УДК 515.12

В.Р. Лазарев

О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ГОМЕОМОРФИЗМАХ ПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Введены понятия полиномиального гомеоморфизма пространств непрерывных функций и p-эквивалентности топологических пространств. Показано, что в классе пространств со счетной базой отношение p-эквивалентности сохраняет размерность dim.

В настоящей статье рассматриваются только вполне регулярные топологические T_1-пространства (иначе говоря – тихоновские пространства), поэтому в дальнейшем они называются просто пространствами.

Для каждого пространства X через $C_p(X)$ будем обозначать пространство непрерывных вещественнозначных функций на X, наделённое топологией поточечной сходимости. В пространстве $C_p(C_p(X))$ мы выделяем подпространство $C_p^0C_p(X)$, состоящее из непрерывных функций f, обращающихся в ноль на нулевом элементе O_X пространства $C_p(X)$. Элементы пространства $C_p^0C_p(X)$ мы называем функционалами. Введём в рассмотрение специальный вид функционалов.

Определение 1. Пусть $\overline{x} \in X^n$ – упорядоченный набор $(x_1,\ldots, x_n)$ точек пространства X, $\alpha = (\alpha_1,\ldots, \alpha_n)$ – мультииндекс. Обозначим через $\overline{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}$ функционал, заданный правилом $\overline{x}^\alpha(\varphi) = \varphi(x_1)^{\alpha_1} \cdot\ldots\cdot \varphi(x_n)^{\alpha_n}$, где $\varphi\in C_p(X)$. Полиномами будем называть функционалы вида

$$p = \sum_{k=1}^{m}\sum\left\{b_\alpha \cdot \overline{x}^\alpha; |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = k\right\} \text{ (все } b_\alpha\in\mathbf{R}\setminus\{0\}).$$

При этом множество $\{x_1,\ldots, x_n\}$ будем называть носителем полинома p и обозначать через $K(p)$.

Ясно, что все полиномы суть элементы пространства $C_p^0C_p(X)$, так как, по данному определению, в них отсутствуют члены нулевой степени. Для некоторого пространства X множество всевозможных полиномов обозначим через $M_p(X)$. Итак, $M_p(X) \subset C_p^0C_p(X)$. Понятно также, что при $m = 1$ мы получаем обычные линейные непрерывные функционалы (см. [1. С. 25]), так что $L_p(X) \subset M_p(X)$. Множество $M_p(X)$ не замкнуто ни относительно сложения, ни относительно умножения в $C_p^0C_p(X)$. Действительно, разность полиномов $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ и $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$, равная $2x_1x_2$, уже не принадлежит $M_p(X)$, так как здесь $m = 2$, но коэффициенты при x_1^2 и x_2^2 равны нулю в противоречие с определением. То же можно сказать о произведении элементов x_1, x_2 из $M_p(X)$. Лишь операция умножения на скаляр не выводит за пределы $M_p(X)$. В [2] доказано, что $M_p(X)$ есть всюду плотное подмножество в $C_p^0C_p(X)$. Очевидна следующая

Лемма 1. Если $f \in M_p(X)$, $\varphi \in C_p(X)$ и $\varphi(x) = 0$ при всех $x \in K(f)$, то $f(\varphi) = 0$.

В дальнейшем мы отождествляем точки x пространства X с функционалами вычисления x' из $C_p^0 C_p(X)$, $x'(\varphi) = \varphi(x)$. Такие функционалы обозначаем просто буквой x: $x(\varphi) = \varphi(x)$, где $\varphi \in C_p(X)$.

Рассмотрим теперь пространства X, Y, для которых существует гомеоморфизм h: $C_p(X) \to C_p(Y)$. Не теряя общности, можно считать, что $h(O_X) = O_Y$, и поэтому h порождает сопряженный гомеоморфизм $h^* : C_p^0 C_p(Y) \to C_p^0 C_p(X)$, $h^*(f) = f \circ h$. Будем обозначать $h^*(y)$ через y^*, а $h^{*-1}(x)$ через x^*. Напомним, что такие пространства X, Y называются t-эквивалентными, это записывается как $X \overset{t}{\sim} Y$. Если же h линеен (соответственно равномерно непрерывен вместе с h^{-1}), то X, Y называются l-эквивалентными (это записывается как $X \overset{l}{\sim} Y$) (соответственно u-эквивалентными, $X \overset{u}{\sim} Y$).

Определение 2. Гомеоморфизм h: $C_p(X) \to C_p(Y)$ назовем полиномиальным, а пространства X и Y – p-эквивалентными (пишем $X \overset{p}{\sim} Y$), если $y^* \in M_p(X)$, а $x^* \in M_p(Y)$ при всех x из X, y из Y.

Замечание. Из вышеизложенного следует, что $X \overset{l}{\sim} Y \Rightarrow X \overset{p}{\sim} Y \Rightarrow X \overset{t}{\sim} Y$, однако неизвестна связь между p- и u-эквивалентностью.

Следующий элементарный пример показывает, что полиномиальные гомеоморфизмы существуют и, за исключением тривиальных случаев, не являются равномерными. Однако автору не известно, могут ли пространства X, Y быть p-эквивалентными, не являясь при этом u- и даже l-эквивалентными.

Пример. Пусть $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$ – дискретные двоеточия. Стало быть, $C_p(X) = C_p(Y) = \mathbf{R}^2$. Определим отображение h: $C_p(X) \to C_p(Y)$ правилом $h(\varphi)(y_1) = \varphi^3(x_1) - \varphi(x_2)$, $h(\varphi)(y_2) = \varphi(x_1)$. Тогда формулы $h^{-1}(\psi)(x_1) = \psi(y_2)$, $h^{-1}(\psi)(x_2) = \psi^3(y_2) - \psi(y_1)$, как легко видеть, определяют обратное к h отображение. Значит, h взаимно однозначно и, очевидно, непрерывно вместе с h^{-1}. Далее,

$$h^*(y_1)(\varphi) = y_1^*(\varphi) = y_1(h(\varphi)) = h(\varphi)(y_1) =$$
$$= \varphi^3(x_1) - \varphi(x_2) = x_1^3(\varphi) - x_2(\varphi),$$

откуда $y_1^* = x_1^3 - x_2$. Аналогично,

$$h^*(y_2)(\varphi) = y_2^*(\varphi) = y_2(h(\varphi)) = h(\varphi)(y_2) = \varphi(x_1) = x_1(\varphi),$$

откуда $y_2^* = x_1$.

Таким же образом

$$h^{*-1}(x_1)(\psi) = x_1^*(\psi) = x_1\left(h^{-1}(\psi)\right) = \left(h^{-1}(\psi)\right)(x_1) = \psi(y_2) = y_2(\psi),$$

откуда $x_1^* = y_2$, и

$$h^{*-1}(x_2)(\psi) = x_2^*(\psi) = x_2\left(h^{-1}(\psi)\right) = h^{-1}(\psi)(x_2) =$$
$$= \psi^3(y_2) - \psi(y_1) = y_2^3(\psi) - y_1(\psi),$$

откуда $x_2^* = y_2^3 - y_1$.

Заключаем, что гомеоморфизм h – полиномиальный. Нетрудно также показать, что он не является равномерно непрерывным. Действительно, выберем две последовательности $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(\psi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ из $C_p(X)$, положив $\varphi_n(x_1) = n$, $\varphi_n(x_2) = 0$, $\psi(x_1) = n+n^{-1}$, $\psi_n(x_2) = 0$ при всех n. Легко вычислить, что $\max\limits_X |\psi_n - \varphi_n| = n^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, в то время как $\max\limits_Y |h(\psi_n) - h(\varphi_n)| > 3n$, откуда и следует наше утверждение. ■

Всякий полиномиальный гомеоморфизм h: $C_p(X) \to C_p(Y)$ определяет конечнозначные отображения S: $Y \to X$, $S(y) = K(y^*)$ и S': $X \to Y$, $S'(x) = K(x^*)$, которые, конечно, играют равноправную роль. Поэтому в дальнейшем рассуждения, не требующие рассмотрения обоих отображений, будут проводиться относительно отображения S.

Лемма 2. Пусть $y\in Y$, $|S(y)| = k(y)$, $\{U_1,\ldots, U_{k(y)}\}$ – произвольная дизъюнктная система (открытых) окрестностей точек $x_1,\ldots, x_{k(y)}$ из $S(y)$. Тогда у точки y найдется окрестность V_y, целиком состоящая из точек z, для которых $S(z)\cap U_i \neq \varnothing$ для всех $i = 1,\ldots, k(y)$.

Доказательство. Рассмотрим семейство функций $\{\varphi_1,\ldots, \varphi_{k(y)}\} \subset C_p(X)$, такое, что $\varphi_i(x_i) = t_i$, $\varphi_i\big|_{X\setminus U_i} \equiv 0$. Положим $V_y = \bigcap\limits_{i=1}^{k(y)} (h(\varphi_i))^{-1}(\mathbf{R}\setminus\{0\})$. Тогда $y\in V_y$. Действительно, зафиксируем j, $1 \le j \le k(y)$. Имеем $h(\varphi_j)(y) = (y\circ h)(\varphi_j) = y^*(\varphi_j)$. Так как $\varphi_j(x_i) = 0$ при всех $i\neq j$, то выражение $y^*(\varphi_j)$ содержит лишь многочлен от $\varphi_j(x_i) = t_j$. Поэтому надлежащим выбором чисел t_j можно добиться, чтобы $y^*(\varphi_j) \neq 0$, что и означает $y\in V_y$. Далее, если $z\in V_y$ и при этом $S(z)\cap U_i = K(z^*)\cap U_i = \varnothing$ для некоторого i, то по лемме 1 $z^*(\varphi_i) = h(\varphi_i)(z) = 0$. Значит, $z\notin V_y$. Противоречие. Лемма 2 доказана. ■

Положим теперь $Y^{\le n} = \{y\in Y; |S(y)| \le n\}$ и $Y^n = Y^{\le n} \setminus Y^{\le n-1}$. Непосредственно из леммы 2 легко вытекает

Следствие 1. Пусть $y\in Y$, окрестность V_y – как в лемме 2, $z\in V_y$. Тогда $|S(z)| \ge |S(y)|$.■

Напомним, что многозначное отображение M: $X \to Y$ называется полунепрерывным снизу (соответственно сверху), если для каждого открытого в Y множества G множество $\{x\in X;\ M(x)\cap G \neq \varnothing\}$ (соответственно $\{x\in X;\ M(x) \subset G\}$) открыто в X. Из этого определения и из леммы 2 легко вывести

Следствие 2. Отображение S полунепрерывно снизу. ■

Комбинируя лемму 2 и следствие 1, получаем

Следствие 3. Отображение S: $Y^n \to X$ полунепрерывно сверху при любом $n\in\mathbf{N}$. ■

Следствие 4. $Y^{\le n}$ замкнуто в Y при любом $n\in\mathbf{N}$.

Доказательство. Следствие 1 немедленно влечет открытость множества $Y\setminus Y^{\le n}$. ■

Следствие 5. Если $y\in Y$, то $y\in\cup\{S'(x);\ x\in S(y)\}$.

Доказательство. Предположим противное и рассмотрим $\psi\in C_p(Y)$, такое, что $\psi(y) = 1$, $\psi(z) = 0$ при всех $z\in\cup\{S'(x);\ x\in S(y)\}$. Тогда по лемме 1 $x^*(\psi) = h^{*-1}(x)(\psi) = h^{-1}(\psi)(x) = 0$ при любом $x\in S(y)$. Это, в свою очередь, означает, что $y^*(h^{-1}(\psi)) = h^*(y)(h^{-1}(\psi)) = h(h^{-1}(\psi))(y) = \psi(y) = 0$. Противоречие. ■

Ниже мы предполагаем, что пространства X и Y имеют счетную базу и h: $C_p(X) \to C_p(Y)$ – полиномиальный гомеоморфизм. Тогда при каждом $n \in \mathbf{N}$ подмножество Y^n пространства Y, будучи, в силу следствия 4, пересечением открытого $Y \setminus Y^{\le n-1}$ и замкнутого $Y^{\le n}$ множеств, имеет тип F_σ в Y. Именно, пусть $Y^n = \cup\left\{F_a^n; a \in A\right\}$, где все множества F_a^n являются замыканиями элементов счетной базы в Y^n. Такие же соображения можно высказать и относительно подмножеств X^n в X: $X^n = \cup\left\{C_a^n; a \in A\right\}$. При доказательстве следующей теоремы нами используется техника, почерпнутая из [3].

Теорема. Если пространства X и Y имеют счетную базу и h: $C_p(X) \to C_p(Y)$ – полиномиальный гомеоморфизм, то $\dim X = \dim Y$.

Доказательство. Мы покажем, что пространство Y представимо в виде объединения счетного семейства своих замкнутых подмножеств, каждое из которых можно гомеоморфно отобразить в X. Такое же утверждение, в силу равноправного положения X и Y, будет верно и для X. Это будет означать, что выполнены условия теоремы суммы для размерности dim, ссылка на которую и завершит доказательство. Используя введенные выше обозначения, мы можем записать, что $Y = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{a\in A} F_a^n$ и $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{a\in A} C_a^n$.

Пусть $y \in Y$ произвольно. Тогда при некотором $n \in \mathbf{N}$ мы имеем $y \in Y^n$ и $S(y) = K(y^*) = \{x_1,\dots,x_n\}$. Далее, при всяком i, $1 \le i \le n$, $x_i \in X^{m(i)}$ и $S'(x_i) = K\left(x_i^*\right) = \left\{y_1^i,\dots,y_{m(i)}^i\right\}$. Фиксируем произвольные дизъюнктные замкнутые окрестности $F_{a(i,j)}^{m(i,j)} \subset Y^{n(i,j)}$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m(i)$, точек множества $\bigcup\limits_{i=1}^{n}\left\{y_1^i,\dots,y_{m(i)}^i\right\}$. Так как по следствиям 2 и 3 отображение S' полунепрерывно снизу и сверху (то есть непрерывно относительно топологии Вьеториса на $\mathrm{Fin}(Y)$) на каждом $X^{m(i)}$, то найдутся дизъюнктные замкнутые окрестности $C_{a(i)}^{m(i)}$, $1 \le i \le n$, точек $x_1,\dots,x_n$, такие, что при каждом i и при всех $\xi \in C_{a(i)}^{m(i)}$, $\left|S'(\xi) \cap F_{a(i,j)}^{m(i,j)}\right| = 1$ для любого j, $1 \le j \le m(i)$. Поэтому корректно заданы однозначные непрерывные отображения $S'_{ij} : C_{a(i)}^{m(i)} \to F_{a(i,j)}^{m(i,j)}$.

Аналогично, так как S непрерывно на Y^n, существует окрестность F_a^n точки y, такая, что при всех $\eta \in F_a^n$ будет $\left|S(\eta) \cap C_{a(i)}^{m(i)}\right| = 1$. Поэтому корректно определены однозначные и непрерывные отображения $S_i : F_a^n \to C_{a(i)}^{m(i)}$.

По следствию 5 из леммы 2 для каждого $\eta \in F_a^n$ найдутся индексы i, j, такие, что $S'_{ij}\left(S_i(\eta)\right) = \eta$. Таким образом, множество F_a^n представимо в виде объединения конечного семейства множеств Φ_{ij} неподвижных точек непрерывных отображений $S'_{ij} \circ S_i$. Ясно, что все множества Φ_{ij} замкнуты, а отображения S_i гомеоморфно отображают их в пространство X. ■

Замечание. Как видно, доказательство леммы 2 и предыдущей теоремы опирается на свойство полиномиального функционала иметь конечный носитель, благодаря чему можно определить конечнозначные полунепрерывные снизу отображения S: $Y \to X$, $S(y) = K(y^*)$ и S': $X \to Y$, $S'(x) = K(x^*)$. Поэтому лемма 2 и предыдущая теорема могут быть обобщены на формально более широкий, чем класс всех полиномиальных, класс функционалов с конечным носителем. При этом мы говорим, что функционал $f \in C_p^0 C_p(X)$ имеет конечный носитель $K \subset X$, если пара (f, K) удовлетворяет условиям:

(а) $\forall \varphi \in C_p(X)$, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, такое, что $|\varphi(x) - \psi(x)| < \delta\ \forall x \in K \Rightarrow |f(\varphi) - f(\psi)| < \varepsilon$;

(б) для каждого непустого собственного подмножества $M \subset K$ пара (f, M) отвечает некоторому условию (с), влекущему отрицание (а) для пары (f, M).

Вообще говоря, изменяя условие (с), мы можем образовывать разные классы функционалов с конечным носителем. Чтобы полученный класс содержал все полиномы, можно, например, наложить условие

(с) $\forall x \in K$, $\forall \delta > 0\ \exists \Delta > 0$, такое, что $\varphi(K \setminus \{x\}) \subset (-\delta, \delta)$, $|\varphi(x)| > \Delta \Rightarrow |f(\varphi)| > 1$.

Условие (б) обеспечивает единственность подмножества $K \subset X$, для которого пара (f, K) удовлетворяет условию (а), что делает определение отображений S, S' корректным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Архангельский А.В.* Топологические пространства функций. М.: Изд-во МГУ, 1989.
2. *Лазарев В.Р.* Один пример всюду плотного множества многочленов в $C_pC_p(X)$ // Междунар. конф. по математике и механике: Избр. докл. Томск, 2003. С. 55 – 59.
3. Гулько С.П. О равномерных гомеоморфизмах пространств непрерывных функций // Труды Матем. инст. Стеклова. 1992. Т. 193. С. 82 – 88.

Принята в печать 07.12.07.