ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИКЛАДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

DOI 10.17223/20710410/14/1

УДК 519.7

КОНСТРУКЦИЯ МАКСИМАЛЬНОГО КЛОНА ТОЧЕЧНЫХ ФУНКЦИЙ НА ПОЛУРЕШЁТКЕ ИНТЕРВАЛОВ

Н. Г. Парватов

Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия

E-mail: parvatov@mail.tsu.ru

В связи с задачей описания клонов точечных и минимальных точечных функций на верхней полурешётке предлагается конструкция максимальных по включению таких клонов на полурешётке интервалов решётки.

Ключевые слова: *клон, верхняя полурешётка, полурешётка интервалов, решётка интервалов, точечная функция, минимальная точечная функция.*

1. Формулировка результата

Пусть множество L, упорядоченное отношением $\leqslant$, является верхней полурешёткой, но не решёткой [1, 2]. Это означает, что в множестве L для любых двух элементов a и b имеется точная верхняя грань $a + b$, а точной нижней грани $a \cdot b$ может не существовать. Полурешётка называется *точечной*, если всякий её элемент является суммой некоторых минимальных элементов полурешётки.

Основным объектом изучения являются функции $f : L^n \to L$ при $n = 1, 2, \ldots$, множество которых обозначается через P_L. Функция f из P_L, зависящая от n переменных, называется *монотонной*, если она сохраняет упорядочение $\leqslant$, то есть если для любых наборов a и b из L^n выполняется импликация

$$a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b),$$

где наборы в L^n сравниваются покомпонентно. Функция f называется *точечной*, если для любого набора a из L^n выполняется равенство

$$f(a) = \sum_{x} f(x).$$

Здесь суммирование выполняется в полурешётке L по всем (для монотонной функции f достаточно — по некоторым) наборам x из L_0^n, таким, что $x \leqslant a$, где L_0 — множество минимальных элементов полурешётки L. Точечная функция, очевидно, монотонна. Точечная функция, сохраняющая множество L_0, называется *минимальной точечной*. Как видно, точечная функция $f : L^n \to L$ однозначно определяется своим ограничением $f' : L_0^n \to L$. Принято называть f точечным расширением функции f' и обе эти функции обозначать одинаково.

Классы всех точечных и минимальных точечных функций обозначаются через T_L и $\min T_L$ соответственно. Эти классы вместе с некоторыми другими классами полурешёточных функций введены в [3] для описания асинхронных управляющих систем, обладающих заданным динамическим поведением, то есть отвечающих заданными изменениями выходных состояний на заданные изменения входных. Основные классы функций на полурешётке изучались в [4 – 7]], в том числе в [6, 7] рассматривались проблемы полноты. В работе [4] сформулирована задача описания клонов (замкнутых классов с селекторами) в множествах точечных и минимальных точечных функций, показано, что всякий клон точечных (минимальных точечных) функций можно расширить до некоторого максимального по включению такого клона и множество последних конечно. В данной работе построены примеры максимальных таких клонов на полурешётке интервалов, введённой впервые в [4] и определяемой ниже.

Пусть множество E является решёткой с упорядочением $\preccurlyeq$ и операциями $\vee$ и $\wedge$ для взятия точных верхних и нижних граней [1, 2]. Интервалом решётки E будем называть пару $[a,b]$ её элементов a и b, таких, что $a \preccurlyeq b$. Интервал $[a,a]$ будем отождествлять с элементом a. Обозначим через $\mathrm{in}(E,\preccurlyeq)$ множество всех интервалов и определим для них упорядочение $\preccurlyeq$ и операции $\vee$ и $\wedge$ покомпонентно:

$$[a,b] \preccurlyeq [c,d] \Leftrightarrow (a \preccurlyeq c \;\&\; b \preccurlyeq d),\;\; [a,b] \vee [c,d] = [a \vee c, b \vee d],\;\; [a,b] \wedge [c,d] = [a \wedge c, b \wedge d],$$

где a,b,c,d — элементы из E, такие, что $a \preccurlyeq b$ и $c \preccurlyeq d$. Множество $\mathrm{in}(E,\preccurlyeq)$ становится таким образом решёткой. Оно является также верхней полурешёткой с упорядочением $\leqslant$, операцией $+$ для взятия точной верхней грани и частичной операцией $\cdot$ для взятия точной нижней грани, определёнными так:

$$[a,b] \leqslant [c,d] \Leftrightarrow (a \preccurlyeq c \;\&\; d \preccurlyeq b),\;\; [a,b] + [c,d] = [a \wedge c, b \vee d],\;\; [a,b] \cdot [c,d] = [a \vee c, b \wedge d],$$

где a,b,c,d — элементы из E, такие, что $a \preccurlyeq b$ и $c \preccurlyeq d$, а также $a \vee c \preccurlyeq b \wedge d$ в последнем случае. Построенные алгебраические системы $(L,\preccurlyeq)$ и $(L,\leqslant)$, где $L = \mathrm{in}(E,\preccurlyeq)$, называются соответственно *решёткой* и *полурешёткой интервалов решётки* $(E,\preccurlyeq)$.

Пусть Π_L — множество всех предикатов $p : L^n \to \{\text{И}, \text{Л}\}$ при $n = 1,2,\ldots$ Для любого множества или набора Y предикатов из Π_L будем обозначать через $\mathrm{pol}_L(Y)$ клон всех функций из P_L, сохраняющих все предикаты из Y. Имеет место

Теорема 1. Пусть $(L,\preccurlyeq)$ — решётка и $(L,\leqslant)$ — полурешётка интервалов решётки $(E,\preccurlyeq)$. Клоны $\mathrm{pol}_L(\preccurlyeq,\leqslant)$ и $\mathrm{pol}_L(\preccurlyeq,\leqslant,E)$ являются максимальными по включению среди клонов, являющихся подмножествами классов T_L и $\min T_L$ соответственно.

Доказательству теоремы 1 предпошлём несколько вспомогательных утверждений — лемму 1 и следствия 1 и 2.

2. Вспомогательные утверждения

В соответствии со сказанным множество $L = \mathrm{in}(E,\preccurlyeq)$ интервалов решётки $(E,\preccurlyeq)$ будем рассматривать как полурешётку с упорядочением $\leqslant$ и одновременно как решётку с упорядочением $\preccurlyeq$. Для любого интервала $a = [a_1,a_2]$ из L положим $\mathrm{l}\,a = a_1$ и $\mathrm{r}\,a = a_2$. Положим также $\mathrm{l}\,a = (\mathrm{l}\,a_1,\ldots,\mathrm{l}\,a_n)$ и $\mathrm{r}\,a = (\mathrm{r}\,a_1,\ldots,\mathrm{r}\,a_n)$ для любого набора $a = (a_1,\ldots,a_n)$ из множества L^n, которое, таким образом, можно рассматривать как решётку и полурешётку интервалов решётки E^n. Отметим, что в L^n неравенство $a \leqslant b$ равносильно паре соотношений $\mathrm{l}\,b \preccurlyeq \mathrm{l}\,a$ и $\mathrm{r}\,a \preccurlyeq \mathrm{r}\,b$, а неравенство $a \preccurlyeq b$ — паре $\mathrm{l}\,a \preccurlyeq \mathrm{l}\,b$ и $\mathrm{r}\,a \preccurlyeq \mathrm{r}\,b$. Множество E^n является множеством минимальных элементов полурешётки L^n (упорядоченной отношением $\leqslant$). При этом каждый набор a из L^n представи́м суммой $a = \mathrm{l}\,a + \mathrm{r}\,a$ наборов $\mathrm{l}\,x$ и $\mathrm{l}\,y$ из E^n. В частности, полурешётка L^n точечная.

Лемма 1. Пусть $(L,\preccurlyeq)$ — решётка, $(L,\leqslant)$ — полурешётка интервалов решётки $(E,\preccurlyeq)$ и g — функция из P_L от n переменных.

1. Если функция g принадлежит клону $\mathrm{pol}_L(\preccurlyeq, \leqslant)$, то в множестве P_E найдутся функции g_l и g_r от n переменных, такие, что

1) функции g_l и g_r принадлежат клону $\mathrm{pol}_E(\preccurlyeq)$;
2) $g_\mathrm{l}(x) \preccurlyeq g_\mathrm{r}(x)$ для всех x из E^n;
3) $g(x) = g_\mathrm{l}(\mathrm{l}\,x) + g_\mathrm{r}(\mathrm{r}\,x)$ для всех x из L^n;
4) $g_\mathrm{l}(\mathrm{l}\,x) = \mathrm{l}\,g(x) = \mathrm{l}\,g(\mathrm{l}\,x)$ и $g_\mathrm{r}(\mathrm{r}\,x) = \mathrm{r}\,g(x) = \mathrm{r}\,g(\mathrm{r}\,x)$ для любого набора x из L^n (в частности, функции g_l и g_r однозначно определяются функцией g).

2. Обратно, если для функций g_l и g_r из P_E от n переменных выполняются условия 1–3, то для них выполняется и условие 4 и функция g принадлежит клону $\mathrm{pol}(\preccurlyeq, \leqslant)$.

3. Функция g из клона $\mathrm{pol}(\preccurlyeq, \leqslant)$ принадлежит клону $\mathrm{pol}_L(\preccurlyeq, \leqslant, E)$ тогда и только тогда, когда функции g_l и g_r, определённые условиями 1–3, совпадают.

Доказательство. Докажем первое утверждение леммы. Пусть функция g принадлежит клону $\mathrm{pol}_L(\preccurlyeq, \leqslant)$. Тогда для любого набора x из множества L^n выполняются неравенства $\mathrm{l}\,x \preccurlyeq x \preccurlyeq \mathrm{r}\,x$, а в силу монотонности функции g относительно упорядочения $\preccurlyeq$ выполняются также неравенства $g(\mathrm{l}\,x) \preccurlyeq g(x) \preccurlyeq g(\mathrm{r}\,x)$, из которых следует, что $g(x) \leqslant g(\mathrm{l}\,x) + g(\mathrm{r}\,x)$. Из монотонности функций g и $+$ относительно упорядочения $\leqslant$ следует обратное неравенство (поскольку $\mathrm{l}\,x \leqslant x$ и $\mathrm{r}\,x \leqslant x$) и тогда

$$g(x) = g(\mathrm{l}\,x) + g(\mathrm{r}\,x).$$

Отсюда, учитывая неравенство $g(\mathrm{l}\,x) \preccurlyeq g(\mathrm{r}\,x)$, получаем

$$\mathrm{l}\,g(\mathrm{l}\,x) = \mathrm{l}\,g(x) \preccurlyeq \mathrm{r}\,g(x) = \mathrm{r}\,g(\mathrm{r}\,x).$$

Из доказанного видно, что функции g_l и g_r корректно определены четвёртым условием леммы, принадлежат клону P_E и для них выполняются второе и третье условия. Поскольку первое условие легко следует из монотонности функции g относительно упорядочения $\preccurlyeq$, первое утверждение леммы доказано.

Докажем второе утверждение. Из первых двух условий следует, что для любого набора x из L^n

$$g_\mathrm{l}(\mathrm{l}\,x) \preccurlyeq g_\mathrm{l}(\mathrm{r}\,x) \preccurlyeq g_\mathrm{r}(\mathrm{r}\,x),$$

тогда из третьего условия

$$\mathrm{l}\,g(x) = g_\mathrm{l}(\mathrm{l}\,x) \quad \text{и} \quad \mathrm{r}\,g(x) = g_\mathrm{r}(\mathrm{r}\,x),$$

и, подставляя $\mathrm{l}\,x$ и $\mathrm{r}\,x$ вместо x, получаем

$$\mathrm{l}\,g(\mathrm{l}\,x) = g_\mathrm{l}(\mathrm{l}\,x) \quad \text{и} \quad \mathrm{r}\,g(\mathrm{r}\,x) = g_\mathrm{r}(\mathrm{r}\,x);$$

тем самым установлено четвёртое условие. Монотонность функции g относительно упорядочения $\preccurlyeq$ проверяется непосредственно: для любых наборов x и y из L^n, таких, что $x \preccurlyeq y$, выполняется $\mathrm{l}\,x \preccurlyeq \mathrm{l}\,y$ и $\mathrm{r}\,x \preccurlyeq \mathrm{r}\,y$, откуда с использованием первого и четвёртого условий получаем

$$\mathrm{l}\,g(x) = g_\mathrm{l}(\mathrm{l}\,x) \preccurlyeq g_\mathrm{l}(\mathrm{l}\,y) = \mathrm{l}\,g(y) \quad \text{и} \quad \mathrm{r}\,g(x) = g_\mathrm{r}(\mathrm{r}\,x) \preccurlyeq g_\mathrm{r}(\mathrm{r}\,y) = \mathrm{r}\,g(y).$$

Таким образом, $g(x) \preccurlyeq g(y)$ и функция g монотонна относительно упорядочения $\preccurlyeq$. Монотонность относительно упорядочения $\leqslant$ устанавливается тем же способом с учётом того, что неравенство $x \leqslant y$ равносильно паре соотношений $\mathrm{l}\,y \preccurlyeq \mathrm{l}\,x$ и $\mathrm{r}\,x \preccurlyeq \mathrm{r}\,y$.

Докажем третье утверждение леммы. Для этого заметим, что в силу доказанного всякая функция g, принадлежащая клону $\mathrm{pol}_L(\preccurlyeq, \leqslant)$, точечная, поскольку $g(x) = g(\mathrm{l}\,x) + g(\mathrm{r}\,x)$. Более того, она является точечным расширением функции $g_{\mathrm{l}} + g_{\mathrm{r}}$ (где функции g_{l} и g_{r} определяются условием 4). Это следует из условия 3, в силу которого $g(x) = g_{\mathrm{l}}(x) + g_{\mathrm{r}}(x) = (g_{\mathrm{l}} + g_{\mathrm{r}})(x)$ для любого набора x из множества E^n минимальных элементов полурешётки L^n. Функция g является минимальной точечной, т. е. принадлежит клону $\mathrm{pol}_E(\preccurlyeq, \leqslant, E)$, в том и только в том случае, когда функция $g_{\mathrm{l}} + g_{\mathrm{r}}$ принадлежит множеству P_E, т. е. принимает значения в множестве E при любых значениях переменных. Это равносильно тому, что функции g_{l} и g_{r} совпадают. ■

Следствие 1. Пусть $(L, \preccurlyeq)$ — решётка и $(L, \leqslant)$ — полурешётка интервалов решётки $(E, \preccurlyeq)$. Клон $\mathrm{pol}_L(\preccurlyeq, \leqslant)$ состоит из всевозможных сумм функций из $\mathrm{pol}_L(\preccurlyeq, \leqslant, E)$ с одинаковым числом переменных. В частности, для любого натурального числа n множество n-местных функций клона $\mathrm{pol}_L(\preccurlyeq, \leqslant)$ замкнуто сложением и является точечной полурешёткой с упорядочением $\leqslant$.

Доказательство. В соответствии с леммой 1 функция g из клона $\mathrm{pol}_L(\preccurlyeq, \leqslant)$ есть точечное расширение суммы $g_{\mathrm{l}} + g_{\mathrm{r}}$ функций g_{l} и g_{r} из P_E и тогда в силу коммутативности сложения является суммой точечных расширений этих функций. Но точечные расширения этих функций являются минимальными точечными функциями из клона $\mathrm{pol}_L(\preccurlyeq, \leqslant, E)$ в силу той же леммы. Первое утверждение следствия доказано. Второе следует из доказанного. ■

Далее через $\mathrm{pol}_{L,E}(\preccurlyeq)$ обозначается множество всех функций $f : E^n \to L$ при $n = 1, 2, \ldots$, сохраняющих упорядочение $\preccurlyeq$.

Следствие 2. Пусть $(L, \preccurlyeq)$ — решётка и $(L, \leqslant)$ — полурешётка интервалов решётки $(E, \preccurlyeq)$. Тогда клон $\mathrm{pol}(\preccurlyeq, \leqslant)$ состоит из всевозможных точечных расширений функций из класса $\mathrm{pol}_{L,E}(\preccurlyeq)$, а клон $\mathrm{pol}_E(\preccurlyeq, \leqslant, E)$ — из всевозможных точечных расширений функций из клона $\mathrm{pol}_E(\preccurlyeq)$.

Доказательство. В силу леммы 1 функция g из клона $\mathrm{pol}_L(\preccurlyeq, \leqslant)$ является точечным расширением суммы $g_{\mathrm{l}} + g_{\mathrm{r}}$ функций g_{l} и g_{r} из P_E, причём указанная сумма монотонна относительно упорядочения $\preccurlyeq$ вслед за функциями $g_{\mathrm{l}}, +, g_{\mathrm{r}}$, то есть принадлежит классу $\mathrm{pol}_{L,E}(\preccurlyeq)$. Для (минимальной точечной) функции g из клона $\mathrm{pol}_L(\preccurlyeq, \leqslant, E)$ функции g_{l} и g_{r} совпадают между собой и с их суммой, а потому сама функция g является точечным расширение функции $g_{\mathrm{l}} + g_{\mathrm{r}} = g_{\mathrm{l}} = g_{\mathrm{r}}$ из клона $\mathrm{pol}_E(\preccurlyeq)$.

Обратно, всякую функцию G из множества $\mathrm{pol}_{L,E}(\preccurlyeq)$ можно представить в виде суммы $G = g_{\mathrm{l}} + g_{\mathrm{r}}$ двух функций $g_{\mathrm{l}} = \mathrm{l}\,G$ и $g_{\mathrm{r}} = \mathrm{r}\,G$, таких, что $g_{\mathrm{l}} \preccurlyeq g_{\mathrm{r}}$, монотонных относительно упорядочения $\preccurlyeq$ вслед за G, что проверяется непосредственно, и совпадающих в случае функции G, принадлежащей клону $\mathrm{pol}_E(\preccurlyeq)$. Тогда функция g, определённая в соответствии с третьим условием из леммы 1, принадлежит клону $\mathrm{pol}_L(\preccurlyeq, \leqslant)$ и является точечным расширением функции G. Взяв функцию G из клона $\mathrm{pol}_E(\preccurlyeq)$, получим совпадающие функции g_{l} и g_{r} из $\mathrm{pol}_E(\preccurlyeq)$, точечным расширением которых является функция g. ■

3. Доказательство теоремы 1

Максимальность клона $\mathrm{pol}_L(\preccurlyeq, \leqslant, E)$ следует из того, что клон $\mathrm{pol}_E(\preccurlyeq)$ — предполный в P_E и минимальная точечная функция из $\min T_L$ однозначно определяется своим ограничением из P_E. Приведём, однако, более общее рассуждение, охватывающее оба случая, присутствующих в формулировке теоремы.

Пусть K — клон $\mathrm{pol}_L(\preccurlyeq, \leqslant)$ (или $\mathrm{pol}_L(\preccurlyeq, \leqslant, E)$) и его удаётся расширить до клона $K' \subseteq T_L$ (соответственно до клона $K' \subseteq \min T_L$), содержащего немонотонную относительно упорядочения $\preccurlyeq$ функцию f из T_L, зависящую от n переменных. Для доказательства нужно получить противоречие.

Заметим, что немонотонную относительно упорядочения $\preccurlyeq$ функцию в клоне K' можно выбрать от одной переменной. Действительно, в рассматриваемой ситуации упорядочение $\preccurlyeq$ нарушается функцией f на паре наборов A и B из L^n, для которых выполняется неравенство $A \preccurlyeq B$, в отличие от неравенства $f(A) \preccurlyeq f(B)$. Такие наборы A и B можно выбрать уже в множестве E^n (в противном случае функция f является точечным расширением монотонной относительно упорядочения $\preccurlyeq$ функции из $\mathrm{pol}_{L,E}(\preccurlyeq)$, и тогда она сама сохраняет это упорядочение по следствию 2 вопреки её выбору). Более того, эти наборы можно выбрать отличающимися одной компонентой так, что $A = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ и $B = (a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ для некоторых элементов $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$ и a, b из E. Тогда немонотонной относительно упорядочения $\preccurlyeq$ является одноместная функция $s(x) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$, принадлежащая клону K' (вслед за функцией f и подставленными в неё константами $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$ из E). Монотонность функции s нарушается на элементах a и b из E, для которых выполняется неравенство $a \preccurlyeq b$ и не выполняется неравенство $s(a) \preccurlyeq s(b)$. Элементы a и b можно выбрать соседними в решётке E так, что в ней не существует элемента c со свойством $a \prec c \prec b$. Для дальнейшего важно, что такой выбор элементов a и b гарантирует отсутствие отличного от них элемента c в множестве E со свойством $c \leqslant a + b$. Невыполнение неравенства $s(a) \preccurlyeq s(b)$ означает, что не выполняется некоторое из неравенств

$$\mathrm{l}\, s(a) \preccurlyeq \mathrm{l}\, s(b) \quad \text{или} \quad \mathrm{r}\, s(a) \preccurlyeq \mathrm{r}\, s(b). \tag{1}$$

Пусть это будет первое. Обозначим через 0 и 1 соответственно наименьший и наибольший элементы решётки $(E, \preccurlyeq)$. Рассмотрим одноместные минимальные точечные функции t_1 и t_2 из $\min T_L$, принимающие значения 0 и 1 на элементах из E в соответствии со следующими условиями: $t_1(x) = 1$, если $b \preccurlyeq x$; $t_2(x) = 1$, если $\mathrm{l}\, s(a) \preccurlyeq x$. По следствию 2 функции t_1 и t_2 принадлежат клону $\mathrm{pol}_L(\preccurlyeq, \leqslant, E)$ и тогда клону K'. Рассмотрим функцию $g(x) = t_1(x) \vee t_2(s(x))$ из K'. Заметим, что $g(a) = g(b) = 1$, так как $t_2(s(a)) = 1$ и $t_1(b) = 1$. Вместе с тем

$$g(a + b) = [0, 1] \neq 1 = g(a) + g(b),$$

так как $t_1(a+b) = [0,1]$ и $t_2(s(a+b)) \geqslant t_2(s(a)) + t_2(s(b)) = 0 + 1 = [0,1]$. Таким образом, функция g не точечная. Получено противоречие.

Случай, когда не выполняется второе неравенство в (1), рассматривается аналогично. Теорема доказана.

4. Замечание

В работе [4] автора допущены следующие неточности: на с. 33 в выделенной формуле должно быть $\perp K = \perp \max(K, \leqslant)$ (то есть max вместо min); в следствии 5 условие $f^{-1}(0) = \perp f^{-1}(1)$ следует пополнить требованием $f^{-1}(1) \neq \varnothing$ и в теореме 10 второе условие — требованием $B^* \subseteq f^{-1}(1) \cup f^{-1}(\top)$, означающим, что функция x^B не принимает значения $\top$, когда функция f принимает значение 0.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Биркгоф Г.* Теория решёток. М.: Наука, 1984. 568 с.
2. *Курош А. Г.* Лекции по общей алгебре. М.: Наука, 1973. 400 с.
3. *Агибалов Г. П.* Дискретные автоматы на полурешётках. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1993. 227 с.
4. *Парватов Н. Г.* Точечные и сильно точечные функции на полурешётке // Прикладная дискретная математика. 2010. № 3. С. 22–40.
5. *Парватов Н. Г.* Об инвариантах некоторых классов квазимонотонных функций на полурешётке // Прикладная дискретная математика. 2009. № 4. С. 21–28.
6. *Парватов Н. Г.* Функциональная полнота в замкнутых классах квазимонотонных и монотонных трёхзначных функций на полурешётке // Дискрет. анализ и исслед. опер. Сер. 1. 2003. Т. 10. № 1. С. 61–78.
7. *Парватов Н. Г.* Теорема о функциональной полноте в классе квазимонотонных функций на конечной полурешётке // Дискрет. анализ и исслед. опер. Сер. 1. 2006. Т. 13. № 3. С. 62–82.