(z^j, (-y_1^j)) + \sum_{j=1}^{m} q(z^j, (-y_2^j)) + \sum_{s=1}^{k} q(\lambda^s u^s, \mu^s v^s) + \sum_{s=1}^{k} q(-\lambda^s \mu^s u^s, v^s) + \sum_{\tau=1}^{d} q(\tilde{u}^\tau, \tilde{v}^\tau) +$$
$$+ \sum_{\tau=1}^{d} q(-\tilde{v}^\tau, \tilde{u}^\tau) : x_1^i, x_2^i, z^j, u^s, \tilde{u}^\tau; y^i, y_1^j, y_2^j, v^s, \tilde{v}^\tau \in X;\ \lambda^s, \mu^s \in R; n, m, k, d \in N \cup \{0\}\}.$$

Так как q – бисублинейная функция, то

$$\sum_{i=1}^{n} q(x_1^i + x_2^i, y^i) + \sum_{i=1}^{n} q(-x_1^i, y^i) + \sum_{i=1}^{n} q(-x_2^i, y^i) \geq 0,$$
$$\sum_{i=1}^{m} q(z^j, y_1^j + y_2^j) + \sum_{j=1}^{m} q(z^j, (-y_1^j)) + \sum_{j=1}^{m} q(z^j, (-y_2^j)) \geq 0$$

при $x, x_1^i, x_2^i, z^j; y, y^i, y_1^j, y_2^j \in X$. Так как q – бисублинейная четная функция, то $\sum_{s=1}^{k} q(\lambda^s u^s, \mu^s v^s) + \sum_{s=1}^{k} q(-\lambda^s \mu^s u^s, v^s) \geq 0$ при $u^s, v^s \in X$. Так как q – симметричная бисублинейная четная функция, то $\sum_{\tau=1}^{d} q(\tilde{u}^\tau, \tilde{v}^\tau) + \sum_{\tau=1}^{d} q(-\tilde{v}^\tau, \tilde{u}^\tau) \geq 0$ при $\tilde{u}^\tau, \tilde{v}^\tau \in X$.

Тогда получим, что $\widehat{q}(x \widehat{\otimes} y) = q(x, y)$ при $(x, y) \in X \times X$.

Ясно, что

$$\widehat{q}(\nu_1+\nu_2)=\inf\{\sum_{i=1}^{n}q(u^i,\upsilon^i):\nu_1+\nu_2=\sum_{i=1}^{n}u^i\widehat{\otimes}\upsilon^i,\ (u^i,\upsilon^i)\in X\times X,\ n\in N\}\le$$
$$\le\inf\{\sum_{i=1}^{k}q(x^i,y^i):\nu_1=\sum_{i=1}^{k}x_1^i\widehat{\otimes}y_1^i,\ (x_1^i,y_1^i)\in X\times X,\ k\in N\}+$$
$$+\inf\{\sum_{i=1}^{m}q(x_2^i,y_2^i):\nu_2=\sum_{i=1}^{m}x_2^i\widehat{\otimes}y_2^i,\ (x^i,y^i)\in X\times X,\ m\in N\}=\widehat{q}(\nu_1)+\widehat{q}(\nu_2)$$

при $\nu_1,\nu_2\in X\widehat{\otimes}X$. Так как q – бисублинейная четная функция, то

$$\widehat{q}(\lambda\nu)=\inf\{\sum_{i=1}^{k}q(\lambda x^i,y^i):\lambda\nu=\sum_{i=1}^{k}\lambda x^i\widehat{\otimes}y^i,\ (x^i,y^i)\in X\times X,\ k\in N\}=$$
$$=\lambda\inf\{\sum_{i=1}^{k}q(x^i,y^i):\nu=\sum_{i=1}^{k}x^i\widehat{\otimes}y^i,\ (x^i,y^i)\in X\times X,\ k\in N\}=\lambda\widehat{q}(\nu)$$

при $\lambda\ge 0$. Поэтому $\widehat{q}:X\widehat{\otimes}X\to R$ – сублинейная функция. Лемма доказана.

Теорема 3. Пусть X – линейное пространство, $q:X\times X\to R$ – бисублинейная четная симметричная функция, X_1 – векторное подпространство в X, задана билинейная симметричная функция b_0 из $X_1\times X_1$ в R, и $b_0(x_1,y_1)\le q(x_1,y_1)$ для всех $(x_1,y_1)\in X_1\times X_1$. Тогда существует билинейная симметричная функция $b(x,y)$, определенная на $X\times X$ и такая, что $b(x_1,y_1)=b_0(x_1,y_1)$ для $(x_1,y_1)\in X_1\times X_1$ и $b(x,y)\le q(x,y)$ при $(x,y)\in X\times X$.

Доказательство. Ясно, что $X_1\widehat{\otimes}X_1=\mathrm{Lin}\{x\widehat{\otimes}y\in X\widehat{\otimes}X:(x,y)\in X_1\times X_1\}$ – линейное подпространство в $X\widehat{\otimes}X$. Если $\nu\in X_1\widehat{\otimes}X_1$, $\overline{\nu}\in X\widehat{\otimes}X$ и $\nu=\overline{\nu}$, то имеем, что $\overline{\nu}\in\nu+\mathrm{Lin}\,M$. Тогда аналогично лемме 8 проверяется, что

$$\widehat{q}(\overline{\nu})=\inf\{\sum_{t=1}^{\tilde{n}}q(\tilde{x}^t,\tilde{y}^t)+\sum_{i=1}^{n}q(x_1^i+x_2^i,y^i)+\sum_{i=1}^{n}q(-x_1^i,y^i)+\sum_{i=1}^{n}q(-x_2^i,y^i)+$$
$$+\sum_{j=1}^{m}q(z^j,y_1^j+y_2^j)+\sum_{j=1}^{m}q(z^j,(-y_1^j))+\sum_{j=1}^{m}q(z^j,(-y_2^j))+\sum_{s=1}^{k}q(\lambda^s u^s,\mu^s v^s)+$$
$$+\sum_{s=1}^{k}q(-\lambda^s\mu^s u^s,v^s)+\sum_{\tau=1}^{d}q(\tilde{u}^\tau,\tilde{v}^\tau)+\sum_{\tau=1}^{d}q(-\tilde{v}^\tau,\tilde{u}^\tau):\tilde{x}^t,x_1^i,x_2^i,z^j,u^s,\tilde{u}^\tau;$$
$$\tilde{y}^t,y^i,y_1^j,y_2^j,v^s,\tilde{v}^\tau\in X;\ \lambda^s,\mu^s\in R;n,m,k,d\in N\cup\{0\},\ \nu=\sum_{t=1}^{\tilde{n}}\tilde{x}^t\widehat{\otimes}\tilde{y}^t),$$

$$(\tilde{x}^t,\tilde{y}^t)\in X_1\times X_1,\ \tilde{n}\in N\}=\inf\{\sum_{i=1}^{n}q(x^i,y^i):\nu=\sum_{i=1}^{n}x^i\widehat{\otimes}y^i),\ (x^i,y^i)\in X_1\times X_1,\ n\in N\}=\widehat{q}(\nu).$$

Так как $b_0(x_1,y_1)\le q(x_1,y_1)$ для всех $(x_1,y_1)\in X_1\times X_1$, то отсюда следует, что $\sum_{i=1}^{n}b_0(x^i,y^i)\le\sum_{i=1}^{n}q(x^i,y^i)$ при $\nu=\sum_{i=1}^{n}x^i\widehat{\otimes}y^i$, где $(x^i,y^i)\in X_1\times X_1$, $n\in N$. Обозначив $u(\nu)=\sum_{i=1}^{n}b_0(x^i,y^i)$ при $\nu=\sum_{i=1}^{n}x^i\widehat{\otimes}y^i$, имеем, что $u(\nu)\le\widehat{q}(\nu)$ при $\nu\in X_1\widehat{\otimes}X_1$. Ясно, что $u(x\widehat{\otimes}y)=b_0(x,y)\le q(x,y)$ при $(x,y)\in X_1\times X_1$. По теореме Хана–Банаха (см.: [16. С. 156]) существует линейная функция $\tilde{u}$, определенная на $X\hat{\otimes}X$ такая, что $\tilde{u}(\nu)=u(\nu)$ при $\nu\in X_1\hat{\otimes}X_1$ и $\tilde{u}(\nu)\le\hat{q}(\nu)$ при $\nu\in X\hat{\otimes}X$. Ясно, что $b(x,y)=\tilde{u}(x\hat{\otimes}y)\le\hat{q}(x\hat{\otimes}y)=q(x,y)$ для любого $(x,y)\in X\times X$, $b(x,y)=\tilde{u}(x\hat{\otimes}y)$ – билинейная симметричная функция в $X\times X$, и $b(x_1,y_1)=b_0(x_1,y_1)$ при $(x_1,y_1)\in X_1\times X_1$. Теорема доказана.

Если X – банахово пространство и $\nu\in X\hat{\otimes}X$, то положим

$$\|\nu\|_p=\inf\{\sum_{i=1}^{n}\|x^i\|\|y^i\|:\nu=\sum_{i=1}^{n}x^i\hat{\otimes}y^i,\quad (x^i,y^i)\in X\times X,\ n\in N\}.$$

Очевидно, что $\|\cdot\|_p$ – норма в $X\hat{\otimes}X$ (см.: [15]). Она называется проективной нормой в $X\hat{\otimes}X$.

Отметим, что если $X\hat{\otimes}X$ наделено проективной топологией, то $(X\hat{\otimes}X)^*=\overline{B}(X^2,R)$.

Если $\hat{q}:X\hat{\otimes}X\to R$ – полунепрерывная снизу сублинейная функция, то из предложения 4.1.1 [13. С. 203] имеем, что $\hat{q}(\nu)=\sup\{\,b(\nu):b\in\partial\hat{q}\}$, где

$$\partial\hat{q}=\{\,b\in\overline{B}(X^2,R):\hat{q}(\nu)\ge b(\nu)\ \textit{при}\ \ \nu\in X\hat{\otimes}X\}.$$

Так как при условии леммы 8 $\hat{q}(x\hat{\otimes}y)=q(x,y)$ при $(x,y)\in X\times X$, то имеем, что $q(x,y)=\sup\{b(x,y):b\in\partial_2 q\}$, где

$$\partial_2 q=\{b\in\overline{B}(X^2,R):q(x,y)\ge b(x,y)\ \text{при}\ (x,y)\in X\times X\}.$$

Лемма 9. Если X – банахово пространство, $q:X\times X\to R$ – симметричная четная бисублинейная непрерывная функция, то $\hat{q}:X\hat{\otimes}X\to R$ – непрерывная функция.

Доказательство. Легко проверяется, что выпуклая оболочка $\overline{B}=co(B\hat{\otimes}B)$, где $B=\{x\in X:\|x\|\le 1\}$, является единичным шаром в $X\hat{\otimes}X$. По условию q – бисублинейная непрерывная функция, поэтому по лемме 2.8 [7. С. 21] существует $M>0$ такое, что $|q(x,y)|\le M\|x\|\|y\|$ при $(x,y)\in X\times X$. Тогда имеем, что $q(x,y)\le M$ для любого $(x,y)\in B\times B$. Если $\nu\in co(B\hat{\otimes}B)$, то существуют $x_i,y_i\in B$ и $\lambda_i\ge 0$, $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$ при $i=1,\ldots,k$ такие, что $\nu=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(x_i\hat{\otimes}y_i)$, где $k\in N$.

Тогда из равенства $\hat{q}(x_i\hat{\otimes}y_i)=q(x_i,y_i)\le M$ и сублинейности функции $\hat{q}$ имеем, что $\hat{q}(\nu)\le\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\hat{q}(x_i\hat{\otimes}y_i)\le M$, т.е. $\hat{q}(\nu)\le M$ при $\nu\in co(B\hat{\otimes}B)$. Так как $\hat{q}(0)=0$, то по теореме 3.2.1 [13. С. 181] получим, что $\hat{q}$ – непрерывная функция. Лемма доказана.

Если X – банахово пространство, $f:X\to R$, то положим

$$\overline{\partial}_2 f(x_0)=\{b\in B(X^2,R):f^{\{2\}}(x_0;x,y)\ge b(x,y)\ \text{при}\ x,y\in \mathrm{X}\},$$

где через $B(X^2;R)$ обозначено множество всех непрерывных билинейных функций из X^2 в R.

Следствие 2. Если X – банахово пространство, $f:X\to R$ – 2-липшицевая функция в окрестности точки x_0, то

$$f^{\{2\}}(x_0;x,y)=\sup\{b(x,y):b\in\overline{\partial}_2 f(x_0)\}=\sup\{b(x,y):b\in\partial_2 f(x_0)\}.$$

Доказательство. Если f – 2-липшицевая функция в окрестности точки x_0 с постоянной L, то $f^{\{2\}}(x_0;x,y)$ – бисублинейная симметрическая четная функция, и $\left|f^{\{2\}}(x_0;x,y)\right|\le L\|x\|\|y\|$ при $(x,y)\in X\times X$. Положив $q(x,y)=f^{\{2\}}(x_0;x,y)$, аналогично лемме 9 имеем, что $\hat{q}:X\hat{\otimes}X\to R$ – непрерывная функция. Тогда справедливость следствия 2 следует из предложения 4.1.1 [13. С. 203] и леммы 8. Следствие доказано.

Если $f_1:X\to R$ и $f_2:X\to R$ удовлетворяют 2-липшицеву условию с постоянной K в окрестности точки x_0, то непосредственно проверяется, что

$$(f_1+f_2)^{\{2\}}(x_0;\,x_1,x_2)\le f_1^{\{2\}}(x_0;\,x_1,x_2)+f_2^{\{2\}}(x_0;\,x_1,x_2)$$

при $x_1,\,x_2\in X$. Поэтому $\partial_{\{2\}}(f_1+f_2)^{\{2\}}(x_0)\subset\partial_{\{2\}}(f_1^{\{2\}}(x_0;\cdot)+f_2^{\{2\}}(x_0;\cdot))$, где

$$\partial_{\{2\}}(f_1^{\{2\}}(x_0;\cdot)+f_2^{\{2\}}(x_0;\cdot))=$$
$$=\{b\in\overline{B}(X^2,R):\,f_1^{\{2\}}(x_0;\,x_1,x_2)+f_2^{\{2\}}(x_0;\,x_1,x_2)\ge b(x_1,x_2)\text{ при }x_1,x_2\in X\}.$$

Если $A\subset\overline{B}(X^2,R)$, то S-оболочкой множества A назовем множество

$$SA=\{b\in\overline{B}(X^2,R):\sup\{\tilde{b}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2):\tilde{b}\in A\}\ge b(x_1,x_2)\ \text{ при }\ x_1,x_2\in \mathrm{X}\}.$$

Используя S-оболочку множества, имеем, что

$$\partial_{\{2\}}(f_1+f_2)^{\{2\}}(x_0)\subset S(\partial_{\{2\}}f_1(x_0)+\partial_{\{2\}}f_2(x_0)).$$

Множество $d_{\{2\}}f(x_0)=\{Q\in B_0(X):\,f_{\{2\}}(x_0;x,x)\le Q(x)\le f^{\{2\}}(x_0;x,x)\text{ при }x\in X\}$ назовем также бидифференциалом функции f в точке x_0.

Отметим, что аналогично можно изучить свойства бидифференциала $d_{\{2\}}f(x_0)$.

Список источников

1. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988, 280 с.
2. *Clarke F.* Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control. London: Springer-Verlag, 2013. 591 p.
3. *Penot J.-P.* Calculus Without Derivatives, Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer, 2013. 524 p.
4. *Садыгов М.А.* Необходимое условие экстремума высших порядков для негладких функций // Известия Академии наук Азербайджанской ССР. Сер. физико-технических и математических наук. 1989. № 6. С. 33–47.
5. *Садыгов М.А.* Экстремальные задачи для негладких систем. Баку: Элм, 1996. 148 с.
6. *Садыгов М.А.* Негладкий анализ и его приложения к экстремальной задаче для включения типа Гурса–Дарбу. Баку: Элм, 1999. 135 с.
7. *Садыгов М.А.* Исследование негладких оптимизационных задач. Баку: Элм, 2002. 125 с.

8. *Садыгов М.А.* Субдифференциал высшего порядка и оптимизация. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2014. 359 с.
9. *Cominetti R., Correa R.* A generalized second-order derivative in nonsmooth optimization // SIAM Journal on Control and Optimization. 1990. V. 28. P. 789–809.
10. *Ioffe A., Milosz T.* On characterization of $C^{1,1}$ functions // Системный анализ. 2002. № 3. С. 3–13.
11. *Rockafellar R.T., Wets R. J-B.* Variational Analysis. Berlin; Heidelberg: Springer, 2009. 733 p.
12. *Бедельбаев А.А.* О субдифференциалах второго порядка и их приложениях в вариационном исчислении : автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. Алма-Ата, 1986. 14 с.
13. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 479 с.
14. *Лоран П.-Ж.* Аппроксимация и оптимизация. М.: Мир, 1975. 496 с.
15. *Хелемский А.Я.* Гомология в банаховых и топологических алгебрах. М.: Изд-во МГУ, 1986. 288 с.
16. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989. 623 с.

References

1. Clarke F.H. (1983) *Optimization and Nonsmooth Analysis*. New York: John Wiley & Sons.
2. Clarke F.H. (2013) *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control.* London: Springer-Verlag.
3. Penot J.-P. (2013) *Calculus without Derivatives*. New York: Springer.
4. Sadygov M.A. (1989) Neobkhodimoye usloviye ekstremuma vysshikh poryadkov dlya negladkikh funktsiy [Necessary condition of the high order extremum for nonsmooth functions]. *Izvestiya Akademii nauk Azerbaydzhanskoy SSR. Seriya fiziko-matematicheskikh i tekhnicheskikh nauk.* 6. pp. 33–47.
5. Sadygov M.A. (1996) *Ekstremal'nyye zadachi dlya negladkikh system* [Extremum problems for nonsmooth systems]. Baku: Elm.
6. Sadygov M.A. (1999) *Negladkiy analiz i yego prilozheniya k ekstremal'noy zadache dlya vklyucheniya tipa Gursa – Darbu* [Nonsmooth analysis and its applications to the extremum problem for the Goursat–Darboux type inclusion]. Baku: Elm.
7. Sadygov M.A. (2002) *Issledovaniye negladkikh optimizatsionnykh zadach* [Investigation of nonsmooth optimization problems]. Baku: Elm.
8. Sadygov M.A. (2014) *Subdifferential of High Orders and Optimization*. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing.
9. Cominetti R., Correa R. (1990) A generalized second-order derivative in nonsmooth optimization. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 28. pp. 789–809.
10. Ioffe A., Milosz T. (2002) On a characterization of $C^{1,1}$-functions. *Cybernetics and Systems Analysis*. 38(3). pp. 313–322.
11. Rockafellar R.T., Wets R.J.-B. (2009) *Variational Analysis*. Berlin: Springer.
12. Bedel'bayev A.A. (1986) *O subdifferentsialakh vtorogo poryadka i ikh prilozheniyakh v variatsionnom ischislenii* [On second order subdifferentials and their applications in variational calculus]. Dissertation. Academy of Sciences of Kazakh SSR, Institute of Mathematics and Mechanics.
13. Ioffe A.D., Tihomirov V.M. (1979) *Theory of Extremal Problems*. Amsterdam: North Holland Publishing Company.
14. Laurent P.J. (1972) *Approximation et Optimisation*. Paris: Herrman.
15. Khelemskiy A.Ya. (1986) *Gomologiya v banakhovykh i topologicheskikh algebrakh* [Gomology in Banach and topological spaces]. Moscow: Moscow State University.
16. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. (2012) *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*. Mansfield Center: Martino Fine Books.

***Сведения об авторе*:**
Садыгов Мисраддин Аллахверди оглы – доктор физико-математических наук, профессор Бакинского государственного университета (Баку, Азербайджан). E-mail: misreddin08@ rambler.ru

***Information about the author*:**
Sadygov Misraddin A. (Doctor of Physikal and Mathematical Sciences, Professor, Baku State University, Baku, Azerbayjan). E-mail: misreddin08@rambler.ru

Статья поступила в редакцию 27.11.2024; принята к публикации 05.02.2026

The article was submitted 27.11.2024; accepted for publication 05.02.2026