

УДК 519.48

Г.Г. Пестов, А.А. Тоболкин

К ГЕОМЕТРИИ n -УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУПП

В статье описаны базисы конечномерного линейного пространства, которые можно построить из элементов двух непересекающихся базисов. Доказана соответствующая теорема для n -упорядоченных групп. Построено счётное множество конечных 4-упорядоченных групп.

1. Теорема о двух базисах

Мы придерживаемся определений n -упорядоченного множества и группы, изложенных в [1, 2]. При $n = 1$ получаем линейно упорядоченные группы [3]. Циклически упорядоченные группы 2-мерно упорядочены [4, 5]. Группа H_8 допускает 4-упорядочивание [6].

Теорема 1.1. Пусть A и B – два базиса n -мерного линейного пространства L , $A = (a_1, \dots, a_n)$ над $\mathbf{R}$. Тогда можно так упорядочить базис B : $B = (a_{n+1}, \dots, a_{2n})$, что для каждого k , $1 \leq k \leq n + 1$, множество $(a_k, \dots, a_{k+n-1})$ есть базис L .

Доказательство. Нумерацию элементов базиса B зададим по индукции.

1) Пусть $x \in B$. Рассмотрим множество $(a_2, \dots, a_n, x)$. Если это множество линейно зависимо, то существуют такие $c_2, \dots, c_n \in \mathbf{R}$, что $c_2 a_2 + \dots + c_n a_n + c_{n+1} x = 0$, где $c_{n+1} \neq 0$, так как $(a_2, \dots, a_n)$ линейно независимы. Следовательно, x равен линейной комбинации элементов $a_2, \dots, a_n$. Итак, для каждого $x \in B$ выполнено одно из двух:

- i) x равен линейной комбинации элементов $a_2, \dots, a_n$;
- ii) множество $(a_2, \dots, a_n, x)$ линейно независимо, то есть $(a_2, \dots, a_n, x)$ есть базис L .

Если бы i) выполнялось для всех $x \in B$, то множество B было бы линейно зависимым. Итак, существует такой $x_0 \in B$, что множество $(a_2, \dots, a_n, x_0)$ линейно независимо. Обозначим $a_{n+1} = x_0$.

2) Пусть $a_{n+1}, \dots, a_{n+s} \in B$ и таковы, что все множества $(a_k, \dots, a_{k+n-1})$, где $1 \leq k \leq s + 1$, линейно независимы. Опишем выбор элемента $a_{n+s+1} \in B$. По предположению индукции, множество $(a_{s+1}, \dots, a_{n+s})$ линейно независимо. Следовательно, линейно независимо и множество из $(n - 1)$ элемента $(a_{s+2}, \dots, a_{n+s})$.

Аналогично 1) найдётся такой $x \in B$, что множество $(a_{s+2}, \dots, a_{n+s}, x)$ линейно независимо. Обозначим $a_{n+s+1} = x$.

Теорема доказана.

Теорема 1.2. Пусть A и B – два базиса n -мерного линейного пространства L без общих элементов. Тогда существует не менее 2^n различных базисов пространства L , составленных из элементов множества $A \cup B$.

Доказательство. Пусть $k \leq n$, где $n = |A| + |B|$. Из множества A выберем k произвольных элементов $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$. По предыдущему, найдётся такое множество элементов $(a_{i_{k+1}}, \dots, a_{i_n})$ из B , что $(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}, a_{i_{k+1}}, \dots, a_{i_n})$ есть базис линейного пространства L . Выбирая различными способами подмножества $(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$ множества A , получим C_k^n различных базисов пространства L , каждый из которых содержит k элементов из A .

Меняя k от нуля до n , получим всего $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$ базисов L .

2. Теоремы о гиперплоскостях в упорядоченной группе

Теорема 2.1. Пусть P есть $(n-1)$ -мерная плоскость в n -упорядоченной группе G , $a \notin P$, $A \subset P$, $B \subset P$, $|A| = |B| = n$, $A \cap B = \emptyset$.

Если $\zeta(A, a) \neq 0$, $\zeta(A, b) \neq 0$, $A = (a_1, \dots, a_n)$, то найдётся такая нумерация элементов множества $B = (a_{n+1}, \dots, a_{2n})$, что для каждого натурального k , $1 \leq k \leq n+1$, выполнено

$$\zeta(a_k, \dots, a_{k+n-1}) \neq 0.$$

Доказательство. Так как множество $S = A \cup B \cup \{a\}$ является n -упорядоченным и его мощность равна $(2n+1)$, то это множество реализуемо в $\mathbf{R}^n$. Пусть f есть инъекция S в $\mathbf{R}^n$, реализующая порядок ζ как ориентацию η в $\mathbf{R}^n$.

Обозначим вектор $f(x) - f(a)$ через $\bar{x}$. Положим

$$\bar{A} = \{\varphi(x) - \varphi(a) \mid x \in A\}, \bar{B} = \{\varphi(x) - \varphi(a) \mid x \in B\}.$$

Теперь $\bar{A}$ и $\bar{B}$ есть базисы $\mathbf{R}^n$. По теореме 1.1 можно так упорядочить множество $\bar{B} = (a_{n+1}, \dots, a_{2n})$, что при каждом натуральном k , $1 \leq k \leq n+1$, множество $(\bar{a}_k, \dots, \bar{a}_{k+n-1})$ есть базис $\mathbf{R}^n$, следовательно, $\zeta(a_k, \dots, a_{k+n-1}) \neq 0$.

Теорема 2.2. Пусть $\langle G, \zeta \rangle$ — n -упорядоченная группа, множество $A = \{a_1, \dots, a_{k+1}\}$ — k -грань $\langle G, \zeta \rangle$. Для того чтобы плоскость P_A была подгруппой группы G , необходимо и достаточно, чтобы $\forall i, j \in \overline{1, k+1}$ ($a_i a_j \in P_A$).

Необходимость очевидна.

Достаточность. Пусть $\forall i, j \in \overline{1, k+1}$ ($a_i a_j \in P_A$). Покажем, что $P_A < G$. Рассмотрим произвольный элемент $x \in P_A$, тогда

$$\forall C \in G^{n-k-1} (\zeta(A, C, x) = 0).$$

Функция порядка ζ согласована с алгебраической структурой группы G , поэтому

$$\forall i \in \overline{1, k+1} \quad \forall C \in G^{n-k-1} (\zeta(A a_i, C a_i, x a_i) = 0).$$

Из леммы 5 получаем, что $A a_i$ и $x A$ являются k -гранями $\langle G, \zeta \rangle$. Из леммы 4 вытекает, что для всех i справедливо $x a_i \in P_{A a_i}$, но тогда $x A \subset P_{A a_i}$. По теореме 1 получаем, что $P_{xA} = P_{A a_i}$. По условию для всех i выполнено $A a_i \subset P_A$, следовательно, (теорема 1) $P_{A a_i} = P_A$. Таким образом, $P_A = P_{xA}$. Пусть теперь y — произвольный элемент P_A , тогда

$$\forall C \in G^{n-k-1} (\zeta(x A, C, y) = 0).$$

Умножая слева все аргументы функции ζ на x^{-1} , получим

$$\forall C \in G^{n-k-1} (\zeta(A, x^{-1} C, x^{-1} y) = 0).$$

Из леммы 4 получаем, что $yx^{-1} \in P_A$. Таким образом, для любых x и y из P_A элемент yx^{-1} тоже принадлежит P_A . Поэтому $P_A < G$. Теорема доказана.

3. Один класс 4-мерно упорядоченных конечных групп.

В этой работе будем придерживаться определения n -упорядоченных групп, введенных в [1]. Тоболкиным А.А. доказано, что мультипликативная группа кватернионов H допускает 4-упорядочивание и не допускает n -упорядочивания при $n < 4$ [2]. Каждый элемент группы H можно представить в виде

$$h = a + bi + cj + dk,$$

где $a, b, c, d \in \mathbf{R}$.

Функция 4-порядка ζ задается на H следующим образом. Пусть

$$h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 \in H, \quad h_s = a_s + b_s i + c_s j + d_s k \quad \text{для всех } s = \overline{1, 5}.$$

Тогда полагаем

$$\zeta(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5) = \text{sign} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & 1 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & 1 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Подгруппу H , образованную элементами i, j , обозначим, как обычно, H_8 .

Введем обозначения $\varepsilon_n = e^{\frac{2\pi}{n}i}$, $C_n = \langle \varepsilon_n \rangle$ – подгруппа с образующей ε_n .

Лемма 3.1:

- (1) Если $h \in \langle i \rangle$, то $h\varepsilon_n = \varepsilon_n h$;
- (2) Если $h \in H_8 \setminus \langle i \rangle$, то $h\varepsilon_n = \varepsilon_n^{-1} h$.

Доказательство. В случае (1) h и ε_n принадлежат абелевой мультипликативной группе комплексных чисел.

Рассмотрим случай (2). Достаточно проверить его только для $h = j$. Пусть $\varepsilon_n = \alpha + \beta i$, тогда

$$h\varepsilon_n = j(\alpha + \beta i) = (\alpha - \beta i)j = \varepsilon_n^{-1} h.$$

Лемма 3.2:

Зададим на H функцию f :

$$f(h) = \begin{cases} 1, & \text{если } h \in \langle i \rangle, \\ -1, & \text{если } h \notin \langle i \rangle. \end{cases}$$

Тогда для всех натуральных t выполнено: $h\varepsilon_n^t = \varepsilon_n^{f(h)t} h$.

Доказательство ведется индукцией по t .

Лемма 3.3:

$$H_8 C_n < H.$$

Доказательство. Пусть $x, y \in H_8 C_n$, тогда существуют $h_1, h_2 \in H$ и $t_1, t_2 \in \mathbf{Z}$, такие, что $x = h_1 \varepsilon_n^{t_1}$, $y = h_2 \varepsilon_n^{t_2}$. Имеем

$$xy = h_1 \varepsilon_n^{t_1} h_2 \varepsilon_n^{t_2} = h_1 h_2 \varepsilon_n^{t_2 + f(h_2)t_1} \in H_8 C_n,$$

$$x^{-1} = (h_1 \varepsilon_n^{t_1})^{-1} = \varepsilon_n^{-t_1} h_1^{-1} = h_1^{-1} \varepsilon_n^{-f(h_1^{-1})t_1} \in H_8 C_n.$$

Следовательно, $H_8 C_n$ является подгруппой группы H .

Теорема 3.4. Существует бесконечно много конечных групп, допускающих 4-упорядочивание.

Доказательство. Группа H_8C_n конечна, так как является произведением конечных групп. Группа H допускает 4-упорядочивание, значит, и каждая ее подгруппа, содержащая невырожденную пятерку элементов, будет допускать 4-упорядочивание. Порядок, индуцируемый с H на H_8C_n , не вырожден для всех $n \neq 1, 2, 4$, так как в H_8C_n есть невырожденная пятерка: $1, i, j, k, \varepsilon_n$.

Следовательно, при $n \geq 5$ 4-мерный порядок на H_8C_n не вырожден. Заметим, что при $m, n \geq 5$ выполнено

$$H_8C_n = H_8C_m \Leftrightarrow n = m.$$

Поэтому множество $\{H_8C_n\}_{n \geq 5}$ состоит из счетного числа конечных 4-упорядоченных групп. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пестов Г.Г. n -упорядоченные множества // Труды Иркут. гос. ун-та. Т. 74. Вып. 6. С. 146 – 169.
2. Забарина А.И., Пестов Г.Г. Об n -мерно упорядоченных группах // Вестник ТГУ. 2003. № 280. С. 40 – 43.
3. Кокорин А.И., Копытов В.М. Линейно упорядоченные группы. М.: Наука, 1972.
4. Swierczkowski S. On cyclically ordered groups // Fund. Math. 1953. V. 47. P. 161 – 167.
5. Забарина А.И., Пестов Г.Г. О критерии циклической упорядочиваемости группы // Упорядоченные множества и решетки: Межвуз. науч. сб. Вып. 9. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1986. С. 19 – 24.
6. Тоболкин А.А. Теорема о мультипликативной группе кватернионов // Актуальные проблемы математики и методики её преподавания: Материалы заочной Всероссийской научно-практической конференции. Томск: Изд-во Том. гос. пед. ун-та, 2007. С. 21 – 32.

Принята в печать 04.12.07.