

УДК 532.516.5:532.69

М.А. Пономарева, В.А. Якутенок

**МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСТЕКАНИЯ КАПЛИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ
В ПЛОСКОЙ ПОСТАНОВКЕ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ БОНДА¹**

В настоящей работе рассматривается растекание капли вязкой жидкости по горизонтальной твердой стенке в плоской постановке для различных чисел Бонда, в том числе соответствующих значительному гравитационному воздействию (в рамках модели ползущего течения), без каких-либо ограничений, накладываемых на характер изменения динамического краевого угла. Численное решение находится на основе использования метода граничных элементов.

Исследованию процесса взаимодействия капель жидкости с твердой стенкой, смоченной или сухой, посвящено значительное число работ, например [1 – 4]. При этом, в случае использования методов математического моделирования основные трудности связаны с получением решения в области линии трехфазного контакта (ЛТФК) и построением эффективного вычислительного алгоритма.

Для многих технологических приложений важно знать подробности растекания капель жидкости при достаточно медленном течении. В этом случае инерционными эффектами можно пренебречь. Это предположение имеет место при малости величины числа Рейнольдса, которое в данном случае можно представить в виде $Re = \rho R \alpha / \mu \ll 1$ (ρ – плотность, R – радиус капли, α – коэффициент поверхностного натяжения, μ – коэффициент динамической вязкости). В настоящей работе не используются дополнительные предположения о характере изменения динамического краевого угла (ДКУ). Тем самым фактически игнорируются силы межмолекулярного взаимодействия на ЛТФК, и ДКУ близок к π . Как следует из работ [2, 4], это предположение для гидрофобных поверхностей подтверждается экспериментально и теоретически.

Таким образом, рассматривается процесс растекания капли вязкой жидкости по сухой горизонтальной несмачиваемой гладкой поверхности. При формулировке задачи используется плоское приближение, тем самым фактически рассмотрение касается растекания цилиндрического объема. В то же время, как показано далее, результаты расчетов в плоской постановке достаточно хорошо описывают процесс растекания капель, не только качественно, но и количественно. В начальный момент времени граница области, занимаемой жидкостью, может иметь форму окружности радиуса R или прямоугольника эквивалентной площади. Последнее необходимо для выяснения поведения решения в окрестности ЛТФК.

В рамках модели ползущего течения [5] уравнения движения и неразрывности в безразмерной форме записываются в виде

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad (1)$$

где x_1 , x_2 – горизонтальная и вертикальная оси декартовой системы координат. При обезразмеривании использованы масштабы: длины R , скорости α/μ . Под без-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 06-08-00107-а).

размерной величиной давления понимается величина $p = \bar{p}R/\alpha + \text{Bo} \cdot x_2$, где $\bar{p}$ – размерное значение давления; $\text{Bo} = \rho g R^2/\alpha$ – число Бонда, характеризующее отношение гравитационных сил к силам поверхностного натяжения (g – ускорение силы тяжести). Граничные условия на свободной поверхности и на твердой стенке имеют вид

$$t_i = -(\kappa + \text{Bo} x_2) n_i; \quad (2)$$

$$v_i = 0, \quad (3)$$

где t_i – усилия, приложенные к свободной поверхности, κ – кривизна, n_i – компоненты внешней нормали к границе области.

Для случая $\text{Bo} \rightarrow \infty$ в уравнениях (1) используется масштаб скорости $\rho g R^2/\mu$, а под давлением понимается величина $p = \bar{p} \rho g R + x_2$. Вместо (2) на свободной поверхности должно выполняться

$$t_i = -x_2 n_i. \quad (4)$$

Деформация формы свободной поверхности растекающейся капли с течением времени происходит в соответствии с кинематическим условием

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i. \quad (5)$$

Для решения задачи используется непрямой метод граничных элементов [5]. Исходная система дифференциальных уравнений (1) заменяется эквивалентной системой граничных интегральных уравнений

$$v_i(x) = \int_S G_{ij}(x, \xi) \varphi_j(\xi) ds(\xi), \quad t_i(x) = \int_S F_{ij}(x, \xi) \varphi_j(\xi) ds(\xi), \quad (6)$$

где $ds(\xi)$ означает интегрирование по поверхности S ; плотность фиктивных источников $\varphi_j(\xi)$ находится исходя из граничных условий; $F_{ij}(x, \xi)$ и $G_{ij}(x, \xi)$ – фундаментальные сингулярные решения линеаризованной системы уравнений Навье – Стокса.

Граница области разбивается на N прямолинейных отрезков (элементов), вдоль которых искомая функция $\varphi_j(\xi)$ считается постоянной. Полученная система алгебраических уравнений решается методом Гаусса. Значения скоростей и напряжений находятся численным интегрированием. Для вычисления новой формы свободной границы в соответствии с (5) используется схема Эйлера. Шаг по времени выбирается из условия Куранта. Вычислительная схема позволяет с высокой точностью получать на каждом шаге по времени решение краевых задач (1) – (3) и (1), (3) и (4).

Расчеты показали, что без всяких затруднений возможно моделирование процесса растекания для чисел $\text{Bo} < 5$. При этом движение ЛТФК сводится к накатыванию свободной границы на твердую стенку подобно «тракторной гусенице» и возможно получение равновесных форм. Для чисел $\text{Bo} \geq 5$ при достижении ЛТФК точки с координатой $r^* \approx 1,77$ дальнейший расчет по вышеописанной методике приводит к появлению зоны вторичного течения в окрестности ЛТФК и остановке ее перемещения по твердой стенке (рис. 1).

Данный вычислительный эффект, лишенный физического смысла, можно связать с резким ростом касательных напряжений на твердой стенке вблизи ЛТФК. На рис. 2 приведены картины растекания столбиков жидкости без учета сил поверхностного натяжения и распределение касательных напряжений вдоль твердой

стенки при достижении точки с координатой r^* , которая и в этом случае $\approx 1,77$ (формы границы указаны через временной интервал $\Delta t = 0,5$). Дальнейший расчет приводит к появлению течения, подобного изображенному на рис. 1. Эффект роста касательного напряжения вблизи ЛТФК связан, по-видимому, со скачкообразным переходом от условий прилипания на твердой стенке к условиям на свободной границе.

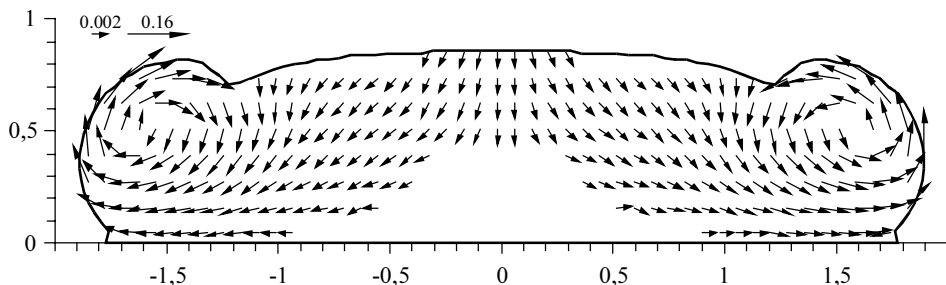


Рис. 1. Картина течения при использовании условий прилипания

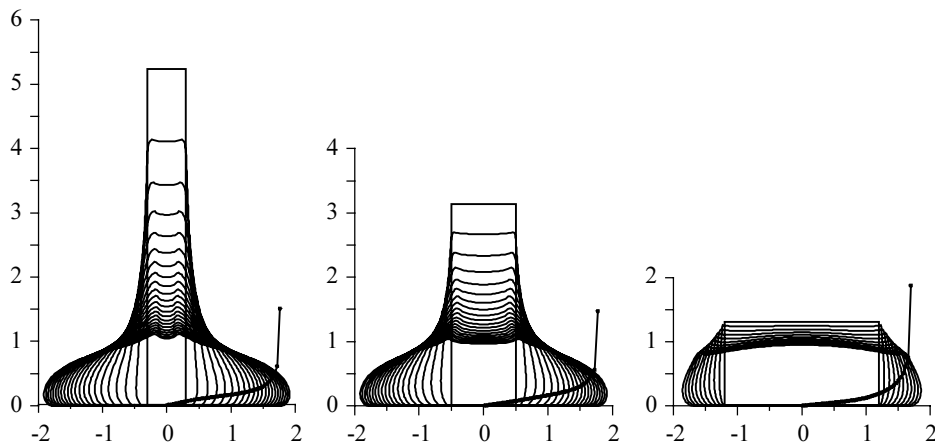


Рис. 2. Последовательности форм свободной поверхности и распределение касательного напряжения вдоль твердой стенки при растекании столбиков жидкости

Для устранения вышеуказанной вычислительной проблемы в настоящей работе предлагается в малой окрестности ЛТФК (фактически на примыкающем к ней элементе, расположенном на твердой стенке) вместо (3) использовать условие скольжения

$$v_1 - \beta \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 0, \quad (7)$$

где β – безразмерный коэффициент скольжения, значение которого бралось равным 10^{-6} . В этом случае равновесные формы свободной границы капли можно получить практически для любых значений числа Bo . Тем не менее, при переходе ЛТФК точки r^* наблюдаются исчезающие в последующем колебания свободной поверхности в окрестности твердой стенки. Полностью избежать нежелательных искажений свободной границы в этот момент удастся с использованием вычисли-

тельной процедуры, заключающейся в том, что при появлении расчетной точки, с положительной вертикальной составляющей скорости (что предшествует зарождению вихревой зоны), данная точка считается принадлежащей твердой стенке. Значение вертикальной составляющей скорости является малой величиной, а сама точка является краем первого элемента свободной границы, примыкающего к твердой стенке.

На рис. 3. представлена картина растекания цилиндрического объема жидкости, моделирующего в плоском приближении каплю жидкости, без учета поверхностного натяжения ($\Delta t = 10$). Штриховой линией изображена форма свободной поверхности в соответствующий момент времени, полученная в приближении теории смазки [3]. Характер изменения радиуса пятна контакта со временем демонстрирует рис. 4, где штриховая кривая построена с использованием решения [3]. Значительные отличия наблюдаются только на начальном этапе процесса растекания, когда пленочная модель течения является достаточно грубым приближением.

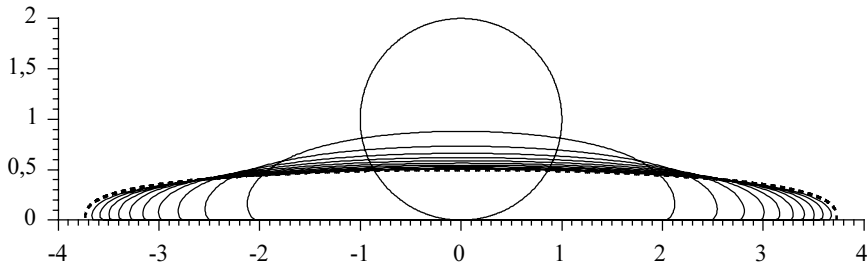


Рис. 3. Последовательности форм свободной поверхности ($Bo = \infty$, сплошные линии) и сравнение с данными работы [3] (штриховая линия)

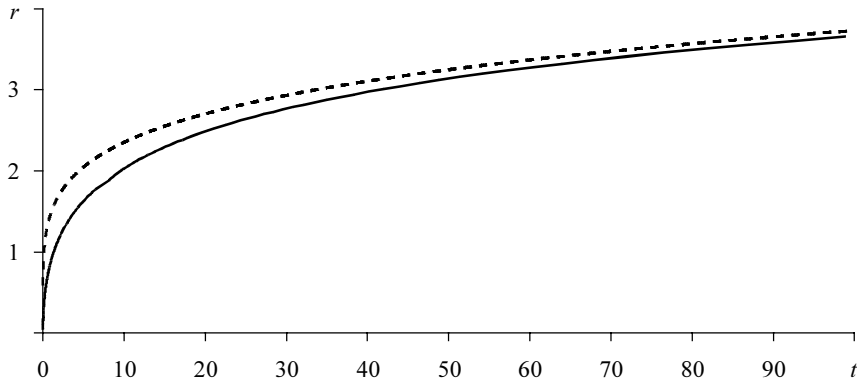


Рис. 4. Зависимость радиуса пятна контакта r от времени (сплошная линия) и сравнение с [3] (штриховая линия)

Результаты моделирования растекания объема жидкости при $Bo = 3$ (рис. 5, а), $Bo = 15$ (рис. 5, б) и $Bo = 50$ (рис. 5, в) подтверждают эффективность предложенной методики и в случае учета поверхностного натяжения. В случае конечных значений чисел Bo расчет продолжается до достижения поверхностью жидкости равновесной формы.

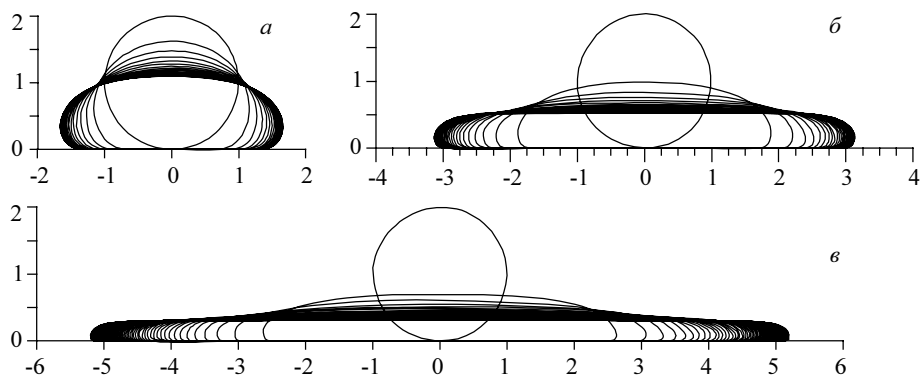


Рис. 5. Последовательность форм свободной поверхности:
 $a - Bo = 3$; $b - Bo = 15$; $v - Bo = 50$

Достоверность полученных результатов подтверждается сравнением расчетной стационарной формы свободной поверхности с формой, полученной фото-съемкой капли ртути массой 0,15 г (рис. 6, *a*). В ходе эксперимента каплю ртути помещали на пластину оптического кварцевого стекла, предварительно обезжиренную 5% раствором бихромата калия и спиртом.

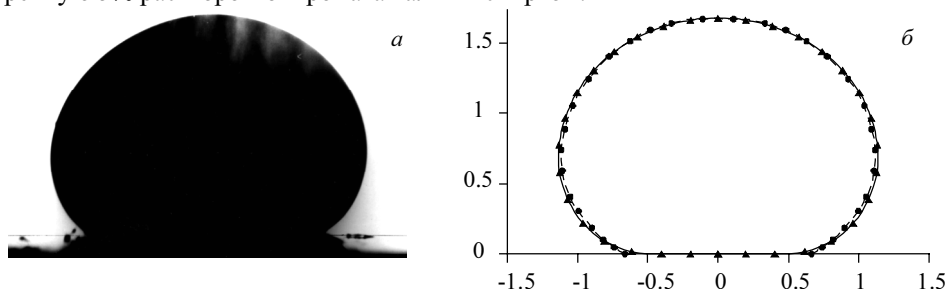


Рис. 6. Капля ртути на кварцевом стекле (*a*); сравнение равновесных форм свободной поверхности (*б*) для $Bo = 0,5$ (сплошная линия ($\blacktriangle$) – расчет, штриховая ($\bullet$) – эксперимент)

Число Бонда в этом случае равно 0,5. Наблюдаемое согласование форм (рис. 6, *б*) позволяет сделать вывод о том, что плоское приближение дает результаты, достаточно хорошо согласующиеся с осесимметричным случаем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lavi B., Marmur A. The exponential law: partial wetting kinetics and dynamic contact angles // *Colloid and Surfaces A: Physicochem. Eng. Aspects*. 2004. V. 250. P. 409 – 414.
2. Hocking L.M. Moving fluid interface – 2. The removal of the force singularity by a slip flow // *J. Fluid Mech.* 1977. V. 79. No. 2. P. 209 – 229.
3. Nakaya C. Spread of fluid drops over a horizontal plane // *Journal of the Physical Society of Japan*. 1974. V. 37. No. 2. P. 539 – 543.
4. Reznik S.N., Yarin A.L. Spreading of a viscous drop due to gravity and capillarity on a horizontal or an inclined dry wall // *Phys. Fluids*. 2002. V. 14. P. 118 – 132.
5. Козлобродов А.Н., Шрагер Г.Р., Якутенок В.А. Моделирование гидромеханических течений в технологии переработки полимерных материалов. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1999. 230 с.