

Научная статья

УДК 512.545

doi: 10.17223/19988621/99/2

MSC: 06F15; 08B15

## Примеры разрешимых групп с конечным числом упорядочений

Алексей Владимирович Зенков<sup>1</sup>, Сергей Викторович Ленюк<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Алтайский государственный аграрный университет, Барнаул, Россия

<sup>2</sup> Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Россия

<sup>1</sup> alexey\_zenkov@yahoo.com

<sup>2</sup> lenyuk1972@mail.ru

**Аннотация.** При изучении упорядочиваемых групп естественным образом возникает вопрос о мощности множества линейных порядков группы. Несложно заметить: если группа допускает конечное число упорядочений, то оно четное. Однако до сих пор неизвестно, для каждого ли четного  $n = 2k$  найдется группа, допускающая  $n$  упорядочений.

Изучение разрешимых групп с конечным числом упорядочений берет свое начало в статье В.М. Копытова «О линейно упорядоченных разрешимых группах» (1973), в которой было доказано, что в неабелевой разрешимой группе с конечным числом порядков это число кратно 4, и были приведены примеры разрешимых групп степени 2 с конечным числом порядков. Как продолжение этой работы можно рассматривать статью В.В. Блудова и Л.Э. Бадмаевой «О способе построения упорядочиваемых разрешимых групп с конечным числом упорядочений» (2014), где приведены примеры разрешимых групп степени разрешимости 3 с конечным числом упорядочений. Настоящую работу можно рассматривать как продолжение работ, упомянутых выше. Именно, строятся примеры разрешимых групп степеней 4, 5 и 6, допускающие конечное число упорядочений.

**Ключевые слова:** разрешимая группа, линейный порядок

**Для цитирования:** Зенков А.В., Ленюк С.В. Примеры разрешимых групп с конечным числом упорядочений // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2026. № 99. С. 22–29. doi: 10.17223/19988621/99/2

Original article

## On solvable groups with a finite number of orderings

Alexey V. Zenkov<sup>1</sup>, Sergey V. Lenyuk<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Altai State Agricultural University, Barnaul, Russian Federation

<sup>2</sup> Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russian Federation

<sup>1</sup> alexey\_zenkov@yahoo.com

<sup>2</sup> lenyuk1972@mail.ru

**Abstract.** A group  $G$  is called orderable if it is possible to introduce on it a linear order relation that is stable under two-way multiplication. Obviously, if a group admits a finite number of orderings, then it is even. It is still unknown whether for every natural  $n$  there is a group admitting exactly  $2n$  orderings.

For solvable groups, this issue was solved by V.M. Kopytov. Namely, it was shown that if a nonabelian solvable group admits a finite number of orders, then it is a multiple of 4, and for each natural number  $n$  an example of a solvable group with  $4n$  orders is given. However, all these groups had a solvability class of 2. Therefore, the question of the existence (description) of solvable groups with a finite number of orderings and the solvability class greater than 2 seems natural. The study of such groups was started by V.V. Bludov and L.E. Badmaeva. They gave examples of solvable groups of class 3 with a finite number of orderings. In the proposed work, we construct solvable groups with a finite number of orderings the solvability class of which is 4, 5, and 6. These groups are constructed as a semidirect product of a free nilpotent group with two generators using an infinite cyclic group. We also note that calculations in a free nilpotent group are based on the standard calculus of basic commutators.

**Keywords:** solvable group, totally order

**For citation:** Zenkov, A.V., Lenyuk, S.V. (2026) On solvable groups with a finite number of orderings. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 99. pp. 22–29. doi: 10.17223/19988621/99/2

## Введение

Напомним, что группа  $G$  называется *упорядочиваемой*, если на ней можно ввести отношение линейного порядка  $\geq$ , которое устойчиво относительно двухстороннего умножения, т.е.

для любых  $x, y, z, t \in G$  неравенство  $x \geq y$  влечет  $tx \geq tyz$ .

Ясно, если группа  $G$  упорядочена при помощи порядка  $\geq$ , то для нее имеет место и обратный порядок  $\geq'$ , т.е.  $x \geq' y \Leftrightarrow y \geq x$ . Стало быть, если группа допускает конечное число упорядочений, то оно четное. До сих пор неизвестно, для каждого ли натурального  $n$  найдется группа, допускающая ровно  $2n$  упорядочений.

Для *разрешимых* групп этот вопрос решен В.М. Копытовым: им в работе [1] показано, что если разрешимая неабелева группа допускает конечное число упорядочений, то оно кратно 4, и для каждого натурального  $n$  приведен пример группы, имеющей  $4n$  упорядочений. Однако все построенные группы имели степень разрешимости 2. Поэтому естественным представляется вопрос существования (описания) разрешимых групп с конечным числом упорядочений, степень разрешимости которых  $\geq 3$

Изучение таких групп начато В.В. Блудовым и Л.Э. Бадмаевой в [2]. Ими приведены примеры разрешимых группы степени 3 с конечным числом упорядочений.

В предлагаемой работе строятся разрешимые группы с конечным числом упорядочений, степени разрешимости которых 4, 5, 6.

Все необходимые сведения по теории упорядоченных групп можно найти в книге [3], по теории групп – в [4].

### Предварительные сведения

Напомним некоторые понятия из теории групп и упорядоченных групп, которые нам необходимы. Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется *изолированной*, если для любого  $g \in G$  и натурального  $n$  включение  $g^n \in H$  означает  $g \in H$ . Непосредственно из определения вытекает, что фактор-группа  $G/H$  группы  $G$  по изолированной нормальной подгруппе  $H$  не имеет кручения. Подгруппа  $H$  линейно упорядоченной группы  $G$  называется *выпуклой*, если для любых  $h_1, h_2 \in H, g \in G$  неравенство  $h_1 \leq g \leq h_2$  влечет  $g \in H$ . Подгруппа  $H$  упорядочиваемой группы  $G$  *относительно выпукла*, если она выпукла при некотором упорядочении группы  $G$ . Очевидно, что всякая относительно выпуклая подгруппа изолирована, и фактор-группа  $G/H$  упорядочиваемой группы  $G$  по относительно выпуклой нормальной подгруппе  $H$  упорядочиваема.

В упомянутой выше статье В.М. Копытова [1] приведен следующий критерий упорядочиваемости разрешимой группы *конечного* ранга.

**Теорема 1.** ([1. Теорема 3.1]) *Разрешимая группа  $G$  конечного ранга и без кручения упорядочиваема тогда и только тогда, когда она действует положительно на своей максимальной нормальной нильпотентной подгруппе.*

Понятие «действует положительно» разъясним на примере группы  $G_{c+1}$ , являющейся полупрямым произведением свободной  $c$ -степенно нильпотентной группы  $N_{2,c}$  с двумя порождающими и бесконечной циклической группы  $(d)$ . Предположим, что

$$N_{2,c} = N'_1 \geq N'_2 \geq \dots \geq N'_t \geq N'_{t+1} = E \quad (1)$$

есть *неуплотняемый* центральный ряд в  $N_{2,c}$ , состоящий из нормальных в  $G_{c+1}$  и изолированных в  $N_{2,c}$  подгрупп. Сопряжение элементом  $d$  в каждом факторе  $\bar{N}'_k = N'_k / N'_{k+1}, k = 1, \dots, t$  естественным образом индуцирует линейное преобразование  $\bar{\varphi}$  по правилу  $(\bar{g})\bar{\varphi} = (g)^d N'_{k+1}$ , где  $\bar{g} = gN'_{k+1} \in N'_k$ . Через  $V_k$  обозначим пополнение абелевой группы  $\bar{N}'_k$ . Ясно, что  $V_k$  есть векторное пространство над полем рациональных чисел  $\mathbf{Q}$  и что действие  $\bar{\varphi}$  продолжается до линейного преобразования  $\varphi$  этого пространства. Неуплотняемость ряда (1) влечет неприводимость  $\varphi$  над  $\mathbf{Z}$ . С другой стороны, на  $\varphi$  можно смотреть и как на линейное преобразование векторного пространства  $V'_k$ , получающегося из  $V_k$  с помощью расширения  $\mathbf{Q}$  до поля алгебраических чисел. Если для каждого  $k$  найдется вектор  $v_k \in V'_k$ , собственный относительно  $\varphi$ , причем его собственные значения *вещественны и положительны*, то это и будет означать, что группа  $G_{c+1}$  действует положительно на  $N_{2,c}$ .

Отметим также, что вычисления в  $N_{2,c}$  базируются на стандартном исчислении базисных коммутаторов (см., напр.: [4]).

### Основной результат

Порождающие элементы  $N_{2,c}$  обозначим через  $b_1, b_2$ . Считаем, что  $b_2 > b_1$ , и это базисные коммутаторы веса 1. Сразу отметим, что упорядочение базисных коммутаторов следующее: 1) по весу; 2) внутри одного веса используется лексикографическое упорядочение.

Действие  $d$  на порождающих определим следующим образом:

$$b_2^d = b_1, b_1^d = b_2^{-1} b_1^m, \quad (2)$$

где целое  $m > 4$ .

**Замечание.** Формула (2) определяет действие во всех случаях.

Через  $N_k$  обозначим  $k$ -й член нижнего центрального ряда группы  $N_{2,c}$ . Хорошо известно (см., напр.: [4]), что базисные коммутаторы веса  $k$  образуют базис свободной абелевой группы

$\bar{N}_k = N_k / N_{k+1}$ . Следовательно  $\bar{N}_k$  можно рассматривать как подпространство конечномерного векторного пространства над  $\mathbf{Z}$ , размерность которого, очевидно, определяется числом базисных коммутаторов веса  $k$ . Стало быть, для каждого  $k$  можно найти матрицу  $A_k$  линейного преобразования  $\varphi$ . Далее, через  $f_k(\lambda)$  обозначим характеристический многочлен матрицы  $A_k$ .

Если все  $f_k(\lambda)$  неприводимы над  $\mathbf{Z}$  и имеют хотя бы по одному положительному (иррациональному) корню, то нижний центральный ряд будет искомым. В случае приводимости  $f_k(\lambda)$  соответствующий отрезок от  $N_k$  до  $N_{k+1}$  следует уплотнить при помощи нормальных в  $G_{c+1}$  и изолированных в  $N_{2,c}$  подгрупп.

#### Случай $G_4$

Выпишем все базисные коммутаторы группы  $N_{2,3}$  веса  $\geq 2$ . Коммутатор  $b_{21} = [b_2, b_1]$  – единственный базисный коммутатор веса 2; коммутаторы  $b_{212} = [b_{21}, b_2] > b_{211} = [b_{21}, b_1]$  образуют группу базисных коммутаторов веса 3. Запишем нижний центральный ряд:

$$N_{2,3} = N_1 \geq N_2 \geq N_3 \geq N_4 = E. \quad (3)$$

Образы базисных коммутаторов в факторах обозначаем как сами базисные коммутаторы, и вычисления в  $\bar{N}_k$ , разумеется, ведутся по модулю  $N_{k+1}$ . Например,

$$(b_{21})\varphi = ([b_2, b_1])\gamma = [b_1, b_2^{-1} b_1^m] = [b_1, b_2^{-1}] [b_1, b_1^m] = b_{21}. \quad (4)$$

Поступая аналогично, видим, что

$$(b_{212})\varphi = b_{211}, (b_{211})\varphi = b_{212}^{-1} b_{211}^m. \quad (5)$$

Полученные формулы позволяют утверждать, что

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & m \end{pmatrix}, A_2 = (1), A_3 = A_1.$$

Так как многочлен  $f_1(\lambda) = \lambda^2 - m\lambda + 1$  неприводим над  $\mathbf{Z}$  и  $f_2(\lambda) = \lambda - 1$ , то ряд (3) неуплотняем. Далее, все корни характеристических многочленов положительны, и поэтому группа  $G_4$  допускает ровно  $2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 = 64$  порядка.

**Случай G<sub>5</sub>**

Выпишем все базисные коммутаторы веса 4:

$$b_{2122} = [b_{212}, b_2] > b_{2112} = [b_{211}, b_2] > b_{2111} = [b_{211}, b_1].$$

Из формул (2) и (5) следует, что

$$(b_{2122})\varphi = b_{2111}, (b_{2112})\varphi = b_{2121}^{-1} b_{2111}^m, (b_{2111})\varphi = b_{2122} b_{2112}^{-m} b_{2121}^{-m} b_{2111}^{m^2}.$$

Следующая формула отмечена в [5] (Лемма 1)

$$b_{2121} = b_{2112}. \tag{6}$$

С учетом этой формулы получаем, что

$$(b_{2122})\varphi = b_{2111}, (b_{2112})\varphi = b_{2121}^{-1} b_{2111}^m, (b_{2111})\varphi = b_{2122} b_{2112}^{-2m} b_{2111}^{m^2}. \tag{7}$$

Стало быть,

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & m \\ 1 & -2m & m^2 \end{pmatrix}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$f_4(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + (2 - m^2)\lambda + 1) = (\lambda - 1)(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2),$$

где  $\lambda_{1,2} = \frac{m^2 - 2 \pm \sqrt{m^4 - 4m^2}}{2}$  оба положительны. Приводимость  $f_4(\lambda)$  означает,

что нижний центральный ряд группы  $N_{2,4}$  следует уплотнить. Для этого рассмотрим

$N_4^* = \{g \in N_4 : g^d = g\}$ . Ясно, что  $N_4^*$  есть подгруппа и она нормальна в  $G_5$ .

Более того, из построения следует, что она изолирована в  $N_{2,4}$ . Таким образом строится следующий, уже неуплотняемый, ряд

$$N_{2,4} = N_1 \geq N_2 \geq N_3 \geq N_4 \geq N_4^* \geq N_5 = E. \tag{8}$$

Проведенные вычисления показывают, что группа  $G_5$  допускает ровно  $2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 = 512$  порядков.

**Случай G<sub>6</sub>**

В группе  $N_{2,5}$  рассмотрим ряд

$$N_{2,5} = N_1 \geq N_2 \geq N_3 \geq N_4 \geq N_4^* \geq N_5 \geq N_6 = E, \tag{9}$$

где  $N_5$  – свободная абелева группа, порождающими которой являются базисные коммутаторы веса 5. Для удобства их записи введем еще одно обозначение. Это связано с тем, что коммутаторы данного веса могут быть получены не только по схеме «4 + 1», но и по схеме «3 + 2». Поэтому, например,  $b_{21222} = [b_{2122}, b_2]$ ,

$$b_{212,21} = [b_{212}, b_{21}].$$

**Лемма 1.** *Имеет место следующая формула:*

$$b_{21221} = b_{21122} b_{212,21}, \quad b_{21121} = b_{21122} b_{211,21}. \tag{10}$$

**Доказательство.** Распишем коммутатор  $b_{21221} = [b_{2122}, b_1] = b_{2122}^{-1} b_1^{-1} b_{212}^{-1} b_2^{-1} b_{212} b_2 b_1$ .

Переставляя местами  $b_2$  и  $b_1$ , получаем, что  $b_{21221} = b_{2122}^{-1} b_1^{-1} b_{212}^{-1} b_2^{-1} b_{212} b_1 b_2 b_{21}$ . Теперь

переставляем  $b_{212}$  и  $b_1$ . В результате имеем  $b_{21221} = b_{2122}^{-1} b_1^{-1} b_{212}^{-1} b_2^{-1} b_1 b_{212} b_{2121} b_2 b_{21}$ .

Передвигая влево  $b_2$  с учетом формулы (6) приходим к записи

$b_{21221} = b_{2122}^{-1} b_1^{-1} b_{212}^{-1} b_2^{-1} b_1 b_{212} b_2 b_{2112} b_{21122} b_{21}$ . Далее, учитывая веса участвующих в перестановках коммутаторов, одновременно передвигая влево  $b_2$  и  $b_{21}$ , приходим к формуле  $b_{21221} = b_{2122}^{-1} b_1^{-1} b_{212}^{-1} b_1 b_{12} b_{21} b_{212} b_{212,21} b_{2122} b_{2112} b_{21122}$ .

Таким образом,  $b_{21221} = b_{2122}^{-1} b_{2121}^{-1} b_{212,21} b_{2122} b_{2112} b_{21122}$ . Используя опять формулу (6), убеждаемся в истинности первой формулы в (10). Вывод второй формулы осуществляется аналогично. #

Формула (10) с учетом ранее приведенных формул позволяет вычислить действие  $\varphi$  на базисных коммутаторах веса 5. Например,

$$(b_{21111})\varphi = [b_{2122} b_{2112}^{-2m} b_{2111}^{m^2}, b_2^{-1} b_1^m] = b_{21222}^{-1} b_{21122}^{2m} b_{21112}^{-m^2} b_{21221}^m b_{21121}^{-2m^2} b_{21111}^{m^3} = \\ = b_{21222}^{-1} b_{21122}^{3m} b_{21112}^{-3m^2} b_{21111}^{m^3} b_{212,21}^m b_{211,21}^{-2m^2}.$$

Поэтому

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & m & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2m & m^2 & 1 & 1 \\ -1 & 3m & -3m^2 & m^3 & m & -2m^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & m \end{pmatrix}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что  $f_5(\lambda) = f_1^2(\lambda)(\lambda^2 + (3m - m^3)\lambda + 1)$ .

Так как  $f_5(\lambda)$  приводим над  $\mathbf{Z}$ , то ряд (9) следует уплотнить.

Для краткости переобозначим базисные коммутаторы веса 5 через  $x_i$ , где  $i = 1, \dots, 6$ , нумеруя их в соответствии с ранее введенным на них порядком, т.е.

$$x_1 = b_{21222}, x_2 = b_{21122}, x_3 = b_{21112}, x_4 = b_{21111}, x_5 = b_{212,21}, x_6 = b_{211,21}.$$

Рассмотрим элементы

$$x = x_1^m x_2^{-(m^2+1)} x_3^{2m} x_4^{-1}, y = x_1 x_2^{-m} x_3. \quad (11)$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$x^d = y x_5^m x_6^{2m(m+1)}, y^d = x^{-1} y^m x_5 x_6. \quad (12)$$

Через  $N_5^*$  обозначим нормальное замыкание в  $G_6$  подгруппы, порожденной элементами  $x$  и  $x_5$ . Напомним еще раз, что  $x_5^d = x_6, x_6^d = x_5^{-1} x_6^m$ . Стало быть, группа  $N_5^{**} = \text{gr}(x_5, x_6)$  содержится в  $N_5^*$ . Более того, она нормальная в  $G_6$  и изолированная в  $N_{2,5}$ .

Всякий элемент  $g^* \in N_5^*$  имеет вид:

$$g^* = x^{d^{s_1} + \dots + d^{s_k}} x_5^{d^{q_1} + \dots + d^{q_r}}, \quad (13)$$

где  $s_i, q_j \in \mathbf{Z}$ .

**Замечание.** Элемент  $N_5^{**}$  в записи любого элемента из  $N_5^*$ , если нам не важна его точная запись, в дальнейшем обозначаем через  $g^{**}$ .

Так как для любого целого  $s$  имеет место

$$x^{d^s} = x^{f_s} y^{g_s} g^{**}, \quad (14)$$

где  $f_s, g_s \in \mathbf{Z}$ , то формула (13) приобретает вид:

$$g^* = x^{\sum f_{s_i}} y^{\sum g_{s_i}} g^{**}. \quad (15)$$

Предположим, нашлись  $g \in G_6 \setminus N_5^*$  и целое  $n \geq 2$  такие, что  $g^n \in N_5^*$ . Очевидно, что  $g \in N_5$ , и поэтому  $g = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} x_4^{\alpha_4} g^{**}$ , где  $\alpha_i \in \mathbf{Z}, i = 1, \dots, 4$ . В случае необходимости, переходя от  $g$  к  $g(g^{**})^{-1}$ , можно считать, что

$$g = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} x_4^{\alpha_4}.$$

Следовательно,  $g^n = x_1^{\alpha_1 n} x_2^{\alpha_2 n} x_3^{\alpha_3 n} x_4^{\alpha_4 n}$ . Отсутствие в последней записи  $g^n$  базисных коммутаторов  $x_5$  и  $x_6$  в силу формулы (15) дает равенство

$$x_1^{\alpha_1 n} x_2^{\alpha_2 n} x_3^{\alpha_3 n} x_4^{\alpha_4 n} = x^{\sum f_{s_i}} y^{\sum g_{s_i}}.$$

Вспоминая запись  $x$  и  $y$  через базисные коммутаторы (см. формулу (11)), приходим к следующей системе:

$$\begin{cases} \alpha_1 n = m \sum f_{s_i} + \sum g_{s_i}, \\ \alpha_2 n = -(m^2 + 1) \sum f_{s_i} - m \sum g_{s_i}, \\ \alpha_3 n = 2m \sum f_{s_i} + \sum g_{s_i}, \\ \alpha_4 n = -\sum f_{s_i}. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  получаем, что

$$\begin{cases} \alpha_1 = m\alpha_4 + \alpha_3, \\ \alpha_2 = (1 - m^2)\alpha_4 - m\alpha_3. \end{cases}$$

Учитывая этот факт, видим, что

$$g = x_1^{m\alpha_4 + \alpha_3} x_2^{(1-m^2)\alpha_4 - m\alpha_3} x_3^{\alpha_3} x_4^{\alpha_4} = (x_1^m x_2^{(1-m^2)} x_4)^{\alpha_4} (x_1 x_2^{-m} x_3)^{\alpha_3} = g_0^{\alpha_4} y^{\alpha_3},$$

где  $g_0 = x_1^m x_2^{(1-m^2)} x_4$ . То, что  $g_0 = x^{-1} y^{2m}$ , проверяется непосредственно. Стало быть,  $g = (x^{-1} y^{2m})^{\alpha_4} y^{\alpha_3}$ , и мы приходим к противоречию.

Итак, показано, что  $N_5^*$  – изолированная подгруппа группы  $G_6$ . Следующий ряд будет искомым:

$$N_{2,5} = N_1 \geq N_2 \geq N_3 \geq N_4 \geq N_4^* \geq N_5 \geq N_5^* \geq N_5^{**} \geq N_6 = E. \quad (16)$$

Действительно, характеристический многочлен  $N_5^{**}$  и фактора  $N_5^* / N_5^{**}$  суть  $f_1(\lambda) = \lambda^2 - m\lambda + 1$ ; многочлен  $\lambda^2 + (3m - m^3)\lambda + 1$  является характеристическим для фактора  $N_5 / N_5^*$ . Положительность и иррациональность корней этих многочленов, очевидны. Следовательно, группа  $G_6$  допускает ровно  $512 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 32\,768$  порядков.

#### Список источников

1. Копытов В.М. О линейно упорядоченных разрешимых группах // Алгебра и логика. 1973. Т. 12, № 6. С. 655–666.
2. Блудов В.В., Бадмаева Л.Э. О способе построения упорядочиваемых разрешимых групп с конечным числом упорядочений // Известия Иркутской государственной экономической академии. 2014. Т. 98, № 6. С. 152–158.

3. Копытов В.М. Решеточно упорядоченные группы. М.: Наука, 1984. 300 с.
4. Холл М. Теория групп. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 467 с.
5. Романьков В.А. Недистрибутивность решетки многообразий нильпотентных групп // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, № 1.С. 67–72.

#### References

1. Kopytov V.M. (1973) On linearly ordered solvable groups. *Algebra and Logic*. 12(6). pp. 374–380.
2. Bludov V.V., Badmaeva L.E. (2014) О способе построения упорядочиваемых разрешимых групп с конечным числом упорядочений [On a method for constructing orderable solvable groups with a finite number of orderings]. *Izvestiya Irkutskoy Gosudarstvennoy Ekonomicheskoy Akademii – Izvestiya of Irkutsk State Economics Academy (Baikal State University of Economics and Law)*. 6. pp. 152–158.
3. Kopytov V.M., Medvedev N.Ya. (1996) *Pravouporядochennyye grupy* [Right-Ordered Groups]. Novosibirsk: Nauchnaya kniga.
4. Hall M. (1959) *The Theory of Groups*. London: Macmillan.
5. Romankov V.A. (1970) Nondistributivity of the lattice of varieties of nilpotent groups. *Algebra and Logic*. 9(1). pp. 41–44.

#### Сведения об авторах:

**Зенков Алексей Владимирович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики, механики и инженерной графики Алтайского государственного аграрного университета (Барнаул, Россия). E-mail: alexey\_zenkov@yahoo.com

**Ленюк Сергей Викторович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Московского физико-технического института (национального исследовательского университета) (Долгопрудный, Россия). E-mail: lenyuk1972@mail.ru

#### Information about the authors:

**Zenkov Alexey V.** (Candidate of Physics and Mathematics, Altai State Agricultural University, Barnaul, Russian Federation). E-mail: alexey\_zenkov@yahoo.com

**Lenyuk Sergey V.** (Candidate of Physics and Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russian Federation). E-mail: lenyuk1972@mail.ru

*The article was submitted 26.10.2024; accepted for publication 05.02.2026*

*Статья поступила в редакцию 26.10.2024; принята к публикации 05.02.2026*