DOI 10.17223/20710410/4/5

УДК 519.7

ПРОБЛЕМЫ ПОЛНОТЫ И ВЫРАЗИМОСТИ ДИСКРЕТНЫХ ФУНКЦИЙ

Н. Г. Парватов

Томский государственный университет, г. Томск, Россия

E-mail: parvatov@mail.tsu.ru

Излагаются некоторые результаты, полученные автором по проблемам полноты и выразимости дискретных функций.

Ключевые слова: *замыкание, суперпозиция, нижняя окрестность, критериальная система, замыкание Галуа, проблема полноты, проблема выразимости, проблема нижних окрестностей, предикатно описуемый замкнутый класс, теорема А. В. Кузнецова, теорема С. В. Яблонского, мажоритарная функция, теорема К. А. Бейкера и А. Ф. Пиксли, id-разложение.*

Введение

В статье рассматриваются проблемы полноты и выразимости в пространстве — множестве с замыканием. Затрагиваются проблемы эффективного задания замкнутых множеств пространства, в том числе конечными порождающими и конечными запрещающими множествами. Такие проблемы возникают в различных областях дискретной математики, но наиболее важные приложения имеют в теории функциональных систем.

В п. 1–3 рассматриваются условия, при которых проблема выразимости подмножества в пространстве имеет решение в виде конечной нижней окрестности. Формулируются общие методы, посредством которых это решение может быть найдено. Отдельно рассматривается случай пространства с замыканием Галуа.

Точнее, в п. 1 даются определения основных понятий и формулируется теорема о финитарности пространства с конечными нижними окрестностями у всех конечно-порождаемых множеств.

В п. 2 формулируются конструктивные и легко проверяемые в приложениях условия, при которых конечно-порождаемое множество в финитарном пространстве имеет конечную нижнюю окрестность, причём состоящую из классов с конечным числом запретов относительно некоторого предупорядочения. Тем самым обобщается и усиливается теорема А. В. Кузнецова о полноте.

В п. 3 проблема конечных нижних окрестностей рассматривается в пространствах с замыканием Галуа. Полученные условия обобщают не только теорему А. В. Кузнецова о полноте, но и теорему С. В. Яблонского о предикатно описываемых классах.

В п. 4 рассматривается (введённое автором) специальное замыкание для дискретных функций, обобщающее замыкание относительно суперпозиции для функций k-значной логики. Введённое замыкание интересно ещё тем, что замкнутыми классами при нём являются множества функций проводимостей, вычисляемых в переключательных схемах с произвольным числом каскадов. На такие замкнутые классы переносится соответствие Галуа для клонов (содержащих тождественную функцию и замкнутых суперпозицией классов функций k-значной логики). Попутно рассматриваются примеры применения сформулированных ранее общих теорем.

Наконец, в завершающем п. 5 приводятся некоторые конструкции конечно-порождаемых клонов, основанные на использовании интерполяционной теоремы К. А. Бейкера и А. Ф. Пиксли. Изучается возможность id-разложения функций в таких клонах.

1. Проблема нижних окрестностей и теорема о финитарности

В рассмотрение вводятся понятия замыкания, замкнутого множества, пространства, нижней окрестности и др., а также проблемы полноты, выразимости, конечной порождаемости, нижних окрестностей и др. Формулируется теорема о финитарности пространства, в котором конечные подмножества имеют конечные нижние окрестности.

1.1. Проблемы полноты и выразимости

Будем изучать операцию *замыкания* $'$, заданную в множестве P (правильнее — в системе $\mathcal{B}(P)$ его подмножеств) и обладающую по определению свойствами

$$X \subseteq X',\ X' = X'' \text{ и } (X \subseteq Y) \Rightarrow (X' \subseteq Y')$$

для любых подмножеств X и Y множества P [1–4]. Множество P с замыканием $'$ в нём, то есть пару $(P, ')$ будем называть вслед за [4] *пространством*. Подмножество X множества P, совпадающее со своим *замыканием* X', будем называть *замкнутым*. Для любого подмножества $A \subseteq P$ (равно и для его замыкания A') множество $X \subseteq P$ будем называть A-порождающим (соответственно A-мажорирующим; A-максимальным), если $X' = A'$ (соответственно $X' \supseteq A'$; включение $Y' \supseteq A'$ не выполняется при $Y = X$ и выполняется при $Y \supset X$). Если существует конечное A-порождающее множество, то множество A называется *конечно-порождаемым*. *Проблема конечной порождаемости* в пространстве $(P, ')$ состоит в описании (в приложениях — эффективном описании) всех его конечно-порождаемых замкнутых подмножеств.

Проблема выразимости подмножества A (равносильно — замкнутого подмножества A') в пространстве $(P, ')$ состоит в описании всех A-мажорирующих подмножеств этого пространства. Для произвольного множества $B \subseteq P$ рассматривается также *проблема B-выразимости* множества A в пространстве $(P, ')$, совпадающая с проблемой выразимости множества A в пространстве $(P, '_{(B)})$ с *индуцированным* замыканием $'_{(B)}$, таким, что $X'_{(B)} = (X \cup B)'$ для любого $X \subseteq P$. Эти две проблемы называются *проблемами полноты* и *B-полноты* в пространстве $(P, ')$, если $A' = P$. В дальнейшем будем заниматься в основном проблемой выразимости, как наиболее общей.

Отметим, что проблемы выразимости множеств A и A' совпадают. Также полезно иметь в виду, что проблема выразимости объединения $A = \cup\mathcal{A}$ системы $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(P)$ сводится к ряду формально более простых проблем выразимости всевозможных множеств $B \in \mathcal{A}$. В частности, проблема выразимости произвольного подмножества $A \subseteq P$ сводится к ряду проблем выразимости одноэлементных множеств $\{a\}$ для a из A.

Пространства комбинаторных объектов (функций, графов, разбиений и др.) естественным образом возникают в различных областях дискретной математики. Так, *финитарные* пространства (в которых *замкнутые* подмножества составляют систему подалгебр некоторой алгебры) являются объектом изучения универсальной алгебры. Такие пространства охарактеризованы в [3]. Пространства дискретных функций с замыканиями относительно суперпозиции являются классическим объектом изучения математической кибернетики.

Введённые в рассмотрение проблемы выразимости возникают при изучении функциональных пространств, когда P есть некоторое множество дискретных функций, в котором определено замыкание $'$ относительно некоторого набора операций суперпозиции, а включение $X' \supseteq A$ означает, что все функции множества A являются суперпозициями функций из множества X. Эти проблемы имеют смысл и в более общей ситуации, когда множество P является носителем некоторой алгебры и в нём рассматривается замыкание $'$ относительно главных операций этой алгебры. Тогда замкнутыми подмножествами оказываются всевозможные подалгебры, а включение $X' \supseteq A$ означает, что все элементы из A вычисляются термами, у которых функциональные символы интерпретируются как главные операции алгебры, а переменные принимают значения в множестве X.

1.2. Проблема нижних окрестностей

Естественным средством решения проблемы выразимости множества A в пространстве $(P, ')$ является указание некоторой такой системы $\mathcal{S}$ замкнутых множеств этого пространства, что для любого подмножества $X \subseteq P$ включение $X' \supseteq A$ равносильно отсутствию включающего X и принадлежащего $\mathcal{S}$ подмножества множества P. Всякую такую систему $\mathcal{S}$ станем называть *нижней окрестностью* множества A в пространстве $(P, ')$. Понятие нижней окрестности обобщает понятие критериальной системы (см. [4–6]), используемое при решении проблемы полноты.

Отметим некоторые свойства. Ясно, что нижняя окрестность $\mathcal{S}$ включает систему $\mathcal{S}(A)$ всех A-максимальных подмножеств пространства. Поэтому, если система $\mathcal{S}(A)$ является нижней окрестностью множества A, то она является его наименьшей по включению нижней окрестностью. Нижняя окрестность, состоящая из попарно не сравнимых по отношению включения множеств, называется *безызбыточной.* Если безызбыточная система множества A существует, то она обязана совпадать с системой $\mathcal{S}(A)$. Ясно также, что из любой конечной нижней окрестности множества A, опять в случае её существования, можно выделить безызбыточную конечную нижнюю окрестность $\mathcal{S}(A)$. *Множество A с конечной нижней окрестностью конечно-порождаемое*, поскольку элементы A-порождающего множества можно выбрать из множеств $A' \setminus B$ для всевозможных B из $\mathcal{S}(A)$.

Упомянутую ранее возможность сведения проблемы выразимости объединения к ряду проблем выразимости объединяемых множеств можно уточнить теперь тем, что *объединение нижних окрестностей системы множеств является нижней окрестностью объединения этих множеств.* В частности, *нижней окрестностью любого множества является объединение нижних окрестностей его одноэлементных подмножеств.* Учитывая это, получаем, что в любом пространстве равносильны условия:

(У1) всякое одноэлементное подмножество имеет конечную нижнюю окрестность;
(У2) всякое конечное подмножество имеет конечную нижнюю окрестность;
(У3) всякое конечно-порождаемое подмножество имеет конечную нижнюю окрестность.

Далее будем интересоваться *проблемой нижних окрестностей*, сформулированной (в более слабой форме) в [4] и состоящей в поиске условий существования в пространстве конечной или безызбыточной нижней окрестности заданного его подмножества. В частности, будем интересоваться условиями, при которых пространство обладает свойствами (У1), (У2) и (У3). Подобные условия обобщают теорему А. В. Кузнецова из [4] о полноте, а также (в силу существования соответствия Галуа из [7]) теорему С. В. Яблонского из [8] о предикатно описываемых классах. Эти теоремы многократно обобщались и передоказывались, например, в связи с функциями k-значной логики в [9–11], в связи с дискретными функциями более общего вида в [12] и в более общей ситуации в [4]. Поиск подобных обобщений не утратил актуальности и в настоящее время в связи с появлением (действительным и возможным) новых классов управляющих систем, требующих решения проблем выразимости в новых постановках.

1.3. Финитарность и слабая финитарность

В связи с проблемой нижних окрестностей оказываются полезными рассматриваемые ниже свойства финитарности и слабой финитарности.

В пространстве $(P, ')$ подмножество A (равно и его замыкание A') будем называть *слабо финитарным*, если всякая цепь (т. е. линейно упорядоченная включением система) подмножеств (равносильно замкнутых подмножеств) множества P с A-мажорирующим объединением содержит в качестве элемента A-мажорирующее множество. *Свойство слабой финитарности множества* интересно тем, что *является достаточным для существования у него безызбыточной нижней окрестности.* Этот факт хорошо известен (см. [2]) и легко доказывается с использованием леммы Куратовского — Цорна из [1, 2].

В пространстве $(P, ')$ подмножество A (а также его замыкание A') будем называть *финитарным*, если всякая направленная вверх система (т. е. система, содержащая в качестве элемента некоторое множество $C \supseteq A \cup B$ вместе с любыми своими элементами A и B) подмножеств (равносильно замкнутых подмножеств) множества P с A-мажорирующим объединением содержит в качестве элемента A-мажорирующее множество. Свойство финитарности формально сильнее свойства слабой финитарности, что отражено в названиях. Тем не менее *в случае счётного множества P свойства финитарности и слабой финитарности множества A в пространстве $(P, ')$ равносильны*, несложное доказательство этого имеется в [13]. Эти свойства равносильны и в ряде других случаев, некоторые из которых отмечены ниже.

Теорема 1. В пространстве $(P, ')$ для любого его подмножества $A \subseteq P$, такого, что система $\mathcal{S}(A)$ конечная, следующие условия равносильны:

1) множество A финитарно;
2) множество A слабо финитарно;
3) множество A обладает конечной нижней окрестностью.

Следствие 1. В пространстве $(P, ')$ для любого множества $A \subseteq P$ следующие условия равносильны:

1) множество A финитарно и система $\mathcal{S}(A)$ конечная;
2) множество A слабо финитарно и система $\mathcal{S}(A)$ конечная;
3) множество A обладает конечной нижней окрестностью.

Таким образом, свойство финитарности (и тем более слабой финитарности) подмножества необходимо для существования у него конечной нижней окрестности.

Примером финитарного и слабо финитарного множества является конечно-порождаемое подмножество финитарного пространства. В действительности, *пространство тогда и только тогда финитарно, когда все его конечно-порождаемые (достаточно конечные или, даже, одноэлементные) подмножества финитарны.* Это было показано в [13] с использованием результатов работы [3]. Отсюда следует

Теорема 2. Пространство, удовлетворяющее условиям (У1), (У2) и (У3), финитарно.

Обратная теорема не имеет места: пространство бесконечной циклической группы с замыканием относительно групповых операций финитарно, но не удовлетворяет условиям (У1), (У2) и (У3).

Из сказанного ясно, что вопрос о наличии конечной нижней окрестности у заданного или произвольного конечно-порождаемого подмножества пространства может быть поставлен только в случае финитарного подмножества или финитарного пространства. Вместе с тем финитарность изучаемого пространства (или подмножества в нём), либо её отсутствие, как правило, известна заранее или легко устанавливается. В связи с этим будем интересоваться далее условиями существования конечных нижних окрестностей в финитарных пространствах или в произвольных пространствах, но для финитарных его подмножеств.

2. Обобщённая теорема А. В. Кузнецова для финитарного пространства

Сформулируем обобщающие теорему А. В. Кузнецова о полноте условия существования конечной нижней окрестности у финитарного множества, попутно рассмотрим возможность эффективного задания классов, принадлежащих нижним окрестностям, посредством конечных запрещающих множеств относительно некоторого предупорядочения.

2.1. Предупорядочения и запрещающие множества

Пусть в множестве P задано (рефлексивное и транзитивное) отношение предпорядка $\leqslant$ (см. [14, 15]). Множество A элементов из P, содержащее вместе с любым своим элементом b всякий элемент a из P, такой, что $a \leqslant b$, называется *наследственным* (множеством или классом) в предупорядоченном множестве $(P, \leqslant)$. Наследственное множество A можно задать указанием некоторого такого подмножества $X \subseteq A$, что A есть наименьшее наследственное множество среди множеств, включающих X, а также указанием некоторого такого подмножества $Y \subseteq P \setminus A$, что A есть наибольшее наследственное множество среди множеств, не пересекающихся с Y. В первом случае A состоит из всевозможных элементов a из P, для которых можно указать элемент b из X, удовлетворяющий неравенству $a \leqslant b$. Во втором случае A состоит из всех элементов a из P, для которых в множестве Y не существует элемента b, удовлетворяющего неравенству $b \leqslant a$. Множества X и Y будем называть соответственно *порождающим* и *запрещающим* множествами наследственного класса A, который будем обозначать через $X_{\leqslant}$ или $P \setminus Y_{\geqslant}$.

Полезно иметь в виду, что *произвольные объединения и пересечения наследственных классов являются наследственными.* Более подробно, *объединение* $\cup A_i$ (*пересечение* $\cap A_i$) *наследственных классов* A_i, *имеющих конечные порождающие* (*соответственно запрещающие*) *множества* X_i, *является наследственным классом с порождающим* (*соответственно запрещающим*) *множеством* $\cup X_i$. В частности, *конечное пересечение наследственных классов, обладающих конечными запрещающими множествами, является наследственным классом с конечным запрещающим множеством.*

С предупорядочением $\leqslant$ связано отношение эквивалентности $\approx$, определённое в множестве A для любых его элементов a и b так:

$$(a \approx b) \Leftrightarrow (a \leqslant b \text{ и } b \leqslant a).$$

Говорят, что предупорядочение $\leqslant$ в множестве P удовлетворяет *условию обрыва убывающих цепей*, если из элементов этого множества невозможно составить бесконечную строго убывающую последовательность $a_1 > a_2 > \ldots$ В этом случае множество

$\min(P \setminus A, \leqslant)$ минимальных элементов предупорядоченного множества $(P \setminus A, \leqslant)$ является запрещающим для наследственного класса A в $(P, \leqslant)$. Можно сформулировать более точные условия: *множество $B \subseteq P \setminus A$ тогда и только тогда запрещающее для A в $(P, \leqslant)$, когда B имеет непустое пересечение с каждым классом фактор-множества* $\min(P \setminus A, \leqslant) \,/ \approx$.

Наследственные классы комбинаторных объектов (таких, как дискретные функции, графы и др.) естественным образом возникают в различных областях дискретной математики (таких, как теория графов, теория функциональных систем, математическая логика и др.) и являются в настоящее время одним из классических объектов её изучения. Так, наследственными классами при подходящем определении предупорядочения являются наследственные множества графов из [14] (замкнутые операциями взятия миноров), инвариантные классы булевых функций из [16] (замкнутые операциями перестановки переменных, введения и удаления фиктивных переменных и операциями подстановки констант), а также рассматриваемые в [8, 12] наследственные множества дискретных функций (замкнутые операциями перестановки и отождествления переменных, а также операциями введения и удаления фиктивных переменных). Частным случаем наследственных классов дискретных функций являются замкнутые классы функций k-значной логики. Задание наследственных классов посредством запрещающих множеств оказывается часто важной и нетривиальной задачей. Классическим примером тому служит теорема Куратовского — Вагнера из [14], которая в терминах запретов описывает (наследственное) множество планарных графов. Другой пример даёт лемма о немонотонной функции, вместе с другими леммами, участвующими в доказательстве теоремы Поста о полноте систем булевых функций [5]. Важность данной задачи обусловлена тем, что задание наследственных классов конечными запрещающими множествами в ряде случаев (например, во всех упомянутых выше случаях) является эффективным (по терминологии книги [14] — «хорошим»), позволяя получить алгоритм распознавания принадлежности этим классам. Некоторые условия, при которых замкнутые классы функций k-значной логики, рассматриваемые как наследственные множества, могут быть заданы посредством конечного множества запретов, установлены в [8]. В [12] этот результат перенесён на дискретные функции более общего вида.

2.2. Обобщённая теорема А. В. Кузнецова

Предупорядочение $\leqslant$ и замыкание $'$, заданные в множестве P, станем называть по отношению друг к другу *согласованными*, если для любых элементов a и b из P имеет место импликация

$$(a \leqslant b) \Rightarrow (\{a\}' \subseteq \{b\}'), \tag{1}$$

или, равносильным образом, если замкнутые подмножества пространства $(P, {}')$ являются наследственными классами предупорядоченного множества $(P, \leqslant)$. Предупорядочение, для которого соотношения (1) выполняются со знаком $\Leftrightarrow$, называется *индуцированным* замыканием $'$. Имеет место

Лемма 1. Пусть в множестве P предупорядочение $\leqslant$ и замыкание $'$ согласованы. Пусть также B_1 и B_2 — подмножества множества P и для любого подмножества $C \subseteq P$ имеет место включение

$$C' \cap B_1 \subseteq (C_{\leqslant} \cap B_2)'. \tag{2}$$

Тогда в пространстве $(P, ')$ для любого замкнутого класса Q, такого, что $(Q \cap B_1)' = Q$, и любого множества $Q_1 \in \mathcal{S}(Q)$ множество $B_2 \setminus Q_1$ является запрещающим для наследственного класса Q_1 в предупорядоченном множестве $(P, \leqslant)$.

Если в условиях леммы 1 множество B_2 конечное, то в пространстве $(P, ')$ финитарное подмножество Q имеет конечную нижнюю окрестность $\mathcal{S}(Q)$, для каждого элемента которой в предупорядоченном множестве $(P, \leqslant)$ имеется конечное запрещающее множество. В связи с этим имеет смысл следующее определение. Замыкание $'$ и предупорядочение $\leqslant$, заданные в множестве P, по отношению друг к другу станем называть *сильно согласованными*, если они согласованы и существуют покрывающая множество P направленная вверх система $\mathcal{N}$ его подмножеств и функция $m : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, такие, что для любых подмножеств B_1 и $B_2 = m(B_1)$ из $\mathcal{N}$ и любого подмножества $C \subseteq P$ выполняется включение (2). В этой ситуации будем говорить также, что замыкание $'$ сильно согласовано с предупорядочением $\leqslant$ посредством системы $\mathcal{N}$ и функции m. Следствием леммы 1 является

Теорема 3. Если в множестве P финитарное замыкание $'$ сильно согласовано с предупорядочением $\leqslant$, то в пространстве $(P, ')$ любое конечно-порождаемое подмножество имеет конечную нижнюю окрестность, все элементы которой являются в предупорядоченном множестве $(P, ')$ наследственными классами с конечными запрещающими множествами.

Теорема 3 сводит вопрос о выполнении в финитарном пространстве условий (У1), (У2) и (У3) к вопросу о существовании сильно согласованного с замыканием предупорядочения. Тем самым теорема 3 обобщает теорему А. В. Кузнецова. Вместе с тем в теореме 3 речь идёт не просто о существовании конечной нижней окрестности, но о нижней окрестности с эффективно определяемыми (посредством запретов) классами. Этим теорема 3 не только обобщает, но и усиливает теорему А. В. Кузнецова. Более того, лемма 1 позволяет сформулировать общий (к сожалению, чрезвычайно общий) метод решения проблемы выразимости конечно-порождаемого множества A в финитарном пространстве $(P, ')$, с замыканием $'$ которого сильно согласовано предупорядочение $\leqslant$ при помощи пары $\mathcal{N}$ и m. Этот метод требует:

1) найти A-мажорирующее множество B_1 в $\mathcal{N}$, что возможно благодаря свойствам системы $\mathcal{N}$ и конечной порождаемости A;
2) найти множество $B_2 = m(B_1)$ в $\mathcal{N}$;
3) найти A-максимальные классы, выбрав их среди наследственных классов предупорядоченного множества $(P, \leqslant)$ с запрещающими множествами, включёнными в B_2.

2.3. Замечание об индуцированном замыкании

Наряду с замыканием $'$, заданным в множестве P, часто приходится рассматривать *индуцированное замыкание* ${}'_{(A)}$, определённое в множестве P (или в произвольном замкнутом множестве $Q = Q'$) при помощи некоторого подмножества $A \subseteq P$ (соответственно $A \subseteq Q$) так, что

$$X'_{(A)} = (X \cup A)'$$

для любого $X \subseteq P$ (соответственно $X \subseteq Q$). В таком *индуцированном пространстве* $(Q, {}'_{(A)})$ замкнутыми классами являются включающие множество A и содержащиеся в Q замкнутые классы *исходного* пространства $(P, ')$. Нижнюю окрестность множества X в индуцированном пространстве можно получить из нижней окрестности того же множества в исходном пространстве, удалив из последней классы, не включающие A, и заменив оставшиеся классы их пересечениями с Q. В силу этого условия (У1), (У2) и (У3), выполняющиеся в исходном пространстве, выполняются и в индуцированном пространстве. Не сложно проверить, что *предупорядочение, сильно согласованное с замыканием* $'$, *оказывается сильно согласованным и с замыканием* $'_{(A)}$. Это означает, что сформулированное выше обобщение теоремы А. В. Кузнецова и общий метод решения проблем выразимости, имеющие место в некотором пространстве, легко переносятся, причём с тем же предупорядочением, в пространства с индуцированным замыканием. Приведём примеры использования теоремы 3.

2.4. Пример: функции многозначной логики

Рассмотрим множество P_E функций $f : E^n \to E$ при всевозможных натуральных n и заданном множестве E. Функции в P_E рассматриваются с замыканием относительно суперпозиции [5, 6]. Замыкание относительно суперпозиции множества X функций из P_E, состоящее из функций, вычисляемых всевозможными схемами (см. [17, 18]) над X, принято обозначать через $[X]$. Наряду с этим, для любого множества $A \subseteq P_E$ в множестве P_E рассматривают (индуцированное) *замыкание относительно суперпозиции с множеством* A, называемое также замыканием относительно A-суперпозиции. При этом под замыканием множества $X \subseteq P_E$ относительно A-суперпозиции понимают множество

$$[X]_{(A)} = [X \cup A].$$

Классы функций из P_E, замкнутые относительно суперпозиции с множеством S_E всевозможных селекторных (тождественно равных некоторому своему аргументу) функций, называются *клонами*.

В множестве P_E естественно рассмотреть предупорядочение $\leqslant$, при котором неравенство $f \leqslant g$ означает возможность получить функцию f из функции g отождествлением переменных. Можно показать, что такое *предупорядочение сильно согласовано с замыканием относительно суперпозиции* и удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей. Это позволяет применять общий метод решения проблемы выразимости в пространстве P_E с замыканием относительно суперпозиции, а также вывести из теоремы 3 в качестве следствия в обобщённом и усиленном виде известную теорему А. В. Кузнецова о полноте. Не будем останавливаться на этом, так как в п. 2.5 сформулируем более общий результат.

2.5. Пример: специальное замыкание дискретных функций

Рассмотрим множество $P_{E,D}$ дискретных функций вида $f : E^n \to D$ при всевозможных натуральных n, где E и D — заданные конечные множества. Пусть заданы клоны R и L функций из P_E и P_D соответственно, а также, возможно пустые, подмножества $K \subseteq P_{E,D}$ и $O \subseteq P_{D,E}$. Обозначим через $\mathfrak{S}$ набор классов (K, L, O, R) и введём операцию $\mathfrak{S}$-замыкания на множестве $P_{E,D}$, считая его подмножество A $\mathfrak{S}$-*замкнутым*, если оно содержит всякую (и не только бесповторную) корректно составленную суперпозицию вида

$$f(f_1(f_{11}, \ldots, f_{1m_1}), \ldots, f_n(f_{n1}, \ldots, f_{nm_n})),$$

где функции f, f_i и f_{ij} выбираются либо из соответствующих множеств $L, A \cup K$ и R, либо из соответствующих множеств $A \cup K, O$ и $A \cup K$. Наименьшее по включению множество среди $\mathfrak{S}$-замкнутых и включающих X назовём $\mathfrak{S}$-*замыканием* множества X и обозначим через $[X]_{\mathfrak{S}}$. При совпадающих множествах $E = D$ и $L = O = R = S_E$

$\mathfrak{S}$-замыкание в множестве P_E совпадает с замыканием относительно K-суперпозиции. $\mathfrak{S}$-замыкание задаёт также классы функций проводимости, вычисляемых в многокаскадных переключательных и транзисторных схемах специального вида. Отмеченные приложения делают изучения $\mathfrak{S}$-замыкания привлекательным.

В множестве $P_{E,D}$ будем рассматривать (очевидно) согласованное с $\mathfrak{S}$-замыканием предупорядочение $\leqslant$, где неравенство $f \leqslant g$ означает возможность получить f из g отождествлением переменных. Имеет место

Теорема 4. Для любых натуральных n и $r = |E|^{|E|^n}$ и любого подмножества $C \subseteq P_{E,D}$ имеет место включение

$$[C]_{\mathfrak{S}} \cap P_{E,D}^{(n)} \subseteq [C_{\leqslant} \cap P_{E,D}^{(r)}]_{\mathfrak{S}}.$$

Иными словами, теорема 4 говорит о том,что $\mathfrak{S}$-замыкание в пространстве $P_{E,D}$ сильно согласовано с предупорядочением $\leqslant$ посредством пары $\mathcal{N}$ и m, в которой система $\mathcal{N}$ состоит из множеств $P_{E,D}^{(n)}$ при натуральных n, а функция m определена как $m(P_{E,D}^{(n)}) = P_{E,D}^{(r)}$ для $r = |E|^{|E|^n}$. Это позволяет сформулировать аналог теоремы А. В. Кузнецова о полноте. *В пространстве $P_{E,D}$ с $\mathfrak{S}$-замыканием любое конечное множество функций имеет конечную нижнюю окрестность, каждый элемент которой является в предупорядоченном множестве $(P_{E,D}, \leqslant)$ наследственным классом с конечным запрещающим множеством.* Впоследствии изучение $\mathfrak{S}$-замыкания будет продолжено. А пока займёмся изучением пространств с замыканием Галуа.

3. Обобщённая теорема С. В. Яблонского для пространств с замыканием Галуа

В пространстве с замыканием Галуа рассмотрим всё те же проблемы конечной порождаемости, выразимости и проблему нижних окрестностей. Сформулируем общий метод решения проблемы выразимости. Наряду с теоремой А. В. Кузнецова о полноте обобщим теорему С. В. Яблонского о предикатно описываемых классах.

3.1. Соответствие Галуа

Понадобятся некоторые определения. Пусть заданы множества P и T и для любых элементов $x \in P$ и $y \in T$ определены подмножества $x^\alpha \subseteq T$ и $y^\beta \subseteq P$. Положим

$$X^\alpha = \bigcap_{x \in X} x^\alpha,\ Y^\beta = \bigcap_{y \in Y} y^\beta$$

для любых множеств $X \subseteq P$ и $Y \subseteq T$. Тогда для любых подмножеств X_1 и X_2 множества P и любых подмножеств Y_1 и Y_2 множества T имеют место импликации

$$(X_1 \subseteq X_2) \Rightarrow ({X_2}^\alpha \supseteq {X_1}^\alpha),\ (Y_1 \subseteq Y_2) \Rightarrow ({Y_2}^\beta \supseteq {Y_1}^\beta). \tag{3}$$

Потребуем, чтобы для любых подмножеств $X \subseteq P$ и $Y \subseteq T$ выполнялись условия

$$X \subseteq X^{\alpha\beta},\ Y \subseteq Y^{\beta\alpha}. \tag{4}$$

В рассматриваемой ситуации, когда выполняются условия (3) и (4), говорят, что отображения α и β определяют *соответствие Галуа* между упорядоченными включением системами $\mathcal{B}(P)$ и $\mathcal{B}(T)$. Хорошо известно (см. [1, 15]), что в этом случае композиции $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$ (в которых левая функция действует первой) являются замыканиями в соответствующих множествах P и T. Эти замыкания принято называть *замыканиями*

Галуа. Замкнутые ими подмножества множеств P и T будем называть соответственно *$\alpha\beta$- и $\beta\alpha$-замкнутыми*, а также *Галуа-замкнутыми.* Из [1, 15] известно, что отображения α и β индуцируют пару взаимно обратных инверсных изоморфизмов (см. [1]) между упорядоченными включением системами Галуа-замкнутых подмножеств множеств P и T.

Из сказанного следует, что Галуа-замкнутыми подмножествами множества P являются всевозможные множества Y^β, где $Y \subseteq T$. Таким образом, всякий Галуа-замкнутый класс $B \subseteq P$ можно задать указанием некоторого такого множества $Y \subseteq T$, что $B = Y^\beta$. Такое множество Y будем называть *β-описанием* Галуа-замкнутого множества B в множестве T. Таким образом, для задания Галуа-замкнутых подмножеств наряду с другими способами можно пользоваться описаниями. Часто задание посредством конечных описаний оказывается эффективным, в связи с чем вызывают интерес *конечно-описуемые* Галуа-замкнутые классы, обладающие конечными описаниями. Впрочем, конечная описуемость Галуа-замкнутого множества A элементов пространства $(P, \alpha\beta)$ равносильна конечной порождаемости Галуа-замкнутого класса A^α в пространстве $(T, \beta\alpha)$.

Далее будем считать, что в множестве T с замыканием Галуа согласовано предупорядочение $\leqslant_T$, а также определено индуцированное замыканием Галуа предупорядочение $\leqslant_T^{\beta\alpha}$. Обратные к ним предупорядочения будут обозначаться $\geqslant_T$ и $\geqslant_T^{\beta\alpha}$. Иными словами, для любых элементов y_1 и y_2 из T выполняется импликация

$$(y_1 \leqslant_T y_2) \Rightarrow ({y_1}^{\beta\alpha} \subseteq {y_2}^{\beta\alpha}) \quad \text{и} \quad (y_1 \leqslant_T y_2) \Rightarrow ({y_1}^{\beta} \supseteq {y_2}^{\beta}),$$

а для предупорядочения $\leqslant_T^{\beta\alpha}$ наряду с аналогичными импликациями выполняются обратные.

В дальнейшем попутно с проблемами выразимости в пространстве с замыканиями Галуа будем интересоваться условиями, при которых Галуа-замкнутые классы обладают конечными запрещающими множествами относительно согласованного с замыканием Галуа предупорядочения, а также условиями, когда Галуа-замкнутые классы пространства обладают конечными описаниями.

3.2. Проблема выразимости

Обратимся к проблеме выразимости в пространстве с замыканием Галуа. С этой целью для произвольного множества B элементов из T введём в рассмотрение систему

$$\Lambda(B) = \{b^\beta | b \in B\},$$

состоящую, как видно, из Галуа-замкнутых подмножеств множества P с конечными (более того — одноэлементными) β-описаниями в множестве T. Представляют интерес всевозможные случаи, когда система $\Lambda(B)$ является нижней окрестностью заданного множества $X \subseteq P$. Все такие случаи описывает следующая

Теорема 5. Для любых множеств $X \subseteq P$ и $B \subseteq T$ равносильны условия:

1) система $\Lambda(B)$ является нижней окрестностью множества X в пространстве $(P, \alpha\beta)$;
2) множество B является запрещающим для наследственного класса X^α в предупорядоченном множестве $(T, \leqslant_T^{\beta\alpha})$.

Несложно получить

Следствие 2. Для множеств $X \subseteq P$ и $B \subseteq T$ таких, что $B = \min(T \setminus (X^\alpha), \leqslant_T^{\beta\alpha})$, верно
$$S(X) = \Lambda(B).$$
В частности, X-максимальные классы пространства $(P, \alpha\beta)$ имеют в множестве T одноэлементные β-описания.

А также

Следствие 3. Пусть $X \subseteq P$. Тогда, если множество $B \subseteq T$ является запрещающим для наследственного класса X^α в предупорядоченном множестве $(T, \leqslant_T)$, то система $\Lambda(B)$ является нижней окрестностью множества X в пространстве $(P, \alpha\beta)$. В частности, если предупорядочение $\leqslant_T$ в множестве T удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей и $B = \min(T \setminus X^\alpha, \leqslant_T)$, то система $\Lambda(B)$ является нижней окрестностью множества X в пространстве $(P, \alpha\beta)$.

Следствие 3 даёт ещё один общий метод (к сожалению, опять чрезвычайно общий) решения проблемы выразимости множества X в пространстве $(P, \alpha\beta)$, требующий

1) задать в множестве T согласованное с $\beta\alpha$-замыканием предупорядочение $\leqslant_T$;
2) найти в предупорядоченном множестве $(T, \leqslant_T)$ для наследственного класса X^α запрещающее множество B; в случае предупорядочения $\leqslant_T$, удовлетворяющего условию обрыва убывающих цепей, можно взять $B = \min(T \setminus X^\alpha, \leqslant_T)$;

и гарантирующий

3) получение нижней окрестности $\Lambda(B)$ множества X.

Отметим ещё одно

Следствие 4. Пусть Y — $\beta\alpha$-замкнутое подмножество множества T. Тогда, если в предупорядоченном множестве $(T, \leqslant_T)$ наследственный класс Y имеет конечное запрещающее множество, то $\beta\alpha$-замкнутое множество Y имеет в множестве P конечное α-описание.

Для дальнейшего использования отметим равносильность для предупорядочения $\leqslant_T$ следующих условий:

(У4) для любого элемента x из P в предупорядоченном множестве $(T, \leqslant_T)$ наследственный класс x^α имеет конечное запрещающее множество;
(У5) для любого конечного подмножества $X \subseteq P$ в предупорядоченном множестве $(T, \leqslant_T)$ наследственный класс X^α имеет конечное запрещающее множество;
(У6) для любого конечно-порождаемого $\alpha\beta$-замкнутого множества $X \subseteq P$ в предупорядоченном множестве $(T, \leqslant_T)$ наследственный класс X^α имеет конечное запрещающее множество.

3.3. Проблема нижних окрестностей

Теперь можно сформулировать условия существования конечных нижних окрестностей у подмножеств пространства $(P, \alpha\beta)$. Довольно очевидно

Следствие 5. Для любого множества $X \subseteq P$ равносильны свойства:

1) множество X имеет в пространстве $(P, \alpha\beta)$ конечную нижнюю окрестность;
2) для некоторого согласованного с $\beta\alpha$-замыканием предупорядочения $\leqslant_T$ множества T в предупорядоченном множестве $(T, \leqslant_T)$ наследственный класс X^α имеет конечное запрещающее множество;
3) в предупорядоченном множестве $(T, \leqslant_T^{\beta\alpha})$ наследственный класс X^α имеет конечное запрещающее множество.

А также

Следствие 6. Равносильны свойства:

1) в пространстве $(P, \alpha\beta)$ выполняются условия (У1), (У2) и (У3);
2) некоторое согласованное с $\beta\alpha$-замыканием предупорядочение $\leqslant_T$ множества T удовлетворяет условиям (У4), (У5) и (У6);
3) индуцированое с $\beta\alpha$-замыканием предупорядочение $\leqslant_T^{\beta\alpha}$ множества T удовлетворяет условиям (У4), (У5) и (У6).

Следствие 5 показывает, что сформулированный ранее общий метод позволяет найти конечную нижнюю окрестность множества X относительно $\alpha\beta$-замыкания, если X обладает хотя бы одной конечной нижней окрестностью. Следствие 6 сводит вопрос о выполнении условий (У1), (У2) и (У3) в пространстве $(P, \alpha\beta)$ к вопросу о существовании удовлетворяющего условиям (У4), (У5) и (У6) и согласованного с замыканием Галуа предупорядочения $\leqslant_T$ множества T. Последний вопрос имеет в ряде приложений, которые будут рассмотрены позднее, очевидный ответ.

3.4. Обобщения теорем А. В. Кузнецова и С. В. Яблонского

Сфомулированные утверждения позволяют обобщить в одном утверждении теоремы А. В. Кузнецова и С. В. Яблонского. Для этого понадобится ещё одно определение. В пространстве $(P, {}')$ систему замкнутых элементов $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{B}(P)$ назовём *верхней окрестностью* замкнутого множества $Y \subseteq P$, если для любого замкнутого подмножества X этого пространства включение $X \subseteq Y$ равносильно отсутствию в $\mathcal{H}$ элемента Z, удовлетворяющего включению $Z \subseteq X$. Иначе говоря, множества, принадлежащие $\mathcal{H}$, замкнуты, не включены в Y и всякое не включённое в Y замкнутое подмножество пространства включает некоторое множество из $\mathcal{H}$. Отметим, что верхние окрестности, в отличие от нижних, определены только для замкнутых множеств пространства. Ясно, что инверсные изоморфизмы, установленные между системами Галуа-замкнутых подмножеств множеств P и T, переводят нижние окрестности замкнутых элементов на верхние окрестности образов этих элементов и обратно. В частности, существование конечной нижней окрестности подмножества X в пространстве $(P, \alpha\beta)$ равносильно существованию в пространстве $(T, \beta\alpha)$ конечной верхней окрестности множества X^α.

Следствие 7. Пусть согласованное с $\beta\alpha$-замыканием предупорядочение $\leqslant_T$ множества T удовлетворяет условию (У4). Тогда для любых $\alpha\beta$- и $\beta\alpha$-замкнутых классов $X \subseteq P$ и $Y \subseteq T$, таких, что $X = Y^\beta$ (или, что то же самое, $X^\alpha = Y$), следующие свойства равносильны:

1) в пространстве $(P, \alpha\beta)$ существует конечное X-порождающее множество;
2) в множестве P существует конечное α-описание множества Y;
3) в предупорядоченном множестве $(T, \leqslant_T)$ наследственный класс Y имеет конечное запрещающее множество;
4) в пространстве $(P, \alpha\beta)$ существует конечная нижняя окрестность множества X;
5) в пространстве $(T, \beta\alpha)$ существует конечная верхняя окрестность множества Y.

Замечание 1. Следствие 7 остаётся в силе, если в нём вместо условия (У4) потребовать выполнения условия

(У4') предупорядочение $\leqslant_T$ удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей и для любого конечного (достаточно одноэлементного) подмножества $X \subseteq P$ множество $\min(T \setminus (X^\alpha), \leqslant_T)$ конечное.

Тогда третье свойство можно заменить свойством

3') множество $\min(T \setminus Y, \leqslant_T)$ конечное.

Следствие 7 даёт условия существования конечных нижних и верхних окрестностей, а также условия конечной порождаемости и конечной описуемости. Тем самым оно обобщает как теорему А. В. Кузнецова, так и теорему С. В. Яблонского.

3.5. Индуцированное соответствие Галуа

Желая ещё больше обобщить теоремы А. В. Кузнецова и С. В. Яблонского, предположим, что для подмножеств $A \subseteq P$ и $B \subseteq T$ выполняются (равносильные) включения

$$A \subseteq B^\beta \text{ и } B \subseteq A^\alpha.$$

В этом случае отображения α^A и β^B между множествами $\mathcal{B}(B^\beta)$ и $\mathcal{B}(A^\alpha)$, такие, что

$$\begin{aligned} X^{\alpha^A} =&(A \cup X)^\alpha = A^\alpha \cap X^\alpha \text{ для всех } X \subseteq B^\beta, \\ Y^{\beta^B} =&(B \cup X)^\beta = B^\beta \cap Y^\beta \text{ для всех } Y \subseteq A^\alpha, \end{aligned}$$

определяют соответствие Галуа. При этом $\alpha^A\beta^B$- и $\beta^B\alpha^A$-замыкания подмножеств $X \subseteq B^\beta$ и $Y \subseteq A^\alpha$ определяются так:

$$\begin{aligned} X^{\alpha^A\beta^B} =&B^\beta \cap X^{\alpha^A\beta} = X^{\alpha^A\beta} = (A \cup X)^{\alpha\beta}, \\ Y^{\beta^B\alpha^A} =&A^\alpha \cap Y^{\beta^B\alpha} = Y^{\beta^B\alpha} = (B \cup Y)^{\beta\alpha}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\alpha^A\beta^B$-замкнутыми подмножествами множества B^β оказываются всевозможные его $\alpha\beta$-замкнутые подмножества, включающие A, а $\beta^B\alpha^A$-замкнутыми подмножествами множества A^α оказываются его всевозможные $\beta\alpha$-замкнутые подмножества, включающие B. Иными словами, замыкания $\alpha^A\beta^B$ и $\beta^B\alpha^A$ в множествах B^β и A^α совпадают с индуцированными замыканиями $\alpha\beta_{(A)}$ и $\beta\alpha_{(B)}$.

Отметим, что α^A-описаниями $\beta^B\alpha^A$-замкнутого множества $Y \subseteq A^\alpha$ в множестве B^β оказываются всевозможные подмножества X последнего, обладающие свойством

$$Y = X^{\alpha^A} = A^\alpha \cap X^\alpha.$$

Ясно, что следствие 7 вместе с замечанием 1 остаются в силе, если в них вместо функций α, β и множеств P, T рассматривать соответствующие функции α^A, β^B и множества B^β, A^α. Более того, предупорядочение в A^α, согласованное с замыканием $\beta\alpha$, остаётся согласованным и с замыканием $\beta^B\alpha^A$; это следует, например, из очевидной импликации

$$({y_1}^\beta \supseteq {y_2}^\beta) \Rightarrow (B^\beta \cap {y_1}^\beta \supseteq B^\beta \cap {y_2}^\beta),$$

имеющей место для любых y_1 и y_2 из A^α. В связи с этим, следствие 7 остаётся в силе в тех же условиях, если в его утверждающей части (начинающейся со слова «Тогда») заменить α, β, P и T на $\alpha^A, \beta^B, B^\beta$ и A^α соответственно, а предупорядочение $\leqslant$ оставить прежним. Таким путём получается

Теорема 6. Пусть согласованное с $\beta\alpha$-замыканием предупорядочение $\leqslant_T$ множества T удовлетворяет условию (У4). Тогда для любых $\alpha\beta_{(A)}$- и $\beta\alpha_{(B)}$-замкнутых классов $X \subseteq B^\beta$ и $Y \subseteq A^\alpha$, таких, что $X = Y^\beta$ (или, что то же самое, $X^\alpha = Y$), равносильны свойства:

1) существует конечное подмножество $Z \subseteq B^\beta$, такое, что $X = (A \cup Z)^{\alpha\beta}$;
2) существует конечное подмножество $Z \subseteq B^\beta$, такое, что $Y = A^\alpha \cap Z^\alpha$;

3) в предупорядоченном множестве $(A^\alpha, \leqslant_T)$ наследственный класс Y имеет конечное запрещающее множество;
4) в пространстве $(B^\beta, \alpha\beta_{(A)})$ существует конечная нижняя окрестность множества X;
5) в пространстве $(A^\alpha, \beta\alpha_{(B)})$ существует конечная верхняя окрестность множества Y.

В рассматриваемом случае будет выполняться и аналогичное замечанию 1

Замечание 2. Теорема 6 останется в силе, если в неё вместо условия (У4) потребовать выполнения условия (У4'). Тогда третье свойство в теореме можно заменить свойством

3") множество $\min(A^\alpha \setminus Y, \leqslant_T)$ конечное.

Замечание 3. Свойство 3 в теореме 6, а значит и каждое из её свойств 1–5, не зависит от выбора множества B такого, что $B \subseteq Y \subseteq A^\alpha$. Это означает, что, выполнившись при некотором таком B, эти свойства выполнятся при всех таких B. В частности, в условиях теоремы множество Y либо имеет конечную верхнюю окрестность в каждом пространстве $(A^\alpha, \beta\alpha_{(B)})$, где $B \subseteq A^\alpha$, либо не имеет конечной верхней окрестности ни в одном из этих пространств.

3.6. Пример: соответствие Галуа для клонов

Через Π_E станем обозначать множество всех предикатов $P : E^n \to \{\text{И, Л}\}$ для всевозможных натуральных n. Классическим для дискретной математики примером соответствия Галуа является соответствие Галуа, определяемое между системами $\mathcal{B}(P_E)$ и $\mathcal{B}(\Pi_E)$ отображениями inv_E и pol_E, где для любого $X \subseteq P_E$ множество $\mathrm{inv}_E(X)$ состоит из всех предикатов из Π_E, сохраняемых всеми функциями из X, и для любого $Y \subseteq \Pi_E$ множество $\mathrm{pol}_E(Y)$ состоит из всех функций из P_E, сохраняющих все предикаты из Y. Известно из [7] и несложно проверяется, что Галуа-замкнутыми классами функций в этом случае являются всевозможные клоны. По этой причине данное соответствие Галуа представляет интерес при изучении операции суперпозиции в P_E (точнее, близкой к ней операции S_E-суперпозиции). Несложно понять, что с замыканиями Галуа в множествах P_E и Π_E согласованы предупорядочения $\leqslant$, определённые в этих множествах так, что неравенство $p \leqslant q$ означает возможность получить функцию (или предикат) p из функции (соответственно предиката) q отождествлением переменных. Ясно, что такие предупорядочения удовлетворяют условию обрыва убывающих цепей. Почти очевидно, что они удовлетворяют условиям (У4), (У5) и (У6), если вместо α, P, T и $\leqslant_T$ взять $\mathrm{pol}_E, P_E, \Pi_E$ и $\leqslant$ соответственно или взять $\mathrm{inv}_E, \Pi_E, P_E$ и $\leqslant$. Сказанное позволяет в качестве следствий результатов п. 3.5 получить общий метод решения проблемы выразимости, а также в обобщённом виде получить теоремы А. В. Кузнецова и С. В. Яблонского. Делать этого не станем. Вместо этого далее рассмотрим более общее соответствие Галуа для $\mathfrak{S}$-замкнутых классов.

4. Соответствие Галуа для $\mathfrak{S}$-замкнутых классов дискретных функций

Обобщим конструкцию соответствия Галуа для клонов на $\mathfrak{S}$-замкнутые классы. Важную роль при этом выполняет понятие сохраняемого 2-предиката, обобщающее классическое понятие сохраняемого предиката.

4.1. Сохраняемые 2-предикаты

Пусть по-прежнему $\mathfrak{S} = (K, L, O, R)$, где K, O — множества и L, R — клоны функций из $P_{E,D}, P_{D,E}$ и P_E, P_D соответственно. Пару (a, b) m-арных предикатов a и b из

Π_E и Π_D соответственно будем называть m-арным 2-*предикатом* на паре множеств E и D. Множество всех таких 2-предикатов обозначается через $\Pi_{E,D}$. Для любого множества A 2-предикатов (a, b) через A^{-1} будем обозначать множество 2-предикатов (b, a).

Введём понятие 2-предиката, сохраняемого функцией из $P_{E,D}$. С этой целью для любой функции $f : E^n \to D$ и любого натурального m определим функцию $f^{[m]} : (E^m)^n \to D^m$ так, что

$$f^{[m]}(Y_1, \ldots, Y_n) = (f(Y^1), \ldots, f(Y^n)),$$

если $Y_1^T, \ldots, Y_n^T$ — столбцы и $Y^1, \ldots, Y^m$ — строки матрицы, составленной из элементов множества E. Будем говорить, что n-местная функция f *сохраняет* m-арный 2-*предикат* (a, b) из $\Pi_{E,D}$, если для любых удовлетворяющих предикату a наборов $Y_1, \ldots, Y_n$ набор $f^{[m]}(Y_1, \ldots, Y_n)$ удовлетворяет предикату b. Введённое понятие сохраняемого 2-предиката обобщает классическое понятие сохраняемого предиката, поскольку эти понятия совпадают при $E = D$ для 2-предиката (a, a) и предиката a.

Множество всех 2-предикатов из $\Pi_{E,D}$, сохраняемых всеми функциями множества X функций из $P_{E,D}$, обозначим через

$$\mathrm{inv}_{E,D}(X),$$

а множество всех функций из $P_{E,D}$, сохраняющих все 2-предикаты множества $Y \subseteq \Pi_{E,D}$, обозначим через

$$\mathrm{pol}_{E,D}(Y).$$

Положим

$$\begin{aligned} \Pi^{\mathfrak{S}}_{E,D} &= \mathrm{inv}_{E,D}(K) \cap (\mathrm{inv}_E(R) \times \mathrm{inv}_D(L)) \cap (\mathrm{inv}_{E,D}(O))^{-1}, \\ \mathrm{inv}^{\mathfrak{S}}_{E,D}(X) &= \mathrm{inv}_{E,D}(X) \cap \Pi^{\mathfrak{S}}_{E,D} \end{aligned}$$

для любого $X \subseteq P_{E,D}$. Множество $\Pi^{\mathfrak{S}}_{E,D}$ совпадает с $\Pi_{E,D}$ при пустых K и O. Множество $\Pi^{\mathfrak{S}}_{E,D}$ состоит из 2-предикатов (a, a) при равных множествах E и D и классах K, L, O, R, совпадающих с S_E.

Несложно понять, что пара отображений $\mathrm{pol}_{E,D}$ и $\mathrm{inv}^{\mathfrak{S}}_{E,D}$ определяют соответствие Галуа между системами $\mathcal{B}(P_E)$ и $\mathcal{B}(\Pi^{\mathfrak{S}}_{E,D})$. Это соответствие при равных E и D и совпадающих с S_E классах K, L, O, R по сути совпадает с классическим замыканием Галуа для клонов, и совпадает с ним не только по сути, но и формально после отождествления 2-предикатов (a, a) с предикатами a. Введённое соответствие заслуживает внимания в связи с изучением $\mathfrak{S}$-замыкания, так как имеет место обобщающая теорему 1 из [7]

Теорема 7. В множестве $P_{E,D}$ $\mathrm{pol}_{E,D}\,\mathrm{inv}^{\mathfrak{S}}_{E,D}$-замкнутыми классами являются $\mathfrak{S}$-замкнутые классы, и только они.

Замечание 4. Идея задания функциональных систем наборами предикатов предложена А. И. Мальцевым в [9]. В дальнейшем она в разных формах использовалась другими авторами, например в [19], где рассматривались алгоритмы, распознающие свойство сохранения 2-предикатов дискретными функциями.

4.2. Проблема выразимости дискретных функций

В множестве $P_{E,D}$ будем рассматривать отношение предпорядка $\leqslant$, которое было определено в п. 2.5, а в множестве $\Pi_{E,D}$ предупорядочение $\leqslant$ определим следующим образом. Для n- и m-арных 2-предикатов (a_1, b_1) и (a_2, b_2) из $\Pi_{E,D}$ неравенство

$$(a_1, b_1) \leqslant (a_2, b_2)$$

означает, что для некоторой функции f с натуральными аргументами и значениями выполняются соотношения

$$a_1(x_1, \ldots, x_n) \equiv a_2(x_{f(1)}, \ldots, x_{f(m)}),\ b_1(y_1, \ldots, y_n) \equiv b_2(y_{f(1)}, \ldots, y_{f(m)}),$$

где переменные x_i и y_i принимают значения в множествах E и D соответственно. Иначе говоря, предикаты a_1 и b_1 получаются из соответствующих предикатов a_2 и b_2 в результате «одинакового» отождествления переменных. Используемые предупорядочения согласованы с замыканиями Галуа и удовлетворяют условию обрыва убывающих цепей. Это позволяет использовать общий метод решения проблемы выразимости множества X в пространстве $P_{E,D}$ с $\mathfrak{S}$-замыканием. Этот метод гарантирует, что система

$$\Lambda(B_X) = \{\mathrm{pol}_{E,D}(b) | b \in B_X\},\ \text{где } B_X = \min(\Pi^{\mathfrak{S}}_{E,D} \setminus \mathrm{inv}_{E,D}(X), \leqslant),$$

является нижней окрестностью множества X. Для конечно-порождаемого X эта нижняя окрестность оказывается конечной, продолжим об этом далее.

4.3. Степень и порядок $\mathfrak{S}$-замкнутого класса

Для конечно-порождаемого X нижняя окрестность $\Lambda(B_X)$ оказывается конечной, поскольку в рассматриваемой ситуации выполняются условия (У4), (У5) и (У6); точнее, верна

Лемма 2. Для любых натуральных n и $m = |E|^n$ и любых подмножеств $X \subseteq P^{(n)}_{E,D}$ и $Y \subseteq \Pi^{(n)}_{E,D}$ имеют место включения

$$\min(\Pi^{\mathfrak{S}}_{E,D} \setminus \mathrm{inv}^{\mathfrak{S}}_{E,D}(X), \leqslant) \subseteq \Pi^{(m)}_{E,D} \quad \text{и} \quad \min(P_{E,D} \setminus \mathrm{pol}_{E,D}(Y), \leqslant) \subseteq P^{(m-1)}_{E,D}.$$

Попутно заметим, что из сказанного следует существование для конечно-порождаемого множества X такого натурального числа m, что нижней окрестностью множества X является система $\Lambda(A)$ при некотором $A \subseteq \Pi^{(m)}_{E,D}$. Наименьшее m с этим свойством станем называть *степенью* конечно-порождаемого множества X (относительно $\mathfrak{S}$-замыкания). Эта величина в некоторой степени характеризует сложность распознавания свойства $X \subseteq [Y]_{\mathfrak{S}}$ у произвольного подмножества $Y \subseteq P_{E,D}$: для распознавания этого свойства достаточно проверить существование функций в Y, не сохраняющих 2-предикаты из A, то есть не сохраняющих некоторые 2-предикаты арности не более m. Наряду с этим, очевидно существование для конечно-порождаемого X натуральной величины n, такой, что

$$[X]_{\mathfrak{S}} = [A]_{\mathfrak{S}}$$

для некоторого $A \subseteq P^{(n)}_{E,D}$. Наименьшее такое n называется *порядком* X (относительно $\mathfrak{S}$-замыкания). Легко получить

Следствие 8. Степень m и порядок n относительно $\mathfrak{S}$-замыкания конечно-порождаемого множества X функций из $P_{E,D}$ связаны соотношениями

$$m \leqslant |E|^n, n \leqslant |E|^m - 1.$$

Позднее будут приведены менее тривиальные соотношения между степенью и порядком для некоторых конечно-порождаемых клонов.

4.4. Нижние и верхние окрестности

Сказанное выше о замыкании Галуа в множествах $P_{E,D}$ и $\Pi^{\mathfrak{S}}_{E,D}$ позволяет применить теорему 6 и получить в качестве её следствий аналоги теорем А. В. Кузнецова и С. В. Яблонского для $\mathfrak{S}$-замкнутых классов. Например, взяв в теореме 6

$$P = P_{E,D},\ T = \Pi^{\mathfrak{S}}_{E,D},\ \alpha = \mathrm{inv}^{\mathfrak{S}}_{E,D},\ \beta = \mathrm{pol}_{E,D},\ B^{\beta} = Q \text{ и } A = \varnothing,$$

получаем обобщённую теорему А. В. Кузнецова в следующей форме: *для $\mathfrak{S}$-замкнутых классов X и Q, таких, что $X \subseteq Q$, равносильны свойства*:

1) *существует конечное подмножество $Z \subseteq X$, такое, что $X = [Z]_{\mathfrak{S}}$*;
2) *множество* $\min(\Pi^{\mathfrak{S}}_{E,D} \setminus inv_{E,D}(X), \leqslant)$ *конечное*;
3) *в пространстве Q с $\mathfrak{S}$-замыканием класс X имеет конечную нижнюю окрестность.*

Если же в теореме 6 взять

$$P = \Pi^{\mathfrak{S}}_{E,D},\ T = P_{E,D},\ \alpha = \mathrm{pol}_{E,D},\ \beta = \mathrm{inv}^{\mathfrak{S}}_{E,D},\ B \subseteq P_{E,D} \text{ и } A^{\alpha} = Q,$$

то получим обобщённую теорему С. В. Яблонского в следующей форме: *для подмножества $B \subseteq P_{E,D}$, набора $\mathfrak{S}' = (K \cup B, L, O, R)$ и $\mathfrak{S}$-замкнутых классов Y и Q, таких, что $B \subseteq Y \subseteq Q$, равносильны свойства*:

1) *существует конечное подмножество $Z \subseteq \Pi^{\mathfrak{S}}_{E,D}$ такое, что $Y = Q \cap \mathrm{pol}_{E,D}(Z)$*;
2) *множество* $\min(Q \setminus Y, \leqslant)$ *конечное*;
3) *в пространстве Q с $\mathfrak{S}'$-замыканием класс Y имеет конечную верхнюю окрестность.*

4.5. Галуа-замкнутые классы 2-предикатов

Представляет теоретический интерес более явное описание Галуа-замкнутых классов 2-предикатов из $\Pi^{\mathfrak{S}}_{E,D}$. Такое описание возможно и будет дано ниже. Для этого определим над 2-предикатами операции конъюнкции и проектирования, а также операции перестановки и отождествления переменных, обобщающие одноимённые операции над предикатами из [7]. Именно, *конъюнкцией* 2-предикатов (a_1, b_1) и (a_2, b_2) назовём 2-предикат (a, b), где a и b — конъюнкции предикатов a_1, a_2 и b_1, b_2 соответственно. *Проекцией* 2-предиката (a, b) по i-й переменной назовём 2-предикат (a', b'), в котором a' и b' — проекции сответствующих предикатов a и b по i-й переменной. Наконец, будем говорить, что 2-предикат (a_1, b_1) получен из 2-предиката (a_2, b_2) *отождествлением и перестановкой переменных*, если имеет место неравенство $(a_1, b_1) \leqslant (a_2, b_2)$; 2-предикат (a, b) назовём 2-*диагональю*, если оба предиката a и b тождественно истинны или ложны, либо оба выражаются одной и той же формулой вида

$$x_i = x_j \wedge \ldots \wedge x_l = x_t;$$

для предикатов a и b эта формула интерпретируется на множествах E и D соответственно. Множество A 2-предикатов из $\Pi^{\mathfrak{S}}_{E,D}$ назовём $\mathfrak{S}$-замкнутым, если оно замкнуто операциями конъюнкции, проектирования, отождествления и перестановки переменных, содержит все 2-диагонали из $\Pi^{\mathfrak{S}}_{E,D}$, а также вместе с любым своим 2-предикатом (a_1, b_1) содержит всякий 2-предикат (a_2, b_2) из $\Pi^{\mathfrak{S}}_{E,D}$ той же арности, скажем n, такой, что

$$a_1(x_1, \ldots, x_n) \Leftarrow a_2(x_1, \ldots, x_n),\ b_1(x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow b_2(x_1, \ldots, x_n).$$

Имеет место

Теорема 8. В множестве $\Pi^{\mathfrak{S}}_{E,D}$ $\mathrm{inv}^{\mathfrak{S}}_{E,D}\,\mathrm{pol}_{E,D}$-замкнутыми классами являются $\mathfrak{S}$-замкнутые классы, и только они.

4.6. Пересечения и объединения наследственных функциональных классов

Известно (например, из [7]), что в множестве P_E пересечение предикатно описываемых замкнутых классов $\mathrm{pol}_E(a)$ и $\mathrm{pol}_E(b)$, где a и b не тождественно ложны, является предикатно описываемым замкнутым классом $\mathrm{pol}_E(a \wedge b)$. Аналогичное свойство можно сформулировать и для 2-предикатно описываемых классов в $P_{E,D}$, причём не только для пересечений, но и для объединений.

Теорема 9. Пусть $a = (a_1, a_2)$ и $b = (b_1, b_2)$ — 2-предикаты из $\Pi_{E,D}$ с выполнимыми компонентами a, b, c и d. Пусть также $c = (a_1 \wedge b_1, a_2 \wedge b_2)$ и $d = (a_1 \wedge b_1, a_2 \vee b_2)$. Тогда

$$\mathrm{pol}_{E,D}(a) \cap \mathrm{pol}_{E,D}(b) = \mathrm{pol}_{E,D}(c),\ \mathrm{pol}_{E,D}(a) \cup \mathrm{pol}_{E,D}(b) = \mathrm{pol}_{E,D}(d).$$

Отметим, что объединение $\mathfrak{S}$-замкнутых классов, в отличие от пересечения, не обязано быть $\mathfrak{S}$-замкнутым.

5. Конечно-порождаемые клоны и интерполяционная теорема К. А. Бейкера и А. Ф. Пиксли

Рассмотрим некоторые опирающиеся на теорему К. А. Бейкера и А. Ф. Пиксли из [20] конструкции конечно-порождаемых клонов. Существенной особенностью этих конструкций является наличие в клонах функций, связанных некоторыми специальными соотношениями. В заключение для функций этих клонов рассмотрим обобщённые id-разложения.

Сходные вопросы изучались и другими авторами. Так, в [21] конечная порождаемость клонов с мажоритарной функцией выводится с использованием теоремы К. А. Бейкера и А. Ф. Пиксли, а в [22] наличие конечного базиса в замкнутых классах булевых функций связывается с существованием разложений специального вида для функций в этих классах. Как обобщение этого, в [23] введены id-разложения.

5.1. Доопределение частичной функции

Рассмотрим вопрос о возможности доопределения частичной функции до функции заданного клона M, а также вопрос о множествах, порождающих класс $\mathrm{inv}_E(M)$ посредством операций конъюнкции, отождествления и перестановки переменных. Как будет видно, эти вопросы близки и имеют отношение к проблеме конечной порождаемости клонов.

Множества предикатов из Π_E, замкнутые операциями конъюнкции, перестановки и отождествления переменных, станем называть *и-классами*. Ясно, что среди и-классов, включающих некоторое множество A предикатов из Π_E, имеется наименьший. Обозначим такой наименьший и-класс через $[A]_\wedge$ и назовёи его и-классом, *порождённым* множеством A. Отметим, что всякий Галуа-замкнутый класс предикатов является и-классом, а значит, и порождается как и-класс некоторым своим подмножеством.

Далее, будем обозначать через P_E^* множество всех функций $f : E^n \to E \cup \{*\}$ при $n = 0, 1, \ldots$, где $*$ — фиксированный элемент, не принадлежащий E. Интерпретируя элемент $*$ как неопределённое значение, всякую такую функцию будем называть (и считать) *частичной функцией*. Множество наборов, на которых она принимает значения из множества E (то есть на которых она не равна $*$), будем называть её *областью определённости*. Говорят, что n-местная *частичная функция f из P_E^* сохраняет m-арный предикат p* из Π_E, если для любых наборов $X_1, \ldots, X_n$, удовлетворяющих предикату p, набор $f^{[m]}(X_1, \dots, X_n)$ удовлетворяет предикату p либо содержит неопределённую компоненту, равную $*$. Частичную функцию g называют *доопределением* частичной функции f, если область определённости функции g включает область определённости функции f и обе функции принимают одинаковые значения на наборах из области определённости функции f. Имеет место

Лемма 3. Пусть M — клон функций из P_E, $A \subseteq \Pi_E$ и $N = \mathrm{inv}_E(M)$. Тогда равносильны свойства:

1) $N \subseteq [A \cup \{=\}]_\wedge$;
2) частичную функцию из P_E^*, сохраняющую все предикаты из A, можно доопределить до некоторой функции из M.

Если в условиях этой леммы $A \subseteq N$, то в первом её пункте выполняется также обратное включение, а во втором пункте — обратное утверждение. Таким образом, имеет место

Следствие 9. В условиях леммы 3 равносильны свойства:

1) $N = [A \cup \{=\}]_\wedge$;
2) частичную функцию f из P_E^* тогда и только тогда можно доопределить до некоторой функции из M, когда f сохраняет все предикаты из A.

Несмотря на то, что лемма 3 и её следствие 9 не используются явно в данной статье, они имеют большое значение для рассматриваемых вопросов. В частности, с их помощью легко доказываются многие, если не все, утверждения этого раздела.

5.2. Интерполяционная теорема и клоны с мажоритарной функцией

При $d \geqslant 2$ функцию $m(x_1, \dots, x_{d+1})$ называют $(d+1)$-местной *мажоритарной* функцией, если при любом $i, 1 \leqslant i \leqslant d+1$, она удовлетворяет тождеству

$$m(x, \dots, x, x_i, x, \dots x) = x,$$

где переменная x_i находится в i-й позиции; в [20] записанное выше тождество образно названо тождеством «слабой анонимности» (near unanimity), а переменная x_i не менее удачно названа «одиноким оппозиционером» (lone dissenter). Например, единственной 3-местной мажоритарной булевой функцией является функция $x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$. Конечная порождаемость клона с мажоритарной функцией хорошо известна. Соответствующее утверждение доказано в [21]. В дальнейшем этот результат будет несколько обобщён.

Клоны с мажоритарной функцией характеризует интерполяционная теорема К. А. Бейкера и А. Ф. Пиксли из [20]. Из неё следует, что *для клона M и множества $N = \mathrm{inv}_E(M)$ равносильны следующие условия*:

1) *клон M содержит $(d+1)$-местную мажоритарную функцию*;
2) *всякий инвариантный для M предикат $p(x_1, \dots, x_n)$ из N, такой, что $n > d$, однозначно определяется всеми своими проекциями*
$$\exists x_{i_1} \dots \exists x_{i_{n-d}} p(x_1, \dots, x_n),$$
где $1 \leqslant i_1 < \dots < i_{n-d} \leqslant n$;
3) *для любого набора эквивалентностей $\theta_1, \dots, \theta_n$ из N, такого, что $n > d$, и любых элементов $a_1, \dots, a_n$ из E сравнения*
$$x \equiv a_i \mod \theta_i, 1 \leqslant i \leqslant n,$$

тогда и только тогда имеют общее решение, когда любые d из этих сравнений имеют общее решение;

4) *частичная функция $f : E^n \to E^*$ тогда и только тогда доопределяется до функции из M, когда ограничение f на любые d или менее наборов из её области определённости доопределяется до функции из M*;
5) *частичная функция $f : E^n \to E^*$ тогда и только тогда доопределяется до функции из M, когда f сохраняет все d-арные предикаты из N.*

Видно, что следствие 9 из п. 5.1 несколько уточняет данную теорему. Используя эти результаты совместно, приходим к следующей теореме.

Теорема 10. Пусть F — клон функций из P_E, $N = \mathrm{inv}_E(F)$ и $d \geqslant 2$. Следующие условия равносильны:

1) $N = [N^{(d)}]_\wedge$;
2) $N \subseteq [\Pi_E^{(d)}]_\wedge$;
3) клон F содержит $(d+1)$-местную мажоритарную функцию;
4) для любого предиката $a(x_1, \dots, x_n)$ из N, такого, что $n > d$, и любого (равносильно некоторого) подмножества $U \subseteq \{1, \dots, n\}$, такого, что $|U| > n$, имеет место тождество
$$a(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigwedge_{i \in U} \exists x_i a(x_1, \dots, x_n). \tag{5}$$

Непосредственно из теоремы получается

Следствие 10. Клон тогда и только тогда содержит $(d+1)$-местную мажоритарную функцию, когда всякий инвариантный для этого клона предикат $a(x_1, \dots, x_n)$ арности $n > d$ можно записать в виде
$$a(x_1, \dots, x_n) \equiv \exists x_1 a(x_1, \dots, x_n) \wedge \dots \wedge \exists x_n a(x_1, \dots, x_n).$$

5.3. d-Клоны

Теорема 10 допускает следующее обобщение.

Теорема 11. Пусть M_1 и M_2 — клоны функций из P_E, $M_1 \subseteq M_2$, $N_1 = \mathrm{inv}_E(M_1)$, $N_2 = \mathrm{inv}_E(M_2)$ и $d \geqslant 1$. Следующие условия равносильны:

1) имеет место включение $N_1 \subseteq [N_2 \cup \Pi_E^{(d)}]_\wedge$;
2) имеет место равенство $N_1 = [N_2 \cup N_1^{(d)}]_\wedge$;
3) для всякой функции $g(x_1, \dots, x_m)$ из M_2 существует такая функция $m_g(x_1, \dots, x_{m+d+1})$ в M_1, что для любого $i, 1 \leqslant i \leqslant d+1$, имеет место тождество
$$m_g(x, g(x), \dots, g(x), x_{m+i}, g(x), \dots, g(x)) = g(x),$$
где $(x) = (x_1, \dots, x_m)$ и переменная x_{m+i} находится в $(m+i)$-й позиции;
4) для любого предиката $a(x_1, \dots, x_n)$ из N арности $n > d$ и любого (равносильно некоторого) подмножества $U \subseteq \{1, \dots, n\}$, такого, что $|U| > d$, найдётся предикат $b(x_1, \dots, x_n)$ в N_2, такой, что
$$a(x_1, \dots, x_n) \equiv b(x_1, \dots, x_n) \wedge \bigwedge_{i \in U} \exists x_i A(x_1, \dots, x_n).$$

В связи с третьим пунктом этой теоремы следует сделать следующее замечание. Фигурирующая в нём функция m_g может зависеть от всех своих $n+d+1$ переменных. Однако композиция, стоящая справа в тождестве третьего пункта, не зависит от переменной x_{m+i}.

Клон M_1 будем называть *d-подклоном* клона M_2 или *d-клоном* в клоне M_2, если выполняются свойства 1–4 теоремы 11 (как следует из теоремы, достаточно выполнения одного из этих свойств). Заметим, что в этом случае $M_1 \subseteq M_2$. Из теоремы 11 получаем

Следствие 11. Пусть M_1 и M_2 — клоны функций из P_E, такие, что $M_1 \subseteq M_2$. Клон M_1 тогда и только тогда является d-клоном в клоне M_2, когда для каждого инвариантного для клона M_1 предиката $a(x_1, \ldots, x_n)$ арности $n > d$ найдётся такой инвариантный для клона M_2 предикат $b(x_1, \ldots, x_n)$ арности n, что

$$a(x_1, \ldots, x_n) \equiv b(x_1, \ldots, x_n) \wedge \exists x_1 a(x_1, \ldots, x_n) \wedge \ldots \wedge \exists x_n a(x_1, \ldots, x_n).$$

Клон, включающий конечно-порождаемый d-подклон, сам конечно-порождаемый. Точнее, имеет место

Теорема 12. Пусть M_1 — d-подклон клона $M_2 \subseteq P_E$. Если клон M_1 конечно-порождаемый, имеет порядок n_1 и степень m_1, то клон M_2 также конечно-порождаемый, его порядок не превосходит $\max\{n_1, |E|^d - 1\}$, а степень не превосходит $\max\{m_1, d\}$.

5.4. Примеры d-клонов

Приведём примеры d-клонов.

Пример 1. При $d \geqslant 2$ клон, содержащий $(d+1)$-местную функцию m, является d-подклоном P_E. Функцию m_g, о которой идёт речь в пункте 3 теоремы 11, можно выбрать так:

$$m_g(x_1, \ldots, x_{n+d+1}) = m(x_{n+1}, \ldots, x_{n+d+1}).$$

Наоборот, всякий d-подклон в P_E содержит мажоритарную функцию. Это легко следует из теорем 10 и 11.

Пример 2. Клон I^d всех булевых функций, удовлетворяющих условию 1^d, также как клон MI^d всех монотонных булевых функций, удовлетворяющих тому же условию, является d-клоном в P_2, поскольку каждый из этих клонов содержит мажоритарную функцию

$$\bigvee_{i=1}^{d+1} (x_1 \cdots x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdots x_{d+1}).$$

Пример 3. Клон MI^d является 2-клоном в клоне I^d. Действительно, для любой булевой функции g определим булеву функцию M_g с тем же числом переменных, принимающую значение 1 на наборе x в том и только том случае, когда функция g принимает значение 1 на некотором наборе $x' \leqslant x$. Несложно понять, что M_g — наименьшая монотонная мажоранта функции g, хотя это и не понадобится. Легко видеть, что функция m_g такая, что

$$m_g(x_1, \ldots, x_{n+3}) = M_g(x_1, \ldots, x_n) \cdot (x_{n+1} \vee x_{n+2})(x_{n+1} \vee x_{n+3})(x_{n+2} \vee x_{n+3}),$$

монотонная и удовлетворяет тождеству пункта 3 теоремы 11, а если функция g удовлетворяет условию 1^d, то и функция m_g удовлетворяет этому условию.

Пример 4. В клоне $I^\infty = \cap_{d=1,2,\ldots} I^d$ булевых функций, удовлетворяющих условию 1^∞, его монотонная часть $MI^\infty = \cap_{d=1,2,\ldots} MI^d$ является 2-клоном. Действительно, для любой функции $g(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющей условию 1^∞, существует такая переменная x_i, что $x_i \leqslant g(x_1, \ldots, x_n)$. Такая переменная называется *специальной*. Тогда можно взять

$$m_g(x_1, \ldots, x_{n+3}) = x_i \cdot (x_{n+1} \vee x_{n+2})(x_{n+1} \vee x_{n+3})(x_{n+2} \vee x_{n+3}).$$

5.5. (c, d) - Клоны

В последнем примере функцию m_g удаётся выбрать зависящей лишь от одной переменной функции g, именно от специальной переменной. А в примере 1 (мажоритарная) функция m_g вовсе не зависит от переменных функции g. Это приводит к следующему обобщению. Для целого неотрицательного числа c и целого положительного числа d клон M_1 станем называть (c, d)-*подклоном клона* M_2, если для этих клонов выполняются свойства 1–4 теоремы 11, причём в свойстве 4 для любой функции $g(x_1, \ldots, x_n)$ функцию m_g можно выбрать зависящей не более чем от c переменных набора $(x_1, \ldots, x_n)$. При этом на зависимость функции m_g от переменных $x_{n+1}, \ldots, x_{n+d+1}$ никаких ограничений не накладывается. Клон, содержащий (c, d)-подклон, будем называть (c, d)-*клоном.* Так, клон, содержащий $(d+1)$-местную мажоритарную функцию, оказывается $(0, d)$-подклоном P_E и $(0, d)$-клоном. Имеет место следующая

Теорема 13. Для любых натуральных c и d, где $d \geqslant 2$, всякий (c, d)-клон конечно-порождаемый. Его порядок не превосходит $\max(|E|^d - 1, c + d + 1)$, а степень не превосходит $\max(|E|^{c+1}, d + 2)$.

Положив в теореме 13 $c = 0$ и заметив, что $|E|^d - 1 \geqslant d + 1$ при $|E|, d \geqslant 2$, получаем известное в части, касающейся конечной порождаемости,

Следствие 12. Клон, содержащий $(d+1)$-местную мажоритарную функцию, конечно-порождаемый. Его порядок не превосходит $|E|^d - 1$, а степень не превосходит $\max(|E|, d + 2)$.

5.6. id - Разложения

Пусть натуральные числа d, n и c удовлетворяют неравенствам $2 \leqslant d \leqslant n$ и $c \leqslant n$. Пусть также для функций f и g из P_E, зависящих от n и $c + \binom{d}{2}$ переменных соответственно, выполняется соотношение

$$f(X) = g(X', f(X_{1,2}), \ldots, f(X_{1,d}), f(X_{2,3}), \ldots, f(X_{2,d}), \ldots, f(X_{d-1,d})), \qquad (6)$$

где $(X) = (x_1, \ldots, x_n)$, $X_{i,j} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ и $(X') = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_c})$ для некоторых чисел $i_1, \ldots, i_c$, таких, что $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_c \leqslant n$. В этой ситуации соотношение 6 будем называть (c, d)-разложением функции f по функции g. Пополнив натуральный ряд $\boldsymbol{N}$ символом ∞, большим всех натуральных чисел, для любых c и d из расширенного натурального ряда $\boldsymbol{N} \cup \{\infty\}$ сделаем следующее определение. Скажем, что клон M_2 (c, d)-разлагается над клоном M_1, если всякая функция клона M_2 (c, d)-разлагается по некоторой функции из клона M_1. При этом для заданного c наименьшее d, при котором это возможно, станем называть *степенью* клона M_2 над клоном M_1 и обозначать $[M_2//M_1]_c$. Легко понять, хотя это и не понадобится, что

$$\min(M_2 \setminus M_1, \leqslant) \subseteq M_2^{(d)},$$

если для некоторого, возможно бесконечного, c и некоторого натурального d верно: $M_1 \subseteq M_2$ и $[M_2//M_1]_c = d$. Имеет место

Теорема 14. Для любого c из $\boldsymbol{N} \cup \{\infty\}$ и любого натурального $d \geqslant 2$ верно следующее: если клон M_1 является (c, d)-подклоном клона M_2, то

$$[M_2//M_1]_c \leqslant |E|^d + 1.$$

В этой теореме под (∞, d)-подклоном понимается d-подклон.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Курош А. Г.* Лекции по общей алгебре: Учебник. СПб.: Лань, 2005.
2. *Кон П.* Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968.
3. *Birkhoff G., Frink O.* Representations of lattices by sets // Transactions on American Mathematical Society. 1948. V. 64. P. 299–316.
4. *Кузнецов А. В.* Структуры с замыканием и критерии функциональной полноты // Успехи матем. наук. 1961. Т. XVI. № 2 (98). С. 201–202.
5. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.
6. *Яблонский С. В.* Функциональные построения в k-значной логике// Труды математического института им. Стеклова. 1958. Т. 51. С. 5–142.
7. *Боднарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А.* Теория Галуа для алгебр Поста // Кибернетика. 1969. № 3. С. 1–10; № 5. С. 1–9.
8. *Яблонский С. В.* О строении верхней окрестности для предикатно-описуемых классов в P_k // Докл. АН СССР. 1974. Т. 218. № 2. С. 304–307.
9. *Мальцев А. И.* Итеративные алгебры Поста. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1976.
10. *Мальцев А. И.* Итеративные алгебры и многообразия Поста // Алгебра и логика. 1966. Т. 5. № 2. С. 5–24.
11. *Парватов Н. Г.* Замечания о конечной порождаемости замкнутых классов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2004. Т. 11. № 3. С. 32–47.
12. *Парватов Н. Г.* Наследственные системы дискретных функций // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2007. Т. 14. № 2. С. 76–91.
13. *Парватов Н. Г.* О некоторых свойствах операции замыкания, связанных с проблемами выразимости // Вестник Томского госуниверситета. 2008. № 3(4). С. 119–124.
14. *Дистель Р.* Теория графов. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002.
15. *Риге Ж.* Бинарные отношения, замыкания, соответствия Галуа // Кибернетический сборник. М.: ИЛ, 1963. Вып. 7. С. 129–185.
16. *Яблонский С. В.* О невозможности элиминации перебора всех функций из P_2 при решении некоторых задач теории схем // ДАН СССР. 1959. Т. 124. № 1. С. 44–47.
17. *Лупанов О. Б.* О синтезе некоторых классов управляющих систем // Проблемы кибернетики. 1963. Вып. 10. С. 61–80.
18. *Wegener I.* The complexity of Boolean functions. Wiley-Teubner, 1987. 458 p.
19. *Алексеев В. Б.* От метода Карацубы для быстрого умножения чисел к быстрым алгоритмам для дискретных функций // Аналитическая теория чисел и её приложения. М.: Наука, 1997. С. 20–27. (Труды МИАМ. Т. 218.)
20. *Baker K. A., Pixly A. F.* Polynomial interpolation and Chinese remainder theorem for algebraic systems // Math. Zeiteschr. 1975. Bd. 143. No. 2. S. 165–174.
21. *Марченков С. С.* К существованию конечных базисов в замкнутых классах булевых функций // Алгебра и логика. 1984. Т. 23. № 1. С. 88–99.
22. *Гаврилов Г. П.* Индуктивные представления булевых функций и конечная порождаемость классов Поста // Алгебра и логика. 1984. Т. 23. № 1. С.3–26.
23. *Марченков С. С.* О равномерном *id*-разложении булевых функций // Дискретная математика. 1990. Т. 2. Вып. 3. С. 29–41.