

Научная статья

УДК 534.11

doi: 10.17223/19988621/99/9

Динамический анализ балочного маятника в составе модели погрузочного крана

Егор Алексеевич Дегилевич¹, Алексей Сергеевич Смирнов²

^{1,2} *Институт проблем машиноведения Российской академии наук,
Санкт-Петербург, Россия*

¹ *ООО «Газпромнефть – Промышленные Инновации», Санкт-Петербург, Россия*

² *Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия*

¹ *degilevichgor@gmail.com*

² *smirnov.alexey.1994@gmail.com*

Аннотация. Исследуется конечномерная модель балочного маятника с произвольным числом степеней свободы, которая используется для моделирования движения троса в составе погрузочного крана. На основе аналитических расчетов построены графики зависимости частот колебаний балочного маятника от числа звеньев троса и показана сходимость к частотам колебаний распределенной модели. С помощью прикладных пакетов построены модели крана, на основе которых проведена проверка сходимости траекторий троса при росте числа элементов.

Ключевые слова: балочный маятник, цепной маятник, колебания, собственные частоты, конечномерная модель, стержневая модель, погрузочный кран

Для цитирования: Дегилевич Е.А., Смирнов А.С. Динамический анализ балочного маятника в составе модели погрузочного крана // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2026. № 99. С. 125–137. doi: 10.17223/19988621/99/9

Original article

Dynamic analysis of a beam pendulum as a part of a loading crane model

Egor A. Degilevich¹, Aleksey S. Smirnov²

^{1,2} *Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences,
Saint Petersburg, Russian Federation*

¹ *Gazpromneft – Industrial Innovations LLC, Saint Petersburg, Russian Federation*

² *Peter the Great Saint Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, Russian Federation*

¹ degilevichgor@gmail.com
² smirnov.alexey.1994@gmail.com

Abstract. This paper investigates a finite-dimensional model of a beam pendulum with an arbitrary number of degrees of freedom, which is used to simulate the motion of a loading crane wire rope. The model represents a system of rods connected by cylindrical joints and elastic torsions. Based on analytical calculations, dependency diagrams are plotted showing how the oscillation frequencies of the beam pendulum depend on the number of wire rope segments, and their convergence to the oscillation frequencies of the distributed model is demonstrated. It was found that the three lowest oscillation frequencies of the finite-dimensional model converge to those of the distributed model with the number of segments equal to 10–20. A set of crane models is developed using the application software packages. These computer models are employed to verify the convergence of the wire rope trajectories with an increasing number of segments. Considering the two operating modes of the crane—with platform oscillation and with wire rope extension during large-amplitude load swinging—it was shown that 20 segments are sufficient for accurate wire rope modeling.

Keywords: beam pendulum, chain pendulum, oscillations, natural frequencies, finite-dimensional model, rod model, loading crane

For citation: Degilevich, E.A., Smirnov, A.S. (2026) Dynamic analysis of a beam pendulum as a part of a loading crane model. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 99. pp. 125–137. doi: 10.17223/19988621/99/9

Введение

Вопросам динамики балочных и цепных систем, имеющих бесконечное число степеней свободы, посвящено множество научных и инженерных работ [1–4], что неудивительно, поскольку в жизни регулярно встречаются объекты, имеющие в своем конструктиве балки, тросы, канаты, провода или цепи. Зачастую для построения аналитического решения уравнений динамики приходится прибегать к тем или иным допущениям, которые в определенных пределах позволяют описывать поведение объекта без серьезной потери точности в рамках конкретной задачи. Уравнениями цепной линии (ЦЛ) можно описать линии электропередач, веревочные подвесные мосты, цепные ограждения, бельевые веревки, канатные дороги и другие схожие объекты [5], однако классическая модель ЦЛ подразумевает отсутствие изгибной жесткости, т.е. идеальную гибкость. В реальности же канаты, тросы, провода имеют конечную ненулевую жесткость на изгиб, которая может в некоторых задачах вносить немалый вклад в поведение системы. Аналогично ситуация обстоит и с другой цепной системой, а именно с цепным маятником (ЦМ), и его уравнениями описываются подвешенные за один край канаты, цепи, качели и тросы подъемных кранов, которым в большей степени уделено внимание в данной работе.

Модификация классических моделей цепей с целью уточнения или, наоборот, упрощения – далеко не редкость. В случае ЦЛ для исследования специфического воздействия на систему от классической модели могут отойти, изменив форму ЦЛ на параболу [6] или дугу окружности [7] для упрощения решения, или же описывать модель уравнениями балки Бернулли–Эйлера [8, 9]. При исследовании динамики ЦМ прибегают к различным постановкам, к примеру, представляя цепь

с множеством звеньев в виде гантельной схемы с конечным числом точечных масс, соединенных безынерционными стержнями [5, 10], или рассматривая ее как распределенную однородную систему, что также приближает решение к экспериментальным данным [11].

Балочный маятник (БМ) представляет собой модификацию ЦМ, в которой учтена изгибная жесткость. Если рассматривать колебания БМ как обособленного объекта, то для него невозможно построить аналитическое решение в элементарных функциях при рассмотрении распределенной модели, но при переходе к конечномерной постановке, а именно к стержневой схеме с торсионами, строгое аналитическое решение становится возможным, причем такие модели с сосредоточенными параметрами даже при относительно малом количестве звеньев могут дать хорошую точность по отношению к распределенной модели. Другое важное преимущество конечномерных моделей – возможность внедрения таких моделей в более сложные системы с применением прикладных пакетов. В настоящей работе проводится моделирование троса в составе погрузочного крана с помощью конечномерного БМ, т.е. осуществляется внедрение БМ в качестве компоненты в более сложную конструкцию – кран. Для расчетов применяется программный комплекс MSC.ADAMS, который хорошо себя зарекомендовал для моделирования кинематики и динамики многотельных систем [12, 13]. Существуют работы, посвященные расчетам динамических нагрузок на кран [14, 15], где тросу позволяют перемещаться лишь в продольном направлении, запрещая поперечные раскачивания, которые существенно влияют на исправную работу крана при больших амплитудах.

Цель данной работы – определение оптимального количества звеньев конечномерной модели БМ для достижения хорошей точности приближения при наименьшем числе элементов. Точность в данной задаче требуется для адекватного прогнозирования поведения троса крана с грузом или шаром-бабой как в рабочих режимах, так и в экстремальных аварийных ситуациях. К примеру, колебания троса крана на грузовом корабле во время качки на волнах или тряска в случае землетрясений могут создать существенную опасность, поэтому важно на этапе проектирования создать хорошую прогностическую модель и попытаться снизить риски, внося изменения в конструктив и / или ограничив подвижность в рабочих режимах. Если же говорить о снижении числа элементов для моделирования БМ, то здесь важно понимать, что в погоне за точностью можно создать модель с чрезмерным количеством элементов, которая потребует не только большего времени на создание, но и больших вычислительных ресурсов, поэтому целесообразно найти «золотую середину». Для поиска оптимального количества звеньев следует провести проверки сходимости при росте числа элементов. В качестве проверяемых параметров можно рассматривать собственные частоты колебаний БМ и перемещение конца троса под действием динамических нагрузок.

Распределенная модель балочного маятника

Для начала обратимся к модели БМ с распределенными параметрами (рис. 1, а), тогда уравнение динамики БМ примет вид [16]:

$$\rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho Fg \frac{\partial}{\partial x} \left[(L-x) \frac{\partial v}{\partial x} \right], \quad (1)$$

где x – продольная координата, t – время, v – поперечное перемещение сечения балки, L – ее длина, F – площадь сечения балки, J – момент инерции сечения балки, g – ускорение свободного падения, ρ – плотность материала балки, E – модуль Юнга материала балки. Разыскивая решение уравнения (1) в виде $v(x, t) = V(x) \sin(kt + \alpha)$, подставим это решение в (1), и тогда данное уравнение можно преобразовать к виду:

$$EJ \frac{d^4 V}{dx^4} - \rho F g \frac{d}{dx} \left[(L-x) \frac{dV}{dx} \right] - k^2 \rho F V = 0. \quad (2)$$

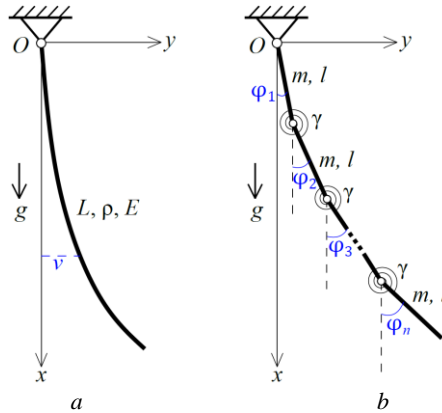


Рис. 1. Модели балочного маятника: (а) распределенная, (б) конечномерная
Fig. 1. Beam pendulum models: (a) distributed and (b) finite-dimensional

Введем безразмерные величины: продольную координату ξ ; параметр δ , определяющий соотношение упругих и гравитационных свойств БМ; а также частоту p :

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \delta = \frac{EJ}{\rho F g L^3}, \quad k = p \sqrt{\frac{g}{L}} = p \sqrt{\frac{EJ}{\rho F g L^4 \delta}}. \quad (3)$$

С учетом обезразмеривания (3) уравнение (2) для амплитудной функции $V(x)$ примет вид:

$$\delta V^{IV} - (1-\xi)V'' + V' - p^2 V = 0, \quad (4)$$

где штрихом обозначается производная по безразмерной координате ξ . Рассматривая оба предельных случая параметра δ , можно видеть, что при малых δ уравнение (4) переходит в уравнение, отвечающее классическому ЦМ [5], а при больших δ – в уравнение классической балки Бернулли–Эйлера [3] без учета силы тяжести, как этого и следовало ожидать:

$$\delta \rightarrow 0: \quad [(1-\xi)V']' + k^2 \frac{L}{g} V = 0; \quad \delta \rightarrow \infty: \quad V^{IV} - k^2 \frac{\rho F L^4}{EJ} V = 0.$$

Уравнение (4) следует дополнить граничными условиями: $V = 0, V'' = 0$ при $\xi = 0$ и $V'' = 0, V''' = 0$ при $\xi = 1$. В общем случае уравнение (4) не допускает построения точного аналитического решения, и для его анализа требуется прибегать к численным процедурам.

Конечномерная модель балочного маятника

Рассмотрим конечномерную модель БМ, основанную на использовании стержневой схемы (рис. 1, *b*). Физическая конечномерная модель представляет собой n одинаковых стержней длиной $l = L/n$ и массой $m = \rho FL/n = \rho Fl$ каждый, соединенных шарнирно друг с другом. Для учета изгибной жесткости в местах шарнирного соединения стержней помещаются упругие торсионы с крутильной жесткостью 2γ . Поэтому при последовательном соединении торсионов в месте стыковки соседних стержней будет располагаться торсион с результирующей жесткостью γ , а в месте расположения неподвижного шарнира останется торсион жесткостью 2γ , однако ясно, что он не будет играть какой-либо роли, поэтому на расчетных схемах его можно не приводить. Крутильная жесткость γ должна быть равна жесткости на поворот одного участка балки длиной l в рамках рассмотренной ранее модели с распределенными параметрами, а значит, $\gamma = EJ/l$ [17]. В качестве обобщенных координат удобно принять углы отклонения стержней φ_i от вертикальной оси. Для того чтобы иметь возможность сравнивать частоты конечномерной модели с частотами исходной распределенной модели, следует связать жесткость γ с введенным ранее параметром δ . На основе формулы (3) для δ и выражения $\gamma = EJ/l$ получаем следующую связь между этими параметрами:

$$\gamma = n^3 \delta m g l = n \delta \rho F g L^2. \quad (5)$$

Потенциальная энергия системы складывается из потенциальной энергии ${}^x\Pi$ сил тяжести всех стержней и потенциальной энергии ${}^\gamma\Pi$ всех упругих торсионов. Ясно, что потенциальная энергия силы тяжести k -го стержня и потенциальная энергия торсиона, соединяющего $(k-1)$ -й и k -й стержни, соответственно равны

$${}^x\Pi_k = -mgl \left(\frac{1}{2} \cos \varphi_k + \sum_{i=1}^{k-1} \cos \varphi_i \right), \quad {}^\gamma\Pi_{k-1}^k = \frac{1}{2} \gamma (\varphi_k - \varphi_{k-1})^2. \quad (6)$$

Для определения кинетической энергии стержней необходимо использовать теорему Кёнига, поскольку помимо массы m стержень еще обладает моментом инерции $J_0 = ml^2/12$ относительно его центра масс. Так, для кинетической энергии k -го стержня можно составить следующее выражение:

$$T_k = \frac{1}{2} ml^2 \left[\frac{1}{3} \dot{\varphi}_k^2 + \dot{\varphi}_k \sum_{i=1}^{k-1} \cos(\varphi_k - \varphi_i) \dot{\varphi}_i + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \cos(\varphi_i - \varphi_j) \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_j \right]. \quad (7)$$

Рассматривая малые колебания системы вблизи нижнего положения равновесия, для которого все $\varphi_i = 0$, выполним в (6) аппроксимацию $\cos \varphi_i \approx 1 - \varphi_i^2/2$, а в (7) положим $\cos(\varphi_i - \varphi_j) \approx 1$, что гарантирует удержание лишь слагаемых второго порядка малости по обобщенным координатам и скоростям в выражениях для потенциальной и кинетической энергий соответственно. Тогда суммарные кинетическая и потенциальная энергии системы в квадратичной аппроксимации можно представить в виде:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\varphi}}^T \mathbf{A} \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \quad \Pi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varphi},$$

где $\Phi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n]^T$, а элементы a_{ij} и c_{ij} постоянных симметричных матриц инерционных \mathbf{A} и квазиупругих \mathbf{C} коэффициентов с учетом формул (5)–(7) будут равны

$$\begin{aligned} j = i: \quad a_{ii} &= ml^2 \left(n - i + \frac{1}{3} \right), \quad c_{ii} = mgl \left(n - i + \frac{1}{2} + n^3 \delta \cdot \begin{cases} 2, & 1 < i < n \\ 1, & i = 1 \cup i = n \end{cases} \right), \\ j \neq i: \quad a_{ij} &= ml^2 \left(n - r + \frac{1}{2} \right), \quad r = \max(i, j), \quad c_{ij} = mgl \cdot \begin{cases} -n^3 \delta, & |i - j| = 1 \\ 0, & |i - j| \neq 1 \end{cases}. \end{aligned} \quad (8)$$

Ясно, что при $\delta = 0$ будем иметь частный случай стержневой схемы для классического гибкого ЦМ, когда изгибная жесткость отсутствует. Стоит отметить, что формулы (8) справедливы при $n \geq 2$. Частотное уравнение будет иметь универсальную форму $\det(\mathbf{C} - k^2 \mathbf{A}) = 0$, где k – собственная частота колебаний БМ.

Введем в рассмотрение матрицы \mathbf{A}_0 и \mathbf{C}_0 с безразмерными элементами и безразмерную частоту колебаний p , аналогичную частоте в формуле (3):

$$\mathbf{A}_0 = \frac{1}{ml^2} \mathbf{A}, \quad \mathbf{C}_0 = \frac{1}{mgl} \mathbf{C}, \quad p = \frac{k}{k_0}, \quad (9)$$

где $k_0 = \sqrt{g/L}$, а $L = nl$, тогда частотное уравнение с учетом (9) будет следующим:

$$\det(n\mathbf{C}_0 - p^2 \mathbf{A}_0) = 0. \quad (10)$$

Элементы матриц \mathbf{A}_0 и \mathbf{C}_0 на основе (8) и (9) тогда оказываются равными:

$$\begin{aligned} j = i: \quad a_{0ii} &= n - i + \frac{1}{3}, \quad c_{0ii} = n - i + \frac{1}{2} + n^3 \delta \cdot \begin{cases} 2, & 1 < i < n \\ 1, & i = 1 \cup i = n \end{cases}, \\ j \neq i: \quad a_{0ij} &= n - r + \frac{1}{2}, \quad r = \max(i, j), \quad c_{0ij} = \begin{cases} -n^3 \delta, & |i - j| = 1 \\ 0, & |i - j| \neq 1 \end{cases}. \end{aligned} \quad (11)$$

Численно решая уравнение (10) с учетом подстановки значений элементов матриц (11), можно построить графики зависимости безразмерных частот p от числа стержней n , из которых состоит модель, при двух значениях безразмерного параметра δ . На рис. 2 приведены графики сходимости для первых трех безразмерных частот p конечномерных моделей БМ от n , а пунктиром нанесены частоты распределенной модели БМ, полученные при численном исследовании уравнения (4) для заданных значений параметра δ .

По рис. 2 можно сделать вывод, что первая частота конечномерной модели достаточно близка по значениям к распределенной модели даже при совсем малом количестве стержней, а вторая и третья частоты сходятся к точному решению при количестве стержней в районе 10–20. Кроме того, на рис. 3 построены зависимости безразмерных частот конечномерной модели из 10 стержней и распределенной модели при различных значениях параметра δ , где видно хорошее соответствие между моделями как при малых δ , когда БМ ближе по поведению к ЦМ, так и при больших δ , когда он уже ведет себя, как балка.

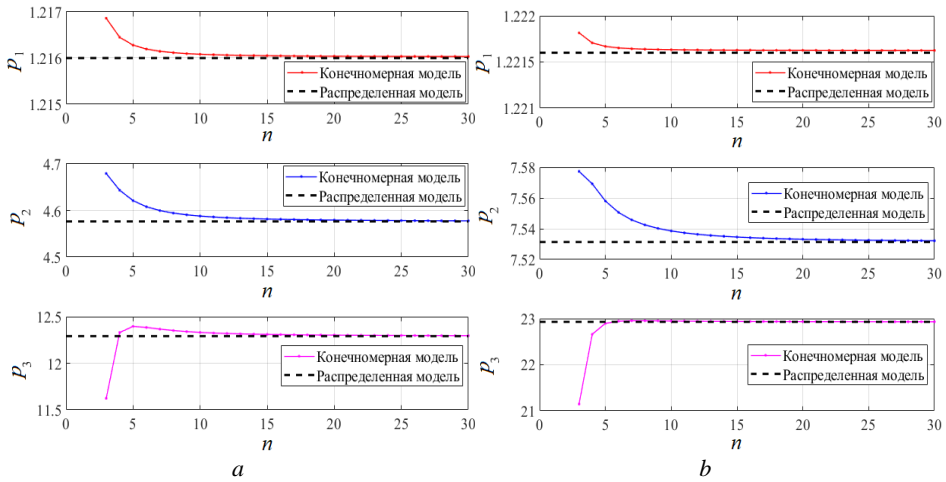


Рис. 2. Зависимость безразмерных частот p от числа стержней n при:
(a) $\delta = 0.05$, (b) $\delta = 0.2$

Fig. 2. Dependence of dimensionless frequencies p on the number of rods n at $\delta =$ (a) 0.05 and (b) 0.2

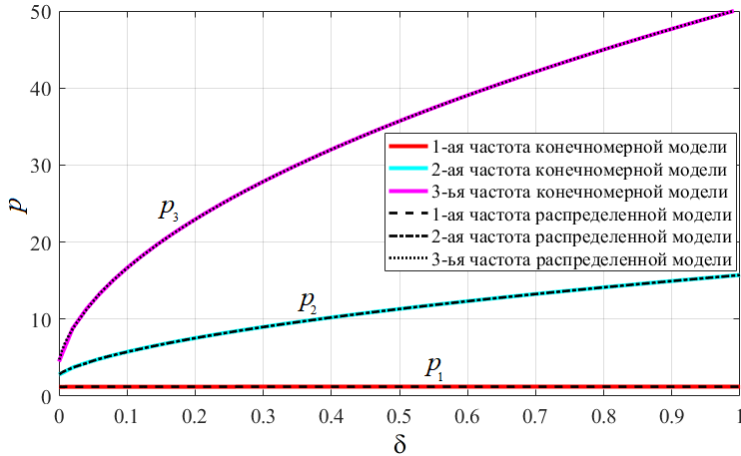


Рис. 3. Зависимость безразмерных частот p от δ при $n = 10$

Fig. 3. Dependence of dimensionless frequencies p on δ at $n = 10$

Подводя итог по сравнению моделей, можно отметить, что с точки зрения частотного анализа для моделирования БМ с применением конечномерных моделей будет достаточно использовать 10–20 стержней без потери точности при колебаниях БМ на низших частотах. Также из рис. 3 видно, как сильно могут начать возрастать собственные частоты БМ при росте δ в сравнении с частотами ЦМ (значения при $\delta = 0$), начиная со второй, когда растет влияние изгибной жесткости БМ.

Конечномерная модель балочного маятника в составе крана

Для создания упрощенной конечномерной многотельной модели крана с грузочным тросом использовался программный комплекс MSC.ADAMS. На рис. 4 приведена иллюстрация модели системы, состоящей из корпуса крана, платформы и троса, который моделируется при помощи конечномерной стержневой схемы БМ с грузом на конце. Целью создания моделей была проверка сходимости траекторий груза с увеличением числа звеньев, составляющих трос. Рассмотрены варианты с 4, 6, 8, 10, 14 и 20 стержнями. Общая длина БМ модели составляет 20 м при массе 50 кг, а масса конечного груза 20 кг. Движение троса возбуждалось за счет задания кинематического закона движения платформы и корпуса крана, и инерционные характеристики последних можно считать существенно большими, чем для троса. Стоит отметить, что данные входные параметры модели были выбраны произвольно для исследования сходимости, и они могут быть отмасштабированы под конкретные размеры и задачи.

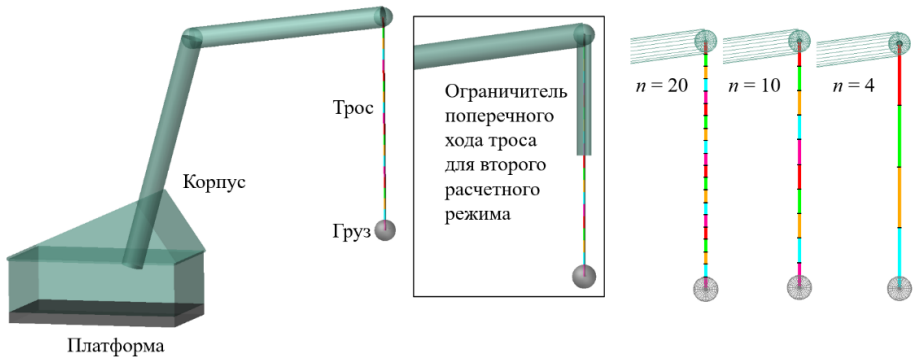


Рис. 4. Конечномерная модель балочного маятника в составе крана
Fig. 4. Finite-dimensional model of the beam pendulum as a part of the crane

Для соединения звеньев в местах крепления были созданы упругие шарниры, которые запрещали трансляционные перемещения для обеспечения нерастяжимости БМ и имели ограниченные значения жесткости на кручение, чтобы обеспечить конкретную изгибную жесткость БМ. Крутильная жесткость γ упругого шарнира определялась по формуле (5) под желаемое значение параметра δ , которое для численного эксперимента было выбрано равным $\delta = 0.01$, однако проверочные расчеты проводились и при других значениях параметра. Также было задано малое демпфирование в шарнирах, пропорциональное крутильной жесткости, чтобы избежать дребезжаний системы.

Для исследования было выбрано два режима. Первый режим имитирует повороты крана в условиях тряски или раскачки платформы (рис. 5). Платформа совершает синусоидальные колебания вдоль продольной оси x с амплитудой 1.5 м и частотой 5 Гц на протяжении всей симуляции. Корпус крана поворачивается относительно платформы вокруг вертикальной оси y в промежуток времени симуляции с 0.5 до 3 с на 90° , а затем еще на 60° в ту же сторону в промежуток времени с 5 до 7 с. Общее время симуляции, в ходе которой осуществляется расчет траектории конечного груза, составляет 10 с.

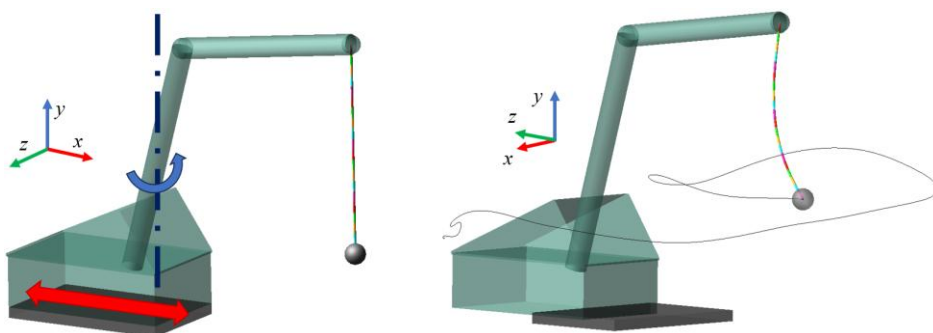


Рис. 5. Первый расчетный режим модели крана
Fig. 5. The first calculation mode for a crane model

Второй рассмотренный режим включает в себя развороты и удлинение троса для изменения уровня высоты груза (рис. 6). Как было показано на рис. 4, для второго расчетного случая был добавлен полый цилиндрический желоб, входящий в состав корпуса крана и ограничивающий поперечные перемещения той части троса, которая располагается внутри желоба, с помощью условия контакта между звеньями и стенками желоба. Для имитации удлинения троса верхний конец БМ двигался вдоль желоба по наперед заданному закону движения, тем самым увеличивалось количество свободных от контакта звеньев, и длина троса относительно нижнего края желоба становилась больше. В начальный момент времени свободная длина троса составляет 10 м, в промежуток с 1 по 3.5 с кран поворачивается на 90°, затем с 4 по 6 с происходит опускание верхней точки БМ на 10 м, т.е. происходит удлинение свободной длины троса до 20 м, после чего происходит еще один поворот на 45° с 7 по 8 с времени симуляции. Общее время симуляции составляет 10 с.

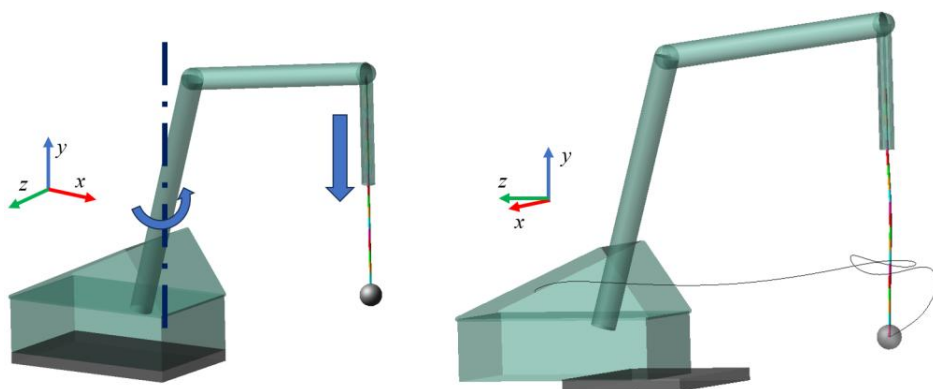


Рис. 6. Второй расчетный режим модели крана
Fig. 6. The second calculation mode for a crane model

В результате расчетов моделей с разным количеством звеньев в составе БМ для двух режимов были построены графики траекторий концевого груза в проекциях на плоскости, которые приведены на рис. 7.

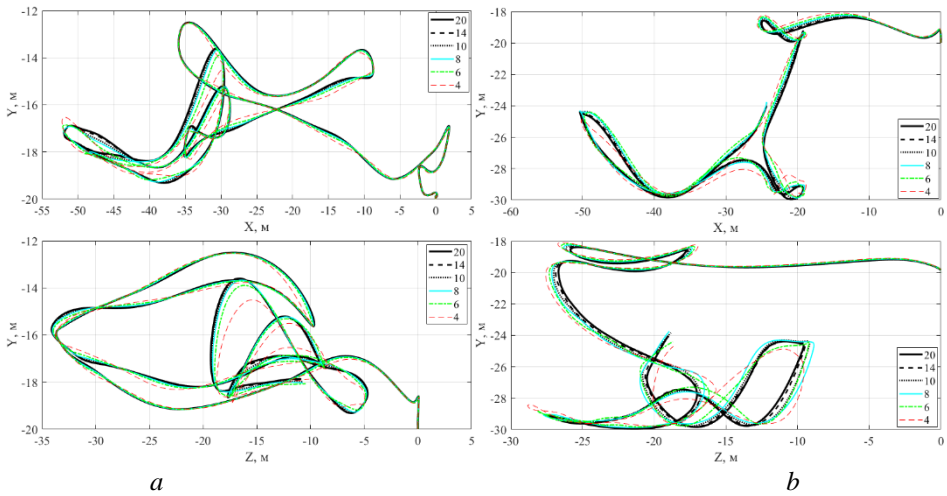


Рис. 7. Траектории движения груза при: (а) первом режиме, (б) втором режиме
Fig. 7. Trajectories of the cargo motion in the (a) first and (b) second modes

На рис. 7 видно, что траектория груза, когда БМ состоит всего из 4 элементов, относительно сильно расходится с другими траекториями, которые по мере увеличения количества звеньев в большей степени начинают совпадать друг с другом.

Для наглядности также построены графики, иллюстрирующие расхождение траекторий груза в рассмотренных моделях в сравнении с 20-стержневой моделью. Полученные графики зависимости разностей координат от времени отнесены к длине БМ, равной 20 м, и умножены на 100% (рис. 8).

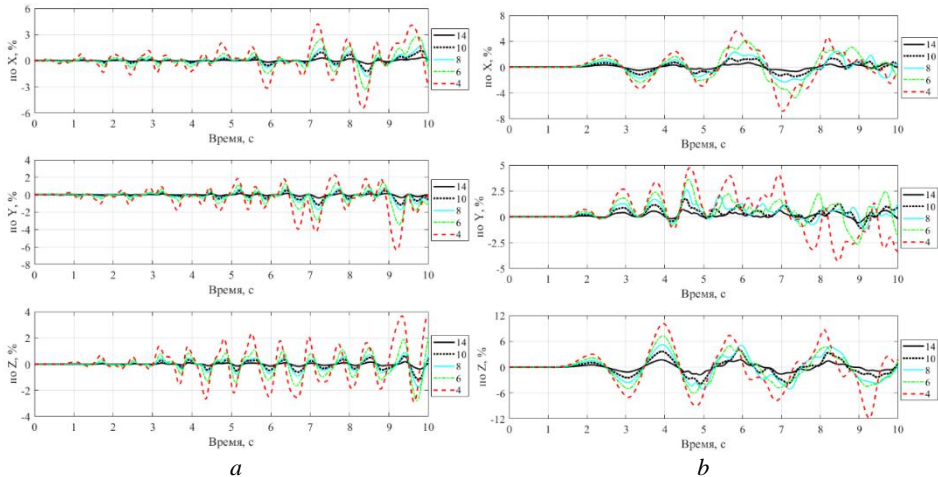


Рис. 8. Расхождения траекторий при: (а) первом режиме, (б) втором режиме
Fig. 8. Trajectory discrepancies in the (a) first and (b) second modes

На основе рис. 8 можно заключить, что с ростом числа звеньев также наблюдается сходимость траекторий, как и для частотного анализа, причем расхождение

модели с 10 стержнями от модели с 20 стержнями не превышает 4%, а в случае 14 стержней максимальный процент оказывается и того меньше. Стоит отметить, что для второго режима при удлинении троса в промежутке с 4 до 6 с наблюдается не только количественное, но и качественное расхождение, вызванное разной длиной звеньев, которые один за другим выходят из желоба в момент, когда трос совершает достаточно большие колебания. Поэтому, несмотря на одинаковую общую скорость удлинения троса, каждое новое свободное звено будет включаться в движение с разной скоростью от модели к модели и влиять на движение нижних звеньев.

Таким образом, оптимальным для моделирования троса также можно считать количество 20 звеньев, но поскольку рассмотренные режимы работы можно в некоторой степени назвать аварийными, так как повороты крана и тряска платформы были достаточно резки, для более штатных плавных режимов работы будет достаточно и 10 элементов, чтобы качественно и количественно прогнозировать движение троса.

Заключение

Была продемонстрирована сходимость низших частот колебаний конечномерной модели БМ от числа звеньев к частотам колебаний распределенной модели БМ. На основе частотного анализа малых колебаний можно сделать вывод, что для моделирования колебаний БМ достаточно использовать порядка 10–20 звеньев.

Для проверки результатов аналитической оценки оптимального числа звеньев, которое и обеспечило бы хорошую точность в сравнении с распределенной моделью, и при этом не требовало чрезмерного количества элементов, была создана многотельная модель крана с тросом, который представлял собой БМ. В результате сравнения траекторий концевого груза троса для моделей с разным количеством стержней была выявлена сходимость при росте числа элементов БМ, а приемлемое количество также находится в диапазоне 10–20 звеньев.

Список источников

1. Меркин Д.П. Введение в механику гибкой нити. М.: Наука, 1980. 240 с.
2. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
3. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний: учебник для вузов. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2009. 414 с.
4. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.
5. Смирнов А.С., Дегилевич Е.А. Колебания цепных систем: учеб. пособие. СПб.: Политехпресс, 2021. 246 с.
6. Hatibovic A., Kadar P. An algorithm for the parabolic approximation of the catenary applicable in both inclined and level spans // 2018 International IEEE Conference and Workshop in Óbuda on Electrical and Power Engineering (CANDO-EPE). Budapest, 2018. P. 217–222. doi: 10.1109/CANDO-EPE.2018.8601137
7. Rawlins C.B. Effect of non-linearity in free large oscillations of a shallow catenary // Journal of Sound and Vibration. 2004. V. 273. P. 857–874. doi: 10.1016/S0022-460X(03)00646-1
8. Chen G., Yang Y., Yang Y., Li P. Study on Galloping Oscillation of Iced Catenary System under Cross Winds // Shock and Vibration. 2017. V. 2. Art. 1634292. doi: 10.1155/2017/1634292

9. Liu Z., Song Y., Wang Y., Wang H., Gao S. The Catenary Vibration Response of High-Speed Electrified Railway Considering Horizontal Wind // Proc. of the 2013 International Conference on Electrical and Information Technologies for Rail Transportation (EITRT2013) – Volume I. Berlin; Heidelberg: Springer, 2014. P. 45–54. doi: 10.1007/978-3-642-53778-3_5 (Lecture Notes in Electrical Engineering; v. 287).
10. Al Ba'ba'a H., Callanan J., Nouh M. Emergence of Pseudo-Phononic Gaps in Periodically Architected Pendulums // *Frontiers in Materials*. 2019. V. 6. Art. 119. doi: 10.3389/fmats.2019.00119
11. Tiefenbacher M., Jakubek S., Kozek M. Modeling and Identification of a Chain Pendulum // Proc/ of the MMMse. 2011. Paper ID MB764KW.
12. Mwape C.J., Hong T.S., Wu W.B. Static Studies of a steel chain ropeway section using Msc Adams // *Advanced Materials Research*. 2011. V. 328–330. P. 1031–1036. doi: 10.4028/www.scientific.net/AMR.328-330.1031
13. Suvanjumrat C., Suwannahong W., Thongkom S. Implementation of Multi-Body Dynamics Simulation for the Conveyor Chain Drive System // *The 3rd International Conference on Mechatronics and Mechanical Engineering (ICMME 2016)*. 2017. V. 95. Art. 06006. doi: 10.1051/mateconf/20179506006
14. Антибас И.П. Моделирование динамических нагрузок, действующих на мостовой кран в момент пуска // *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2024. № 24 (2). С. 190–197. doi: 10.23947/2687-1653-2024-24-2-190-197
15. Pu H., Xie X., Liang G., Yun X., Pan H. Analysis for Dynamic Characteristics in Load-lifting system of the Crane // *Procedia Engineering*. 2011. V. 16. P. 586–593. doi: 10.1016/j.proeng.2011.08.1128
16. Динник А.Н. Устойчивость упругих систем. М.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. 186 с.
17. Исолов Ю.Г. Вычислительные методы в теории колебаний: учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. 124 с. doi: 10.18720/SPBPU/2/si20-160

References

1. Merkin D.R. (1980) *Vvedenie v mekhaniku gibkoy niti* [Introduction to the mechanics of flexible thread]. Moscow: Nauka.
2. Lur'e A.I. (1961) *Analiticheskaya mekhanika* [Analytical mechanics]. Moscow: Fizmatgiz.
3. Biderman V.L. (2009) *Teoriya mekhanicheskikh kolebaniy* [Theory of mechanical vibrations]. Moscow – Izhevsk: NITS «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika».
4. Timoshenko S.P. (1967) *Kolebaniya v inzhenernom dele* [Oscillations in engineering]. Moscow: Nauka.
5. Smirnov A.S., Degilevich E.A. (2021) *Kolebaniya tsepykh sistem* [Oscillations of chain systems]. Saint Petersburg: POLYTECH-PRESS.
6. Hatibovic A., Kadar P. (2018) An algorithm for the parabolic approximation of the catenary applicable in both inclined and level spans. *Proceedings of the 2018 International IEEE Conference and Workshop in Óbuda on Electrical and Power Engineering (CANDO-EPE). Budapest, Hungary*. pp. 217–222. doi: 10.1109/CANDO-EPE.2018.8601137
7. Rawlins C.B. (2004) Effect of non-linearity in free large oscillations of a shallow catenary. *Journal of Sound and Vibration*. 273. pp. 857–874. doi: 10.1016/S0022-460X(03)00646-1
8. Chen G., Yang Y., Yang Y., Li P. (2017) Study on galloping oscillation of iced catenary system under cross winds. *Shock and Vibration*. Article 1634292. pp. 1–16. doi: 10.1155/2017/1634292
9. Liu Z., Song Y., Wang Y., Wang H., Gao S. (2014) The catenary vibration response of high-speed electrified railway considering horizontal wind. *Proceedings of the 2013 International Conference on Electrical and Information Technologies for Rail Transportation (EITRT2013)-Volume I. Lecture Notes in Electrical Engineering. Springer, Berlin, Heidelberg*. 287. pp. 45–54. doi: 10.1007/978-3-642-53778-3_5

10. Al Ba'ba'a H., Callanan J., Nouh M. (2019) Emergence of pseudo-phononic gaps in periodically architected pendulums. *Frontiers in Materials*. 6. doi: 10.3389/fmats.2019.00119
11. Tiefenbacher M., Jakubek S., Kozek M. (2011) Modeling and identification of a chain pendulum. *Proceedings of the MMMse 2011*. Paper ID MB764KW.
12. Mwape C.J., Hong T.S., Wu W.B. (2011) Static studies of a steel chain ropeway section using Msc Adams. *Advanced Materials Research*. 328–330. pp. 1031–1036. doi: 10.4028/www.scientific.net/AMR.328-330.1031
13. Suvanjumrat C., Suwannahong W., Thongkom S. (2017) Implementation of multi-body dynamics simulation for the conveyor chain drive system. *The 3rd International Conference on Mechatronics and Mechanical Engineering (ICMME 2016)*. 95. Article 06006. pp. 1–4. doi: 10.1051/mateconf/20179506006
14. Antypas I.R. (2024) Modeling the dynamic loads affecting a bridge crane during start-up. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 24(2). pp. 190–197. doi: 10.23947/2687-1653-2024-24-2-190-197
15. Pu H., Xie X., Liang G., Yun X., Pan H. (2011) Analysis for dynamic characteristics in load-lifting system of the crane. *Procedia Engineering*. 16. pp. 586–593. doi: 10.1016/j.proeng.2011.08.1128
16. Dinnik A.N. (1935) *Ustoychivost' uprugikh sistem* [Stability of elastic systems]. Moscow: ONTI NKTP SSSR.
17. Ispolov Yu.G. (2008) *Vychislitel'nye metody v teorii kolebaniy* [Computational methods in the theory of oscillations]. Saint Petersburg: Polytechnic University Press. doi: 10.18720/SPBPU/2/si20-160

Сведения об авторах:

Дегилевич Егор Алексеевич – аспирант Института проблем машиноведения Российской академии наук (Санкт-Петербург, Россия); руководитель направления по математическому моделированию ООО «Газпромнефть – Промышленные Инновации» (Санкт-Петербург, Россия). E-mail: degilevichegor@gmail.com

Смирнов Алексей Сергеевич – кандидат физико-математических наук, ассистент Высшей школы механики и процессов управления Физико-механического института Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (Санкт-Петербург, Россия); младший научный сотрудник Лаборатории мехатроники Института проблем машиноведения Российской академии наук (Санкт-Петербург, Россия). E-mail: smirnov.alexey.1994@gmail.com

Information about the authors:

Degilevich Egor A. (Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, Russian Federation; Head of Mathematical Modeling Department, Gazpromneft – Industrial Innovations LLC, Saint Petersburg, Russian Federation). E-mail: degilevichegor@gmail.com

Smirnov Aleksey S. (Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor, Peter the Great Saint Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, Russian Federation; Junior Researcher, Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, Russian Federation). E-mail: smirnov.alexey.1994@gmail.com

Статья поступила в редакцию 21.12.2024; принята к публикации 05.02.2026

The article was submitted 21.12.2024; accepted for publication 05.02.2026