

УДК 517.982

Т.Е. Хмылёва, И.П. Бухтина

О НЕКОТОРОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ, НЕ ЯВЛЯЮЩЕЙСЯ БАЗИСОМ

В данной работе рассматривается последовательность элементов $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ гильбертова пространства H , для которой углы между любыми двумя элементами g_n и g_m одинаковы. Доказывается, что данная последовательность не может являться базисом в H и даже не является базисной последовательностью в H .

Хорошо известно понятие наклона $\delta(H_1, H_2)$ двух подпространств H_1, H_2 гильбертова пространства H , введенное М.М. Гринблумом в [1]:

$$\delta(H_1, H_2) = \inf_{h_1 \in S(H_1), h_2 \in H_2} \|h_1 + h_2\|,$$

где $S(H_1) = \{h \in H_1: \|h\| = 1\}$ – единичная сфера.

Также известен следующий критерий, сформулированный Гринблумом в [2]:

Теорема. Для того чтобы последовательность $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ была базисной, необходимо и достаточно, чтобы существовало число $\delta > 0$, такое, что при всех $n \in \mathbb{N}$

$$\delta(L_n, L^n) \geq \delta > 0,$$

где $L_n = L(\{h_k\}_{k=1}^n)$, $L^n = L(\{h_k\}_{k=n+1}^{\infty})$, $L(M)$ – замкнутая линейная оболочка множества $M \subset N$.

В данной работе строится последовательность $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов гильбертова пространства H , которая не является базисной в пространстве H и, следовательно, не удовлетворяет данному критерию.

Поскольку все сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны пространству всех суммируемых в квадрате последовательностей l_2 , то мы рассмотрим такую последовательность в гильбертовом пространстве l_2 . Норма и скалярное произведение в данном пространстве задаются следующими формулами:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x(i)|^2} \text{ для любого } x = (x(1), x(2), \dots, x(n), \dots) \in l_2;$$

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x(i) \overline{y(i)} \text{ для любых } x = (x(1), x(2), \dots, x(n), \dots) \in l_2,$$

$y = (y(1), y(2), \dots, y(n), \dots) \in l_2$ (черта обозначает комплексное сопряжение).

Через $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ обозначается стандартный базис в l_2 , т.е. $e_n(k) = \delta_{nk}$.

Углом α между двумя элементами $x, y \in l_2$ назовем такое число α , для которого

$$\cos \alpha = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Построим последовательность линейно-независимых элементов $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ гильбертова пространства l_2 , удовлетворяющую условиям:

- 1) $f_1 = e_1 = (1, 0, 0, \dots)$;
- 2) $\|f_n\| = 1$ для любого $n \in \mathbf{N}$;
- 3) $(f_n, f_m) = a, 0 < |a| < 1, n \neq m, n, m \in \mathbf{N}$.

Из условий $(f_1, f_2) = 1$ и $\|f_2\| = 1$ получим $f_2 = (a, \sqrt{1-a^2}, 0, 0, \dots)$. Элемент f_3 находим из условий $(f_1, f_3) = a$, $(f_2, f_3) = a$ и $\|f_3\| = 1$. Получим

$$f_3 = \left(a, \frac{a\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}}, \sqrt{\frac{(1-a)(1+2a)}{1+a}}, 0, 0, \dots \right).$$

Заметим, что $f_2(1) = f_3(1)$ в силу условия $(f_1, f_2) = (f_1, f_3) = a$.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} f_1(1) &= x_1, \\ f_2(1) &= y_1, f_2(2) = x_2, \\ f_3(1) &= y_1, f_3(2) = y_2, f_3(3) = x_3. \end{aligned}$$

Предположим, что построены элементы $f_1, f_2, \dots, f_n$:

[illegible]

удовлетворяющие условиям 1) – 3).

Покажем, что существуют числа y_n и x_{n+1} , такие, что система элементов $f_1, f_2, \dots, f_n, f_{n+1} = (y_1, y_2, \dots, y_{n-2}, y_{n-1}, y_n, x_{n+1}, 0, \dots)$ удовлетворяет условиям 1) –

3). Для этого рассмотрим следующую систему:

$$\begin{cases} (f_n, f_{n+1}) = a, \\ \|f_n\| = 1, \\ \|f_{n+1}\| = 1, \end{cases} \quad \text{T.E.} \quad \begin{cases} y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-2}^2 + y_{n-1}^2 + y_n x_n = a, \\ y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-2}^2 + y_{n-1}^2 + x_n^2 = 1, \\ y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-2}^2 + y_{n-1}^2 + y_n^2 + x_{n+1}^2 = 1. \end{cases}$$

Вычитая первое равенство из второго и третьего, получим

$$\begin{cases} x_n^2 - y_n x_n = 1 - a, \\ y_n^2 + x_{n+1}^2 - y_n x_n = 1 - a. \end{cases}$$

Отсюда с помощью несложных преобразований находим

$$\begin{aligned} y_n^2 &= x_n^2 - x_{n+1}^2, \\ x_{n+1} &= \sqrt{2(1-a) - \frac{(1-a)^2}{x_n^2}}, \\ y_n &= x_n - \frac{1-a}{x_n}. \end{aligned} \quad (1)$$

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i f_i. \quad (7)$$

Сравнивая по координатам правую и левую части равенства (7), имеем

$$\begin{cases} y_k = \beta_k x_k + y_k (\beta_{k+1} + \beta_{k+2} + \dots), \\ y_{k+1} = \beta_{k+1} x_{k+1} + y_{k+1} (\beta_{k+2} + \beta_{k+3} + \dots). \end{cases} \quad (8)$$

Из системы (8) несложно получить, что $\beta_k \frac{x_k}{y_k} + \beta_{k+1} = \beta_{k+1} \frac{x_{k+1}}{y_{k+1}}$. Подставляя в

последнее равенство отношения $\frac{x_k}{y_k}$ и $\frac{x_{k+1}}{y_{k+1}}$, полученные из формул (5) и (6), находим, что $\beta_k = \beta_{k+1}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Это противоречит сходимости ряда (7). Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 1. Последовательность линейно независимых элементов $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ гильбертова пространства l_2 , удовлетворяющая условиям 1) – 3), не является базисом в пространстве l_2 .

Рассмотрим общий случай.

Теорема 2. Пусть H – гильбертово пространство, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность элементов пространства H , удовлетворяющая условиям:

- a) $\|g_n\| = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$,
- b) $(g_n, g_m) = a$, $0 < |a| < 1$, $n \neq m$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Тогда последовательность $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является базисной в пространстве H .

Доказательство. Обозначим $L = \overline{\text{sp}\{g_1, g_2, \dots, g_n, \dots\}}$. Заметим, что L – сепарабельное гильбертово пространство. Построим отображение $T: L \rightarrow l_2$ по следующему правилу:

если $h \in \text{sp}\{g_1, g_2, \dots, g_n, \dots\}$, то положим

$$T(h) = T(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \dots + \alpha_n g_n) = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n.$$

Покажем, что верно равенство

$$\|T(h)\| = \|h\|. \quad (9)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \|T(h)\| &= \|\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n \alpha_i \overline{\alpha_j} (f_i, f_j)} = \sqrt{a \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \overline{\alpha_j}}, \\ \|h\| &= \|\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \dots + \alpha_n g_n\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n \alpha_i \overline{\alpha_j} (g_i, g_j)} = \sqrt{a \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \overline{\alpha_j}}. \end{aligned}$$

Следовательно, равенство (9) верно.

Если $h \in \overline{\text{sp}\{g_1, g_2, \dots, g_n, \dots\}}$, то $h = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n$, где $h_n \in \text{sp}\{g_1, g_2, \dots, g_n, \dots\}$. В силу условия (9), последовательность $\{T(h_n)\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной в гильбертовом пространстве l_2 и, следовательно, существует $\lim_{n \rightarrow \infty} T(h_n)$. Полагаем $T(h) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(h_n)$.

Заметим, что построенный таким образом оператор T является линейной изометрией пространства L на пространство l_2 . Предполагая, что последовательность $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ является базисной в пространстве H , получим, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом в пространстве l_2 , что противоречит теореме 1. Следовательно, последовательность $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является базисной в пространстве H .

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринблум М.М. О представлении пространства типа В в виде прямой суммы пространств // ДАН. 1950. Т. 70. Вып. 5. С. 749 – 752.
2. Гринблум М.М. Некоторые теоремы о базисе в пространстве типа (В) // ДАН. 1941. Т. 31. Вып. 5. С. 428 – 432.

Принята в печать 06.12.07.