

Научная статья

УДК 533.6

doi: 10.17223/19988621/99/6

Численное исследование процесса метания инертных тел и определение характеристик их свободного механического движения

Илья Михайлович Тырышкин¹, Константин Николаевич Жильцов²,
Кирилл Владимирович Костюшин³, Иван Владимирович Еремин⁴,
Анатолий Алексеевич Глазунов⁵

^{1, 2, 3, 4, 5} Томский государственный университет, Томск, Россия

¹ tyryshkin@niipmm.tsu.ru

² konstantin@niipmm.tsu.ru

³ kostushink@niipmm.tsu.ru

⁴ iveremin@niipmm.tsu.ru

⁵ gla@niipmm.tsu.ru

Аннотация. Представлены результаты численного исследования метания инертного твердого тела под углом к горизонту при воздействии внешних газодинамических сил. Движение тела определяется с учетом его геометрических размеров, массы и массопроцентных характеристик. Предложены математическая модель и методика расчета, которая позволяет определять силы, действующие на тело, момент вращения относительно его центра масс, угловые скорости и ускорения. Представлены результаты моделирования движения тела в плоской нестационарной постановке для различных углов метания и массопроцентных характеристик тела.

Ключевые слова: газовая динамика, математическое моделирование, траектория, угловое положение тела

Благодарности: Работа выполнена в рамках проекта Минобрнауки РФ № FSWM-2025-0004.

Для цитирования: Тырышкин И.М., Жильцов К.Н., Костюшин К.В., Еремин И.В., Глазунов А.А. Численное исследование процесса метания инертных тел и определение характеристик их свободного механического движения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2026. № 99. С. 77–92. doi: 10.17223/19988621/99/6

Numerical investigation of the launching process for inert bodies and determination of free mechanical motion characteristics

И'ya M. Tyryshkin¹, Konstantin N. Zhil'tsov², Kirill V. Kostyushin³,
Ivan V. Eremin⁴, Anatoliy A. Glazunov⁵

^{1, 2, 3, 4, 5} Tomsk State University, Tomsk, Tomsk, Russian Federation

¹ tyryshkin@niipmm.tsu.ru

² konstantin@niipmm.tsu.ru

³ kostushink@niipmm.tsu.ru

⁴ iveremin@niipmm.tsu.ru

⁵ gla@niipmm.tsu.ru

Abstract. This paper presents the results of a numerical study of the body launching at an angle to the horizon under external gas-dynamic forces. The motion of the body is determined considering its geometric dimensions, mass, and mass-centering characteristics. A mathematical model and a computational methodology are proposed for determining the forces acting on the body and their points of application, the body torque relative to its center of mass, as well as the angular velocities and angular accelerations of the body. Based on this methodology, an original user-defined code has been developed for the ANSYS Fluent software package using the C programming language. This paper presents the results of numerical simulation of the symmetric rectangular body motion in a two-dimensional unsteady formulation for various initial launch angles and different mass-center configurations of the body.

Keywords: gas dynamics, mathematical modeling, trajectory, angular position of the body

Acknowledgments: This work was carried out within the framework of the project of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project No. FSWM-2025-0004).

For citation: Tyryshkin, I.M., Zhil'tsov, K.N., Kostyushin, K.V., Eremin, I.V., Glazunov, A.A. (2026) Numerical investigation of the launching process for inert bodies and determination of free mechanical motion characteristics. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 99. pp. 77–92. doi: 10.17223/19988621/99/6

Введение

Исследование движения тел в среде – газе или жидкости – представляет собой отдельный класс задач внешней газо- и гидродинамики. Геометрия и массовые характеристики тела, свойства среды и структура обтекания, скорость движения и положение тела в пространстве – все эти факторы влияют на динамику тела [1].

Современные достижения в области вычислительной техники и численных методов позволяют проводить численные исследования пространственных задач внешней газо- и гидродинамики с учетом сложной геометрии обтекаемых тел, что

существенно повышает эффективность проектирования. Такой подход требует применения сложных моделей движения тела с учетом влияния внешних сил, а также предъявляет серьезные требования к вычислительным ресурсам, детальности подготовки модели и созданию качественной расчетной сетки [2], особенно в случае использования прикладных пакетов программ.

В настоящее время задачи моделирования движения тела под действием внешних сил рассматривают в трехмерном приближении в условиях стационарности или квазистационарности, что позволяет получить подробную картину обтекания, но не дает представления о изменении характера поведения тела со временем с учетом изменения внешних активных сил, приложенных к метаемому телу. Как правило, движение тела моделируют с учетом наличия плоскостей и осей симметрии в плоской или осесимметричной постановках. Можно отметить работу [3], в которой проведено пространственное моделирование задачи обтекания летательного аппарата под различными углами атаки в рамках квазистационарного приближения. В результате получены параметры аэродинамики тела под различными углами атаки. Большинство работ представляет двумерное приближение с рядом допущений. Так, в работах [4–7] изложены подходы по определению характеристик поступательного движения тел при шахтном пуске. В данных работах учитываются нагрузки на тело и его перемещение по шахте и на небольшом участке траектории, но не учитывается вращательное движение, которое может привести к отклонению траектории. В работе [8] представлены результаты численного моделирования поступательного и вращательного движения тел с учетом влияния внешних аэродинамических сил и реактивной силы самого тела. Но в данной работе расчеты проводятся в рамках модели материальной точки, а форма тел учитывается через заранее вычисленный коэффициент сопротивления. В работе [9] численно получены результаты моделирования полета пули. Моделирование проводится в осесимметричной постановке. Из представленного анализа литературы можно сделать вывод, что в настоящее время недостаточно работ по исследованию кинематических характеристик метаемого тела (МТ) в условиях свободного механического движения.

Цель настоящей работы – исследование нестационарного характера движения МТ в атмосфере у поверхности Земли, разработка методики численного исследования нестационарных газодинамических процессов и кинематических характеристик движения тела в газе под действием внешних газодинамических сил с учетом составляющих поступательного и вращательного движения, а также собственных моментов инерции тела и его массоцентровочных характеристик.

Физико-математическая постановка задачи

Рассматривается движение твердого тела, имеющего форму параллелепипеда, в газе в условиях земной атмосферы под различными начальными углами метания относительно горизонта. Тело начинает строго поступательное движение из состояния покоя с ускорением, имитируя вылет из пусковой установки под действием внешних газодинамических сил. В момент времени t_1 тело приобретает скорость $V = 100$ м/с, после чего движется свободно по траектории. С учетом массоцентровочных характеристик тело совершает поступательное и вращательное движение. Моделирование нестационарной задачи газовой динамики для сжимаемой среды

проводится на основе системы осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса, уравнения неразрывности, уравнения энергии и уравнения состояния идеального газа [10]. Система уравнений газовой динамики замыкается двухпараметрической моделью турбулентности $k-\varepsilon$ [11] и уравнениями движения тела заданной формы.

Для определения пространственных кинематических характеристик движения МТ (дальность, скорость, перегрузки, угловое положение) уравнения движения точек твердого тела под действием внешних сил в общем виде записываются следующим образом [12]:

$$m \left(\frac{d\vec{V}}{dt} \right) = \vec{F}, \quad \frac{d[\mathbf{I}\vec{\omega}]}{dt} = \vec{M}, \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a}, \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}, \quad (2)$$

где: m – масса МТ, \mathbf{I} – тензор инерции, \vec{V} и $\vec{\omega}$ – поступательная и угловая скорости движения центра масс МТ, \vec{a} и $\vec{\varepsilon}$ – ускорения поступательного и вращательного движений, \vec{F} и \vec{M} – соответственно результирующие внешних сил и моментов сил, действующих на МТ.

Для определения перемещения центра масс и углового положения тела используются следующие соотношения:

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{V}, \quad \frac{d\vec{\theta}}{dt} = \vec{\omega}. \quad (3)$$

Результирующая внешних аэродинамических сил, приложенных к телу, имеет вид:

$$\vec{F} = \vec{F}_A^{\text{тп}} + \vec{F}_A^p + \vec{F}_g, \quad (4)$$

где: $\vec{F}_A^{\text{тп}}$ – сила сопротивления, обусловленная взаимодействием потока газа с поверхностью обтекаемого тела; \vec{F}_A^p – сила сопротивления давления, определяемая распределением давления по поверхности обтекаемого тела; \vec{F}_g – сила тяжести.

Результирующий момент внешних сил, действующих на МТ, имеет вид:

$$\vec{M} = \vec{M}_A, \quad (5)$$

\vec{M}_A – момент силы сопротивления $\vec{F}_A = \vec{F}_A^{\text{тп}} + \vec{F}_A^p$ относительно ЦМ, действующей на МТ.

Переносная скорость кинетического момента твердого тела $[\mathbf{I}\vec{\omega}]$ в уравнении (1) обусловлена вращением связанного с телом базиса:

$$[\mathbf{I}\vec{\omega}] = \begin{cases} I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z, \\ I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z, \\ I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z. \end{cases} \quad (6)$$

Для связи тензора инерции с положением МТ в пространстве при повороте МТ относительно центра масс (ЦМ) запишем его матричное преобразование

$$\mathbf{I} = \mathbf{A} \mathbf{I}_C \mathbf{A}^T, \quad (7)$$

где: \mathbf{A} и \mathbf{A}^T – соответственно матрица вращения (матрица ориентации) и транспонированная матрица вращения, состоящие из последовательности поворотов вокруг осей координатной системы, \mathbf{I}_C – тензор инерции МТ относительно центрального базиса, связанного с ЦМ МТ.

Если представить производную вектора скорости по времени в разностном виде, то уравнение (1) для \vec{F} в проекциях на оси связанной с телом системы координат можно представить как систему кинематических уравнений относительно V_x^{n+1} , V_y^{n+1} , V_z^{n+1} :

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{\Delta t}\right)V_x^{n+1} + (0)V_y^{n+1} + (0)V_z^{n+1} = \frac{1}{\Delta t}V_x^n + \frac{1}{m}F_x^n, \\ (0)V_x^{n+1} + \left(\frac{1}{\Delta t}\right)V_y^{n+1} + (0)V_z^{n+1} = \frac{1}{\Delta t}V_y^n + \frac{1}{m}F_y^n, \\ (0)V_x^{n+1} + (0)V_y^{n+1} + \left(\frac{1}{\Delta t}\right)V_z^{n+1} = \frac{1}{\Delta t}V_z^n + \frac{1}{m}F_z^n. \end{cases} \quad (8)$$

Проводя аналогичные операции для уравнения (1) для \vec{M} , получим систему динамических уравнений Эйлера в разностном виде относительно K_x^{n+1} , K_y^{n+1} , K_z^{n+1} в проекциях на оси связанной с телом системы координат:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{\Delta t}\right)K_x^{n+1} + (0)K_y^{n+1} + (0)K_z^{n+1} = \frac{1}{\Delta t}K_x^n + M_x^n, \\ (0)K_x^{n+1} + \left(\frac{1}{\Delta t}\right)K_y^{n+1} + (0)K_z^{n+1} = \frac{1}{\Delta t}K_y^n + M_y^n, \\ (0)K_x^{n+1} + (0)K_y^{n+1} + \left(\frac{1}{\Delta t}\right)K_z^{n+1} = \frac{1}{\Delta t}K_z^n + M_z^n. \end{cases} \quad (9)$$

где $K = [\mathbf{I}\vec{\omega}]$.

Для связи угловой скорости твердого тела относительно центра масс с моментом внешних сил, действующих на него, записывается система уравнений

$$\begin{cases} I_{xx}\omega_x^{n+1} + I_{xy}\omega_y^{n+1} + I_{xz}\omega_z^{n+1} \\ I_{yx}\omega_x^{n+1} + I_{yy}\omega_y^{n+1} + I_{yz}\omega_z^{n+1} \\ I_{zx}\omega_x^{n+1} + I_{zy}\omega_y^{n+1} + I_{zz}\omega_z^{n+1} \end{cases} = \begin{cases} K_x^{n+1}, \\ K_y^{n+1}, \\ K_z^{n+1}. \end{cases} \quad (10)$$

Системы уравнений (8)–(10) образуют замкнутую систему уравнений, описывающую динамику поступательного и вращательного движения твердого тела под действием приложенных внешних сил и моментов. Совместное интегрирование уравнений позволяет определить траекторные параметры движения МТ.

Система трехмерных уравнений (1)–(3) и ее разностный аналог (8)–(10) легко сводятся к двумерному (плоскому или осесимметричному) случаю с учетом соответствующих компонент векторов в рассматриваемых направлениях, например в плоскости Oxy .

Методика расчета

Задача о движении тела в газе в полной пространственной постановке с учетом геометрии МТ является достаточно трудоемкой, требующей большого количества вычислительных ресурсов и физического времени счета. В данной работе исследование динамики изменения характеристик движения тела проводилось в плоской постановке на основе системы уравнений (8)–(10). МТ имеет форму прямоугольника и характеризуется такими параметрами, как масса, расположение ЦМ на пересечении плоскостей симметрии, длина L , высота B , собственные моменты инерции. Схема расчетной области представлена на рис. 1. В системе координат Ox_0y_0 определяется угловое положение МТ относительно горизонта с учетом действия силы тяжести. Система координат Ox_1y_1 – неподвижная стартовая система координат, в которой ось Ox_1 направлена вдоль плоскости симметрии МТ и определяет начальный угол атаки тела к горизонту.

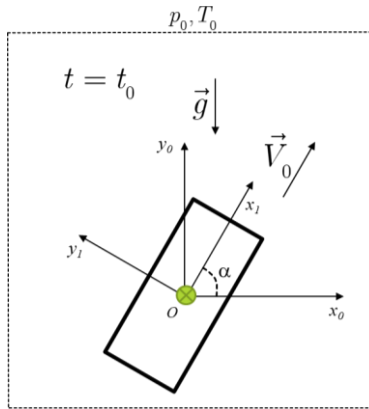


Рис. 1. Схема расчетной области

Fig. 1. Schematic diagram of a computational domain

Для решения задачи на внешних границах расчетной области задаются мягкие граничные условия; на твердых стенках МТ, которые являются гладкими непроницаемыми стенками, ставятся условия прилипания. В начальный момент времени для тела задаются скорость $\vec{V}_{x_1} = \vec{V}_{x_1}(t)$ и начальное положение тела относительно горизонта α .

При реализации методики расчета в рамках плоской постановки введен параметр «виртуальной ширины» («глубины» по оси Oz) тела H , который используется для определения интегралов сил давления. При определении нагрузок интеграл аэродинамической силы, полученный по стенкам, при пересчете домножается на соответствующий множитель площади поверхности, рассчитанной для заданной виртуальной ширины.

Для практической реализации и проведения параметрических численных исследований используется программный комплекс ANSYS Fluent. На языке Си написан авторский программный код, который реализует методику (1)–(10) расчета движения МТ. Программный код встраивается в программный комплекс

ANSYS Fluent с помощью пользовательских функций *UDF*. Авторский программный код позволяет расширить возможности программного комплекса расчета газовой динамики и проводить численные исследования взаимодействия газа с твердым телом в нестационарной постановке с учетом массосцентрированных характеристик МТ.

Математическое моделирование задачи движения МТ под действием внешних аэродинамических сил реализовано с привлечением технологий и алгоритмов расчета на основе динамических расчетных сеток типа «химера» на базе модуля *Overset*. Основная расчетная сетка покрывает всю расчетную область, в то время как метаемое тело связано с локальной вложенной подвижной сеткой, которая перемещается и поворачивается совместно с телом. Перестроение расчетных сеток происходит на каждом шаге по времени с учетом поступательной и угловой скорости, получаемой МТ от внешних газодинамических сил. Связывание сеток и полученных при расчете значений происходит за счет интерполяции из ячеек основной сетки на вложенную сетку (и в обратном направлении) в области перекрытия небольших областей сеток друг с другом.

Для расчета уравнений неразрывности, момента импульса и энергии используется решатель SIMPLE. Применяемые разностные схемы имеют второй порядок точности по пространству и первый порядок по времени, поскольку модуль динамических сеток *Overset* неприменим для использования разностных схем более высокого порядка по времени. Методические расчеты проводились с шагом интегрирования по времени, равном $1 \cdot 10^{-6}$ с.

Валидация и верификация

На этапе отработки методики расчета для прямоугольного параллелепипеда проведены тесты на сеточную сходимость путем решения стационарной задачи обтекания тела потоком воздуха с постоянной скоростью: $V = 100$ м/с = const, $p_{atm} = 101325$ Па. Во всех расчетах использовалась структурированная неподвижная расчетная сетка с шагом 2 мм по координатам X и Y . Вложенная подвижная расчетная область, связанная с МТ, покрывалась неструктурированной расчетной сеткой со сгущением в окрестности стенок тела. Шаг подвижной расчетной сетки по осям X и Y в окрестности стенок метаемого тела представлен в таблице. Для оптимального использования вычислительных ресурсов проводилось разрежение подвижной расчетной сетки таким образом, чтобы в области перекрытия расчетных сеток шаг составлял 2 мм. Использовалась последовательность расчетных сеток, где каждая последующая расчетная сетка формировалась путем уменьшения характерного шага ячейки в окрестности метаемого тела в 2 раза, а минимальный шаг сетки в окрестности МТ был принят равным 0.1 мм. Результаты тестов на сеточную сходимость представлены в таблице 1.

Валидация математической модели для угла атаки тела $\alpha = 0^\circ$ проводилась в сравнении с известными формулами расчета величин подъемной силы и силы лобового сопротивления, действующих на тело [12]:

$$F_x = C_x \frac{\rho V_x^2}{2} S, \quad F_y = C_y \frac{\rho V_y^2}{2} S. \quad (11)$$

где C_x и C_y – безразмерные коэффициенты сопротивления.

Безразмерные коэффициенты C_x и C_y получены из экспериментальных данных при обдуве тел прямоугольной формы различного удлинения. Так, коэффициент сопротивления при дозвуковых скоростях от $0.3 M$ для подобных тел составляет $C_x = 1.2$, а коэффициент подъемной силы при угле атаки тела $\alpha = 0^\circ$ $C_y = 0.015$ [13]. При расчете с использованием формул (11) для представленных коэффициентов обтекания значения $F_x \approx 57$ Н и $F_y \approx 3$ Н. Результаты валидации представлены в таблице.

Результаты сходимости расчетной сетки

Сетки	Параметры		Расчетная F_x , Н	Расчетная F_y , Н	Ур. (11) F_x , Н	Ур. (11) F_y , Н
	Кол-во ячеек	Размер ячейки, мм				
Сетка X1	31 000	2.0	60.5	5.3	~57.0	~3.0
Сетка X2	37 000	1.0	64.0	4.1		
Сетка X3	64 000	0.5	54.7	3.9		
Сетка X4	126 000	0.25	49.2	3.6		
Сетка X5	447 000	0.1	48.0	2.8		

Из таблицы видно, что в случае сгущения расчетной сетки в 3 этапа шаг сетки в области поверхности МТ составляет 0.25 мм, что позволяет с достаточной точностью и сходимостью определять величину внешних аэродинамических сил и моментов, приложенных к МТ.

Результаты расчетов

Проведено исследование динамики изменения характеристик движения плоского инертного тела прямоугольной формы в воздухе с учетом сил тяжести. Масса тела 3 кг, длина тела $L = 0.222$ м, высота тела $B = 0.0506$ м, виртуальная ширина тела $H = 0.153$ м. Варьировал угол атаки при метании МТ относительно горизонта: $\alpha = 0, 30, 60, 90^\circ$. Исследование динамики изменения характеристик движения рассматривалось на дистанции 70 м в проекции перемещения центра масс метаемого тела на ось Ox_1 . Начальная скорость тела V за время t_1 увеличивается от 0 до 100 м/с.

На рис. 2 представлены характерные поля скорости в результате численного моделирования движения прямоугольного тела в среде в различные моменты времени, для $\alpha = 60^\circ$. В момент времени t_1 , когда тело достигает скорости $V = 100$ м/с, картина обтекания еще не сформировалась. Структура обтекания продолжает формироваться в последующие моменты времени t_2 и t_3 . В моменты t_4 и t_5 видно, как изменяется характер обтекания при изменении направления вращения тела. В момент t_6 тело поворачивается поперек потока, за ним возникает вихревая зона, а сила сопротивления в данный момент максимальна. В моменты времени t_7 и t_8 тело развернулось на 180° , но картина обтекания отличается от аналогичных положений тела, полученных в моменты времени t_4 и t_5 . В данные моменты времени тело имеет существенную поперечную скорость порядка 6 м/с, соответственно, результирующая скорость направлена уже не вдоль направления начального движения тела. В моменты времени t_9 и t_{10} тело завершает полный оборот вокруг своей оси.

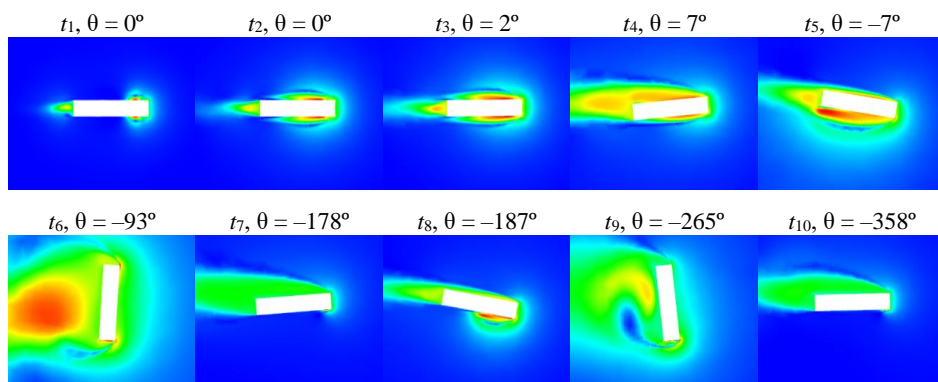


Рис. 2. Поля магнитуды скоростей газа в различные моменты времени движения МТ, $\alpha = 60^\circ$

Fig. 2. Velocity magnitude fields of gas at different time instants during the body motion at $\alpha = 60^\circ$

На рис. 3 представлены графики изменения составляющих скорости U_x и U_y центра масс тела, метаемого под различными углами к горизонту. На рис. 4, *a* показана динамика изменения от дистанции относительного угла поворота МТ вокруг своей оси. На рис. 4, *b* представлены графики перемещения центра масс тела в системе координат Ox_1y_1 в зависимости от дистанции. Из графиков на рис. 3, 4 видно, что МТ под действием внешних аэродинамических сил на дистанции $x = 70$ м теряет половину начальной скорости (см. рис. 3, *a*). За счет действия на тело силы тяжести оно приобретает ускорение по оси Oy_1 (см. рис. 3, *b*), а траектория движения приобретает характерный параболический вид (см. рис. 4, *b*). Колебательный процесс изменения составляющих скорости объясняется вращением тел (см. рис. 4, *a*).

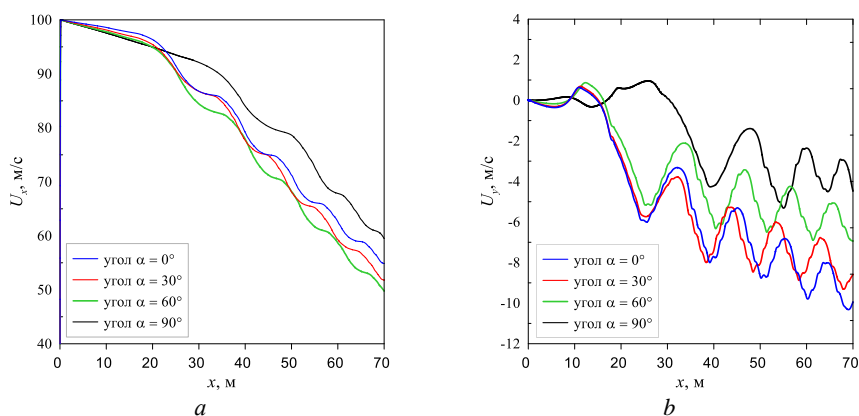


Рис. 3. Поступательная продольная скорость по оси Ox_1 (*a*) и поступательная поперечная скорость по оси Oy_1 (*b*) метаемого тела в зависимости от дистанции

Fig. 3. (*a*) Longitudinal (Ox_1 -axis) and (*b*) transverse (Oy_1 -axis) translational velocities of the body as a function of distance

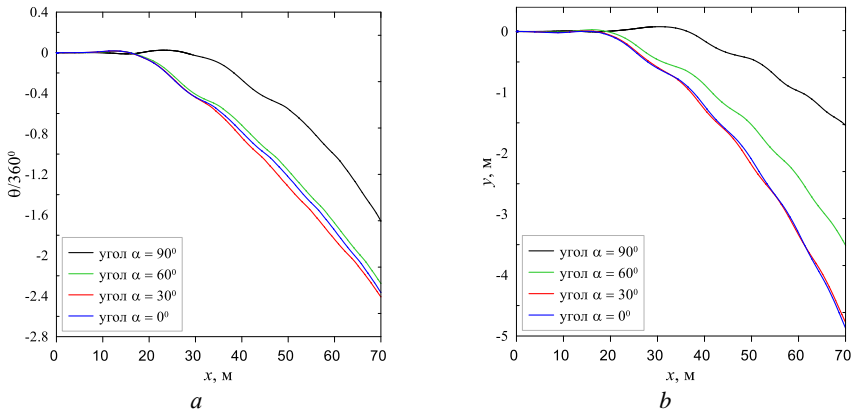


Рис. 4. Угол поворота тела в сечении тангажа (а) и перемещение центра масс ПЭ в системе координат Ox_1y_1 (b)

Fig. 4. (a) Body rotation angle in the pitch plane and (b) displacement of the body center of mass in Ox_1y_1 -coordinate system

Стоит отметить, что при угле атаки $\alpha = 90^\circ$ сила тяжести направлена строго в продольном направлении МТ, таким образом, отклонения тела в поперечном направлении могут быть равновероятны. Полученный в данной работе результат является следствием представленной методики метания МТ, при которой структура обтекания в момент начала свободного движения является несимметричной, что приводит впоследствии к возникновению неравномерного распределения поперечных сил и возникновению поперечной скорости ЦМ МТ.

На рис. 5 представлены графики изменения результирующей аэродинамической силы, действующей на центр масс тела, в зависимости от дистанции. На рис. 6 изображены графики изменения момента аэродинамической силы, действующей на центр масс тела, в зависимости от дистанции. Рисунок 7 демонстрирует графики изменения угловой скорости тела в зависимости от дистанции. Из графиков на рис. 5–7 видно, что сила аэродинамического сопротивления (см. рис. 5, а) всегда имеет отрицательную величину, при этом экстремум достигается в моменты, когда тело разворачивается к потоку под углом в $\theta = 90$ и 270° . Подъемная сила имеет как отрицательный, так и положительный экстремумы (см. рис. 5, б), поскольку при вращении формируется нестационарная картина обтекания, при которой возникают области перепада давления, приводящие к возникновению подъемной силы.

Изменения угловой скорости и момента вращения (см. рис. 6, 7) показывают, что МТ осуществляют вращение в одну сторону, при этом торможение тела приводит к затуханию колебаний угловой скорости и возникновению положительного момента вращения, который, однако, не способен привести к изменению направления вращения.

Из рассмотренных случаев начального угла положения тела относительно горизонта только тело, запущенное вертикально, показывает отличия на начальном этапе движения. В данном случае тело сохраняет устойчивость прямолинейного движения на большей дистанции. Как только тело теряет устойчивость, характер его движения повторяет характер поведения остальных рассмотренных тел.

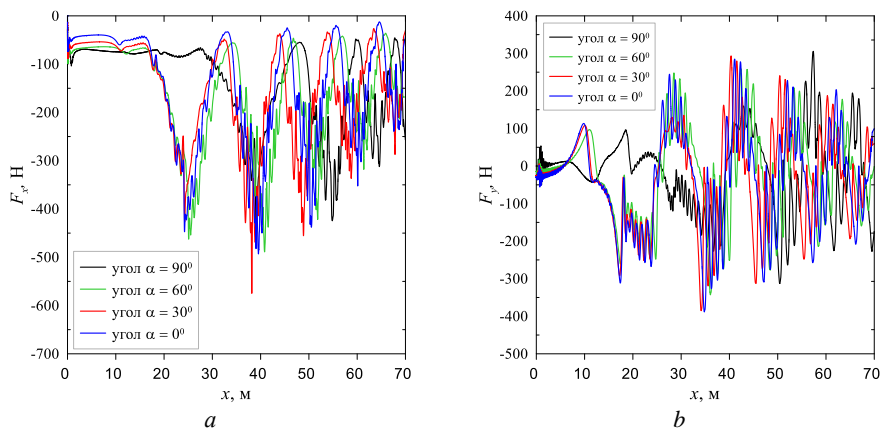


Рис. 5. Составляющая аэродинамической силы по оси Ox_1 (а) и составляющая аэродинамической силы по оси Oy_1 (б)

Fig. 5. Components of the aerodynamic force along: (a) Ox_1 - and (b) Oy_1 -axis

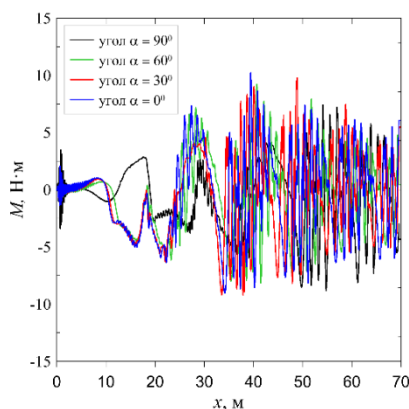


Рис. 6. Момент вращения центра масс метаемого тела в зависимости от пройденной дистанции

Рис. 6. Variation of the center-of-mass torque of the launched body with distance

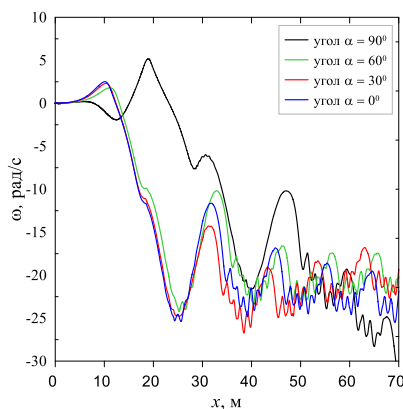


Рис. 7. Угловая скорость метаемого тела в зависимости от пройденной дистанции

Рис. 7. Variation of the body's angular velocity with distance

Реальное метаемое тело представляет собой элемент, состоящий из нескольких составных частей, которые, в свою очередь, являются материалами с отличающимися друг от друга свойствами, а также тело может иметь неоднородную форму и несимметричную конструкцию. В таком случае необходимо определять положение центра масс таких тел и собственные моменты инерции, поскольку эти параметры могут существенно влиять на угловое положение тела на траектории. Анализ влияния неоднородности метаемого тела проводился из предположения, что центр масс МТ, рассматриваемого в данной статье, располагается ближе к кормовой части, где $C_1 = 1/4L$, а в обратном случае – в лобовой части, $C_2 = 3/4L$ (рис. 8). Тела с измененным центром масс располагались под углом к горизонту $\alpha = 60^\circ$.

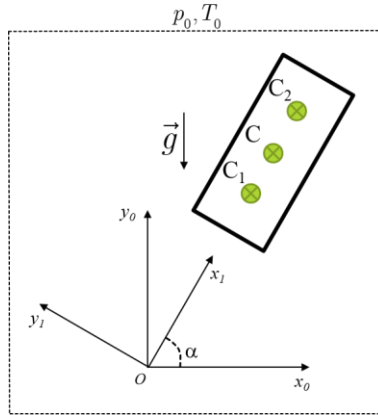


Рис. 8. Схема расположения центров масс МТ
Fig. 8. Arrangement diagram for the body's centers of mass

На рис. 9 приведены графики изменения составляющих скорости для метаемых тел в сравнении с телом, в котором центр масс расположен симметрично. На рис. 10, *a* представлены графики изменения угла поворота тел с измененными центрами масс в зависимости от дистанции, на рис. 10, *b* – графики перемещения центра масс тел в стартовой системе координат в сравнении с телом, в котором центр масс расположен симметрично.

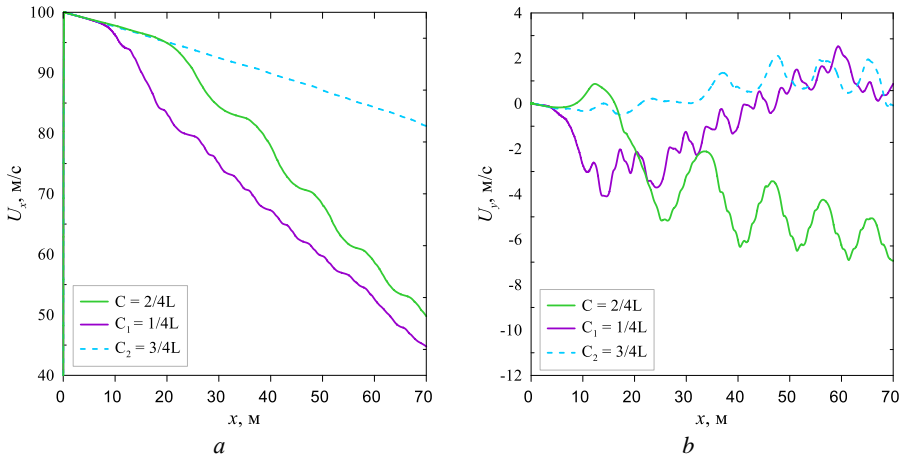


Рис. 9. Поступательная продольная скорость по оси Ox_1 (*a*) и поступательная поперечная скорость по оси Oy_1 (*b*) метаемых тел с измененным центром масс в зависимости от дистанции в сравнении с симметричным телом, угол к горизонту $\alpha = 60^\circ$
Fig. 9. Translational velocity components as a function of distance for the bodies with a shifted center of mass compared to a symmetric body ($\alpha = 60^\circ$): (*a*) longitudinal (Ox_1 -axis) and (*b*) transverse (Oy_1 -axis)

Из графиков на рис. 9–10 видно, что изменение массоцентровочных характеристик метаемого тела приводит к существенному изменению характера его поведения в движении. Тело с центром масс в лобовой части приобретает устойчивость,

данное тело не вращается (см. рис. 10, *a*). Отсутствие вращения приводит к минимальным потерям поступательной продольной скорости (см. рис. 9, *a*), а возникающая подъемная сила приводит к отклонению поперечного перемещения тела в противоположную сторону, т.е. тело на рассчитанном отрезке дистанции «взмывает» вверх (см. рис. 9, *b*, 10, *b*).

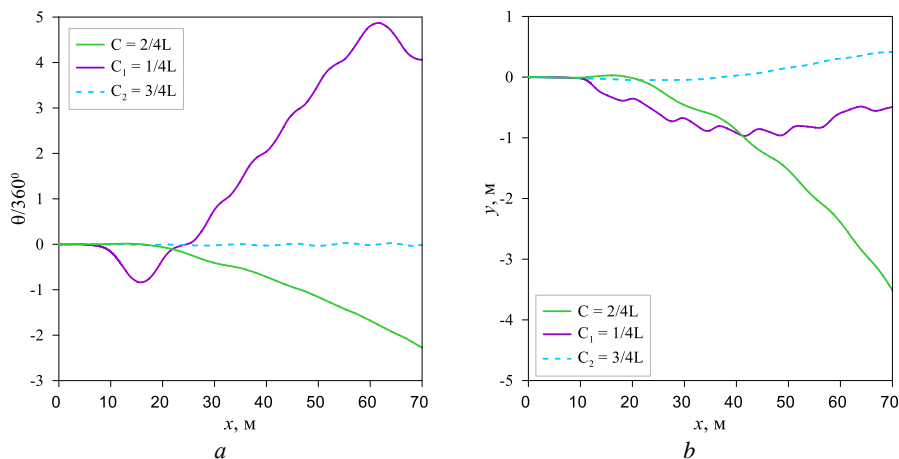


Рис. 10. Угол поворота тела в сечении тангажа (*a*) и перемещение центра масс ПЭ в системе координат Ox_1y_1 (*b*) метаемых тел с измененным центром масс в зависимости от дистанции в сравнении с симметричным телом, угол к горизонту $\alpha = 60^\circ$

Рис. 10. (*a*) Pitch angle and (*b*) payload center-of-mass displacement in Ox_1y_1 -coordinate system as a function of distance for the bodies with a shifted center of mass compared to a symmetric reference body ($\alpha = 60^\circ$)

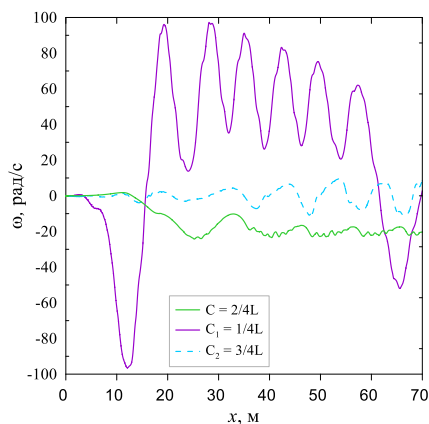


Рис. 11. Угловая скорость метаемых тел с измененным центром масс в зависимости от дистанции в сравнении с симметричным телом, угол к горизонту $\alpha = 60^\circ$

Fig. 11. Angular velocity as a function of distance for the bodies with a shifted center of mass compared to a symmetric reference body ($\alpha = 60^\circ$)

На рис. 11 приведены графики изменения угловой скорости тел с измененными центрами масс в зависимости от дистанции в сравнении с телом, в котором центр

масс расположен симметрично. Угловая скорость такого тела принимает как отрицательные, так и положительные значения (см. рис. 11), но на представленной дистанции они малы для придания телу постоянного вращения. Тело с центром масс в кормовой части, напротив, становится существенно неустойчивым. Данное тело за счет действия аэродинамических сил приобретает существенную угловую скорость уже на 10-м метре дистанции и начинает вращение по часовой стрелке, при этом оно существенно тормозится (см. рис. 9, а). В момент, когда $x = 15$ м, происходит изменение угловой скорости с отрицательных значений на положительные. Тело приобретает вращения против часовой стрелки и совершает 6 полных оборотов вокруг своей оси (см. рис. 10, а), прежде чем вновь изменит характер вращения на противоположный. Важно отметить, что поперечная поступательная скорость такого тела в какой-то момент приобретает положительное значение; это говорит о том, что подъемная сила превалирует над силой тяжести. Таким образом, вращение тела становится существенным, и возникает эффект силы Магнуса.

Заключение

В работе представлены результаты численного исследования движения инертного прямоугольного твердого тела в воздухе под действием внешних сил в плоской постановке. Для расчета движения метаемого тела разработана методика, которая позволяет на основании расчета известных математических моделей газодинамики определять внешнюю силу, действующую на движущееся твердое тело различной формы, и оценивать траекторию тела, его вращение и составляющие скорости на траектории с учетом собственных массоцентровочных характеристик тела и его формы. На основе методики реализован авторский программный код для программного комплекса ANSYS Fluent. С помощью представленной методики можно исследовать поведение тел различной формы на траектории, их угловое положение и характеристики движения, что позволяет сократить затраты на предварительную инженерную оценку конструктивных особенностей метаемых тел и элементов конструкций.

Список источников

1. Степанов В.П. Внешняя баллистика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006. 1140 с.
2. Семенов И.В., Уткин П.С., Ахмедьянов И.Ф., Меньшов И.С. Применение многопроцессорной вычислительной техники для решения задач внутренней баллистики // Вычислительные методы и программирование. 2011. Т. 12. С. 183–193.
3. Катаева Л.Ю., Масленников Д.А., Михалев С.В., Киселева Н.Н. Поиск оптимальных режимов полета тела на основе аппроксимации результатов CFD-моделирования // Информатика и управление в технических и социальных системах. Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2019. № 4 (127). С. 27–35.
4. Пешков Р.А., Исмагилов Д.Р. Численное моделирование взаимодействия продуктов сгорания порохового аккумулятора давления с кислородом воздуха в пусковом контейнере // Вестник Концерна ВКО «Алмаз–Антей». 2019. № 1. С. 68–73.
5. Пешков Р.А., Сидельников Р.В. Анализ влияния конструктивных и газодинамических параметров ракет на ударно-волновые процессы в шахтной пусковой установке // Вестник Концерна ВКО «Алмаз–Антей». 2015. № 2. С. 55–60.
6. Пегов В.И., Мошкин И.Ю., Меркулов Е.С., Чешко А.Д. Численное моделирование гидродинамических нагрузок на стартующую ракету и подводную лодку // Вестник Концерна ВКО «Алмаз–Антей». 2016. № 3. С. 30–35.

7. Плюснин А.В., Бондаренко Л.А. Способы крупномасштабного моделирования систем газодинамического выброса // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2012. Спецвып. № 4. С. 111–122.
8. Волков В.Ф., Приданов В.Г. Моделирование движения тел в поле сил гравитации // Физическое образование в вузах. 2019. Т. 25, № 1. С. 36–54.
9. Иванов К.А., Горев А.А. Метод крупных частиц в моделировании полета снаряда со сверхзвуковой скоростью // Интеллектуальные системы в производстве. 2016. № 3 (30). С. 7–9.
10. Ламб Г. Гидродинамика. М.: ОГАИЗ, 1947. 929 с.
11. Launder B.E., Spalding D.B. The numerical computation of turbulent flows // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1974. № 3 (2). P. 269–289. doi: 10.1016/0045-7825(74)90029-2
12. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Леценко Д.Д. Эволюция движений твердого тела относительно центра масс. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исслед., 2015. 308 с.
13. Петров К.П. Аэродинамика тел простейших форм. М.: Факториал, 1998. 432 с.

References

1. Stepanov V.P. (2006) *Vneshnyaya ballistika* [External ballistics]. Tomsk: Izdatel'stvo Tomskogo universiteta.
2. Semenov I.V., Utkin P.S., Akhmedyanov I.F., Menshov I.S. (2011) Primenenie mnogoprotsessornoy vychislitel'noy tekhniki dlya resheniya zadach vnutrenney ballistiki [Application of multiprocessor computing technology for solving interior ballistics problems]. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye – Computational Methods and Programming*. 12. pp. 183–193.
3. Kataeva L.Yu., Maslennikov D.A., Mikhalev S.V., Kiseleva N.N. (2019) Poisk optimal'nykh rezhimov poleta tela na osnove approksimatsii rezul'tatov CFD-modelirovaniya [Search for optimal body flight modes based on approximation of CFD simulation results]. *Informatika i upravlenie v tekhnicheskikh i sotsial'nykh sistemakh. Trudy NGTU im. R.E. Alekseeva – Computer Science and Control in Technical and Social Systems. Proceedings of R.E. Alekseev Nizhny Novgorod State Technical University*. 4(127). pp. 27–35.
4. Peshkov R.A., Ismagilov D.R. (2019) Chislennoe modelirovaniye vzaimodeystviya produktov sgoraniya porokhovogo akkumulyatora davleniya s kislorodom vozdukh v puskovom konteynere [Numerical simulation of the interaction of a solid-propellant pressure accumulator combustion products with air oxygen in a launch container]. *Vestnik Kontserna VKO «Almaz-Antey» – Journal of the "Almaz-Antey" Air and Space Defense Concern*. 1. pp. 68–73.
5. Peshkov R.A., Sidel'nikov R.V. (2015) Analiz vliyaniya konstruktivnykh i gazodinamicheskikh parametrov raket na udarno-volnovye protsessy v shakhtnoy puskovoy ustanovke [Analysis of the influence of design and gas-dynamic parameters of rockets on shock-wave processes in a silo launcher]. *Vestnik Kontserna VKO «Almaz-Antey» – Journal of the "Almaz-Antey" Air and Space Defense Concern*. 2. pp. 55–60.
6. Pegov V.I., Moshkin I.Yu., Merkulov E.S., Cheshko A.D. (2016) Chislennoe modelirovaniye gidrodinamicheskikh nagruzok na startuyushchuyu raketu i podvodnuyu lodku [Numerical simulation of hydrodynamic loads on a launching missile and a submarine]. *Vestnik Kontserna VKO «Almaz-Antey» – Journal of the "Almaz-Antey" Air and Space Defense Concern*. 3. pp. 30–35.
7. Plyusnin A.V., Bondarenko L.A. (2012) Sposoby krupnomasshtabnogo modelirovaniya sistem gazodinamicheskogo vybrosa [Methods of large-scale modeling of gas-dynamic ejection systems]. *Vestnik MGTU im. N.E. Bauman. Seriya «Estestvennye nauki» – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series "Natural Sciences"*. pp. 111–122.
8. Volkov V.F., Pridanov V.G. (2019) Modelirovaniye dvizheniya tel v pole sil gravitatsii [Modeling the motion of bodies in a gravity field]. *Fizicheskoe obrazovanie v vuzakh – Physics Education in Universities*. 25(1). pp. 36–54.

9. Ivanov K.A., Gorev A.A. (2016) Metod krupnykh chastits v modelirovanii poleta snaryada so sverkhzvukovoy skorost'yu [The particle-in-cell method in modeling the flight of a projectile at supersonic speed]. *Intellektual'nye sistemy v proizvodstve – Intelligent Systems in Manufacturing*. 3(30). pp. 7–9.
10. Lamb H. (1947) *Gidrodinamika* [Hydrodynamics]. Moscow: OGAIZ.
11. Launder B.E., Spalding D.B. (1974) The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 3(2). pp. 269–289. doi: 10.1016/0045-7825(74)90029-2
12. Chernous'ko F.L., Akulenko L.D., Leshchenko D.D. (2015) *Evolyutsiya dvizheniy tverdogo tela otositel'no tsentra mass* [Evolution of motions of a rigid body about its center of mass]. Moscow – Izhevsk: Izhevskiy institut komp'yuternykh issledovaniy.
13. Petrov K.P. (1998) *Aerodinamika tel prosteyshikh form* [Aerodynamics of bodies of the simplest forms]. Moscow: Faktorial.

Сведения об авторах:

Тырышкин Илья Михайлович – инженер-исследователь лаборатории 101 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: tyryshkin@niipmm.tsu.ru

Жильцов Константин Николаевич – научный сотрудник лаборатории 101 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: konstantin@niipmm.tsu.ru

Костюшин Кирилл Владимирович – старший научный сотрудник лаборатории 101 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: kostushink@niipmm.tsu.ru

Еремин Иван Владимирович – кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией 101 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: iveremin@niipmm.tsu.ru

Глазунов Анатолий Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией 105 Научно-исследовательского института прикладной математики и механики Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: gla@niipmm.tsu.ru

Information about the authors:

Tyryshkin Ilya M. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: tyryshkin@niipmm.tsu.ru

Zhil'tsov Konstantin N. (Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: Konstantin@niipmm.tsu.ru

Kostyushin Kirill V. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: kostushink@niipmm.tsu.ru

Eremin Ivan V. (Candidate of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: iveremin@niipmm.tsu.ru

Glazunov Anatoly A. (Doctor of Physics and Mathematics, Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation). E-mail: gla@niipmm.tsu.ru.

Статья поступила в редакцию 09.01.2026; принята к публикации 05.02.2026

The article was submitted 09.01.2026; accepted for publication 05.02.2026