

УДК 512.546.1

Л.В. Гензе, С.П. Гулько, Т.Е. Хмылева

КЛАССИФИКАЦИЯ СВОБОДНЫХ БУЛЕВЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП НА ОРДИНАЛАХ

В работе дана полная классификация свободных булевых групп $B[1, \alpha]$, пространств $C_p([1, \alpha], D)$ всех непрерывных двухзначных функций на компактных отрезках ординалов $[1, \alpha]$ и сопряженных к ним пространств $L_p[1, \alpha]$.

Ключевые слова: ординалы, свободные булевы топологические группы, классификация, $\mathbb{Z}_2$ -линейные топологические пространства.

В статьях [3, 5] была дана полная линейная гомеоморфная классификация банаховых пространств $C[1, \alpha]$, где α – произвольное порядковое число (предварительные результаты см. также в [9, 11]). Она имеет следующий вид.

Теорема 1. [3, 5] Пусть $[1, \alpha]$ и $[1, \beta]$ – бесконечные отрезки ординалов, причем $\alpha \leq \beta$. Тогда банаховы пространства $C[1, \alpha]$ и $C[1, \beta]$ линейно гомеоморфны в том и только в том случае, когда выполняется одно из трех взаимоисключающих условий:

а) существует не совпадающий ни с каким начальным регулярным кардиналом ординал $\gamma \geq 0$, такой, что

$$\omega^{\omega^\gamma} \leq \alpha \leq \beta < \omega^{\omega^{\gamma+1}};$$

б) $\lambda \cdot \sigma \leq \alpha \leq \beta < \lambda \cdot \sigma^+$, где λ – регулярный кардинал и $\sigma < \lambda$ – произвольный кардинал (включая случай конечных кардиналов) и σ^+ – наименьший из кардиналов, больших σ ;

с) $\lambda^2 \leq \alpha \leq \beta < \lambda^\omega$, где λ – регулярный кардинал. ■

Эту теорему можно сформулировать и иначе. Рассмотрим следующий класс ординалов

$$\Delta = \{\omega^{\omega^\gamma}; \gamma \geq 0\} \cup \{\lambda \cdot \sigma; \text{ где } \lambda \text{ и } \sigma - \text{кардиналы, } 1 \leq \sigma \leq \lambda\}.$$

Назовем элементы множества Δ **разделительными столбами** на луче ординалов. Тогда теорему 1 можно переформулировать в следующем виде.

Теорема 1а. Пусть $[1, \alpha]$ и $[1, \beta]$ – бесконечные отрезки ординалов, причем $\alpha \leq \beta$. Тогда банаховы пространства $C[1, \alpha]$ и $C[1, \beta]$ линейно гомеоморфны в том и только в том случае, когда не существует ординала $\delta \in \Delta$, такого, что $\alpha < \delta < \beta$, другими словами, между ординалами α и β нет разделительных столбов.

В последующей статье [4] было установлено, что классификация порядковых чисел α относительно линейных гомеоморфизмов пространств $C_p[1, \alpha]$, а также свободных топологических групп $F[1, \alpha]$, а также свободных абелевых топологических групп $A[1, \alpha]$ является фактически той же самой. А именно, имеет место

Теорема 2 [4]. Следующие условия эквивалентны:

- 1) пространства $C_p[1, \alpha]$ и $C_p[1, \beta]$ линейно гомеоморфны;
- 2) свободные топологические группы $F[1, \alpha]$ и $F[1, \beta]$ топологически изоморфны;

3) свободные абелевы топологические группы $A[1, \alpha]$ и $A[1, \beta]$ топологически изоморфны;

4) ординаты α и β удовлетворяют одному из трех взаимоисключающих условий а), б) и с) теоремы 1.

Последнее условие можно опять же переформулировать и так:

4а) между ординатами α и β нет разделительных столбов.

Целью данной статьи является аналогичная классификация свободных булевых топологических групп

$B[1, \alpha]$ и пространств всех 2-значных непрерывных функций $C_p([1, \alpha], D)$ (одновременно мы рассмотрим также классификацию пространств $L_p([1, \alpha], D)$, сопряженных к $C_p([1, \alpha], D)$ в естественном смысле). Мы покажем, что в окончательном своем выражении на языке самих ординалов эти классификации отличаются от вышеприведенной. Введем следующий класс ординалов:

$$\Delta_2 = \{\lambda\sigma; \text{ где } \lambda \text{ и } \sigma - \text{кардиналы, } \lambda \text{ регулярен и } 1 \leq \sigma \leq \lambda\}.$$

Ясно, что этот класс является частью класса Δ . Следующая теорема является основным результатом этой статьи.

Теорема 3. Пусть $[1, \alpha]$ и $[1, \beta]$ – бесконечные отрезки ординалов. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) свободные булевы топологические группы $B[1, \alpha]$ и $B[1, \beta]$ топологически изоморфны;

2) пространства $C_p([1, \alpha], D)$ и $C_p([1, \beta], D)$ линейно гомеоморфны;

3) пространства $L_p([1, \alpha], D)$ и $L_p([1, \beta], D)$ линейно гомеоморфны;

4) выполнено одно из следующих взаимоисключающих условий:

а) $|\alpha| = |\beta| = \lambda$ и кардинал λ является сингулярным кардиналом или $\lambda = \omega$;

б) $|\alpha| = |\beta| = \lambda$, кардинал λ является несчетным регулярным, $\lambda \cdot \sigma \leq \alpha \leq \beta < \lambda \cdot \sigma^+$, где σ – произвольный (возможно, конечный) кардинал, причем $\sigma < \lambda$;

в) $|\alpha| = |\beta| = \lambda$, кардинал λ является несчетным регулярным и $\lambda^2 \leq \alpha \leq \beta < \lambda^+$, где λ^+ – наименьший кардинал среди всех кардиналов, строго больших λ .

Иначе последний пункт теоремы 3 можно переформулировать в следующем виде.

4а) между ординатами α и β нет разделительных столбов из класса Δ_2 .

Предложим еще одну формулировку данной теоремы.

Следствие 4. Пусть $[1, \alpha]$ – бесконечный отрезок ординалов. Тогда:

а) если $|\alpha| = \lambda$ является сингулярным кардиналом или счетным кардиналом, то $B[1, \alpha] \cong B(a(\oplus_\lambda[1, \lambda]), *)$, $C_p[1, \alpha] \sim C_p(a(\oplus_\lambda[1, \lambda]), *)$ и $L_p[1, \alpha] \sim L_p(a(\oplus_\lambda[1, \lambda]), *)$;

б) если $|\alpha| = \lambda$ является регулярным несчетным кардиналом и $\lambda \cdot \sigma \leq \alpha \leq \beta < \lambda \cdot \sigma^+$, где σ – произвольный (возможно конечный) кардинал, причем $\sigma < \lambda$, то $B[1, \alpha] \cong B(a(\oplus_\sigma[1, \lambda]), *)$, $C_p[1, \alpha] \sim C_p(a(\oplus_\sigma[1, \lambda]), *)$ и $L_p[1, \alpha] \sim L_p(a(\oplus_\sigma[1, \lambda]), *)$;

в) если $|\alpha| = \lambda$ является регулярным несчетным кардиналом и $\lambda^2 \leq \alpha \leq \beta < \lambda^+$, то $B[1, \alpha] \cong B(a(\oplus_\lambda[1, \lambda]), *)$, $C_p[1, \alpha] \sim C_p(a(\oplus_\lambda[1, \lambda]), *)$ и $L_p[1, \alpha] \sim L_p(a(\oplus_\lambda[1, \lambda]), *)$.

Таким образом, для этих трех эквивалентностей отрезков ординалов $[1, \alpha]$ эквивалентен одноточечной компактификации дискретной суммы λ экземпляров отрезков $[1, \lambda]$, если $|\alpha| = \lambda$ и либо λ есть счетный, либо λ сингулярный кардинал, либо $\lambda^2 \leq \alpha < \lambda^+$. В оставшемся случае $[1, \alpha]$ эквивалентен одноточечной компактификации дискретной суммы σ экземпляров отрезков $[1, \lambda]$, если $|\alpha| = \lambda$, λ есть регулярный кардинал и $\lambda \cdot \sigma \leq \alpha \leq \beta < \lambda \cdot \sigma^+$ для кардинала σ , $1 \leq \sigma < \lambda$.

Обозначения и терминология

Символами $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ будем обозначать порядковые числа (= ординалы), а λ, σ, τ – кардиналы, причем λ , как правило, будет бесконечным кардиналом, а σ не обязательно. Символ ω будет обозначать первый бесконечный ординал. Кардиналы мы отождествляем с начальными ординалами данной мощности. Алгебраические операции, в частности операцию возведения в степень над ординалами и кардиналами, мы будем понимать в порядковом смысле, если, конечно, не оговорено противное. Для произвольного ординала α будем обозначать через $|\alpha|$ его мощность.

Символом $X = \bigoplus_{i \in I} X_i$ мы будем обозначать дискретную сумму семейства топологических пространств, причем в случае $X_i \equiv Y$ мы будем просто писать $\bigoplus_\lambda Y$, где λ – мощность индексного множества I . Для локально компактного некомпактного пространства X через $a(X) = X \cup \{\infty\}$ мы будем обозначать его одноточечную компактификацию.

Для произвольного вполне регулярного топологического пространства X символом $C(X, Y)$ будем обозначать пространство всех непрерывных отображений $f: X \rightarrow Y$. Если Y совпадает с вещественной прямой, то будем писать просто $C(X)$. Если эти пространства наделены топологией поточечной сходимости, то будем использовать обозначения $C_p(X, Y)$ и $C_p(X)$.

Для произвольного множества X обозначим через $B(X)$ множество всех формальных сумм $x_1 + \dots + x_n$, где $x_1, \dots, x_n \in X$, которые будем называть **словами**. При этом для произвольного элемента $x \in X$ будем считать, что $x + x = 0$. Число n будем называть длиной слова $x_1 + \dots + x_n$ и будем писать $\|x_1 + \dots + x_n\| = n$. Обозначим через $B_n(X)$ множество всех слов длины $\leq n$. Будем считать, что $B(X)$ содержит также пустое слово, которое будем обозначать символом 0 , при этом положим $\|0\| = 0$. Ясно, что $B(X) = \bigcup_n B_n(X)$. Множество X можно рассматривать как совокупность всех слов длины 1. Фактически X можно рассматривать как множество образующих (базисом) в $B(X)$.

Булевой топологической группой назовем любую топологическую группу G , в которой порядок любого элемента равен 2. Хорошо известно, что такая группа является абелевой, поэтому для записи основной операции мы будем использовать знак «+». Введенная выше группа $B(X)$ является булевой. Предположим, что X является топологическим пространством, которое удовлетворяет аксиоме полной регулярности. Наделим $B(X)$ сильнейшей групповой топологией, сужение которой на X совпадает с топологией этого пространства. Так, определенная группа является свободной булевой группой (ср. [1, 2]). Мы будем ее обозначать тем же символом $B(X)$. Некоторые свойства $B(X)$ описаны в [1].

Для булевых топологических групп, как и в общей ситуации свободных топологических групп, возможны два подхода, которые приводят к определению групп $F_G(X)$ – в смысле Граева и $F_M(X)$ – в смысле Маркова, причем группа $F_M(X)$ топологически изоморфна группе $F_G(X \oplus \{*\})$, где $*$ – некоторая точка, $* \notin X$. Так как мы рассматриваем X как бесконечный отрезок ординалов, то $X \oplus \{*\}$ гомеоморфно самому X . Следовательно, в этом случае $F_G(X) \cong F_M(X)$, и мы можем говорить просто о свободной топологической группе $F(X)$. Ниже для определенности мы принимаем терминологию Граева, тем более что она несколько удобнее в наших рассуждениях.

Определение. Пусть X – вполне регулярное топологическое пространство, и x_0 – фиксированная точка в нем. Свободной булевой топологической группой (в смысле Граева) пространства X с выделенной точкой x_0 называется топологическая группа $B(X, x_0)$ со свойствами:

1. X есть замкнутое подпространство в $B(X, x_0)$.
2. X алгебраически порождает $B(X, x_0)$ и x_0 является единицей этой группы.
3. Любое непрерывное отображение f из X в некоторую булеву топологическую группу G , переводящее точку x_0 в нейтральный элемент группы G , продолжается до непрерывного гомоморфизма $B(f): B(X, x_0) \rightarrow G$.

Иногда мы будем писать $B(X)$ вместо $B(X, x_0)$, но тем не менее некоторая точка подразумевается. Впрочем, см. следствие 11 ниже. Нам важно выделить последний пункт этого определения в отдельное предложение.

Предложение 5. Для любого непрерывного отображения $f: X \rightarrow G$ в топологическую булеву группу G существует непрерывное продолжение $\tilde{f}: B(X) \rightarrow G$, которое является гомоморфизмом групп. ■

Факт изоморфизма групп $B(X)$ и $B(Y)$ будем обозначать через $B(X) \cong B(Y)$. Если $U: B(X) \rightarrow B(Y)$ – соответствующий изоморфизм, то мы будем писать $\|U\| \leq n$ и говорить, что изоморфизм имеет норму $\leq n$, если $U^{-1}(Y) \subset X^n$ и $U(X) \subset Y^n$, т.е. каждый элемент одного базиса может быть записан в виде суммы не более чем n элементов другого базиса. Заметим, однако, что могут существовать изоморфизмы с бесконечной нормой.

На множество $B(X)$ можно смотреть как на векторное пространство над полем $\mathbf{Z}_2 = \{0, 1\}$. Мы наделим $\mathbf{Z}_2$ дискретной топологией и в этом случае будем обозначать его через D . Через $C_p([1, \alpha], D)$ обозначим множество всех непрерывных двухзначных функций на $[1, \alpha]$, наделенное топологией поточечной сходимости. Ясно, что это пространство является топологическим векторным пространством над полем $\mathbf{Z}_2$.

Рассмотрим сопряженное к пространству $C_p(X, D)$, т.е. совокупность всех непрерывных линейных над полем $\mathbf{Z}_2$ функционалов $\varphi: C_p(X, D) \rightarrow D$. Оно также является векторным пространством над полем $\mathbf{Z}_2$. Обозначим его $L_p(X, D)$ и наделим самой слабой линейной топологией, относительно которой все отображения вида $\varphi \rightarrow \varphi(f)$ являются непрерывными для любого $f \in C_p(X, D)$. Заметим далее, что для любого $x \in X$ функционал на пространстве $C_p(X, D)$, определенный правилом $f \rightarrow f(x)$, является линейным и непрерывным, т.е. его можно рассматривать как элемент пространства $L_p(X, D)$. Более того, множество X образует базис в этом линейном пространстве, и любой элемент $L_p(X, D)$ может быть записан в виде конечной булевой комбинации $x_1 + \dots + x_n$. С алгебраической точки зрения $B(X)$ и $L_p(X, D)$ идентичны, но топологию они несут, вообще говоря, разную.

Отметим также, что (булевым) сопряженным к $L_p(X, D)$ является $C_p(X, D)$, т.е. эти два пространства находятся в обычной двойственности и для них верно следующее утверждение.

Предложение 6. Линейный оператор $T: C_p(X, D) \rightarrow C_p(Y, D)$ является непрерывным тогда и только тогда, когда сопряженный оператор $T^*: L_p(Y, D) \rightarrow L_p(X, D)$, заданный формулой $T^*(\varphi)(f) = \varphi(Tf)$, где $\varphi \in L_p(Y, D)$ и $f \in C_p(X, D)$, является непрерывным. ■

В частности, пространства $C_p([1, \alpha], D)$ и $C_p([1, \beta], D)$ линейно гомеоморфны тогда и только тогда, когда пространства $L_p([1, \alpha], D)$ и $L_p([1, \beta], D)$ линейно гомеоморфны, т.е. пункты 2 и 3 теоремы 3 эквивалентны.

Вспомогательные утверждения и факты

Импликация 1) $\rightarrow$ 2) нашей теоремы 3 вытекает из следующего общего факта.

Теорема 7. Если свободные булевы топологические группы $B(X)$ и $B(Y)$ топологически изоморфны, то пространства $C_p(X, D)$ и $C_p(Y, D)$ линейно гомеоморфны.

Доказательство. Пусть U есть топологический изоморфизм $B(X)$ на $B(Y)$. Тогда для $x \in X$ элемент $U(x)$ может быть единственным образом записан в виде суммы $y_1(x) + \dots + y_n(x)$, где n зависит от x . Определим оператор $T: C_p(Y, D) \rightarrow C_p(X, D)$ формулой $Tf(x) = f(y_1(x)) + \dots + f(y_n(x))$. Нетрудно проверить, что это искомым линейный гомеоморфизм. ■

Опишем теперь методы установления изоморфизма булевых топологических групп, которые мы используем в этой статье. Следующие две леммы очевидны.

Лемма 8. Если U и V – изоморфизмы свободных булевых топологических групп с конечными нормами, то $\|U \cdot V\| \leq \|U\| \cdot \|V\|$. ■

Пусть K – замкнутое подпространство в X . Обозначим через X/K пространство, полученное из X стягиванием множества K в точку и наделенное сильнейшей вполне регулярной топологией, относительно которой естественная проекция $p: X \rightarrow X/K$ непрерывна. Если пространство X нормально, то X/K является обычным факторпространством пространства X . Легко видеть, что из непрерывности композиции $f \circ p$, где $f: X/K \rightarrow Y$ – некоторое отображение в тихоновское пространство Y , следует непрерывность f . Очевидна следующая

Лемма 9. Пусть X – компакт и K – его замкнутое подмножество. Тогда факторпространство X/K гомеоморфно одноточечной компактификации $\alpha(X/K)$. ■

Для случая банаховых пространств есть стандартная схема построения линейных гомеоморфизмов. При этом используются дополняемые подпространства и порождаемые ими разложения в декартово произведение. Детали можно найти, например, в книге Пелчинского [8]. В пространствах непрерывных функций $C(X)$ линейные проекции порождаются, например, ретракциями в X . Аналогичная схема может быть использована и для свободных топологических групп (см., например, статью Окунева [7]). Изложим вариант этих методов в нужном нам контексте.

Теорема 10. Пусть K – ретракт X и пусть $y_0 = p(K)$, где $p: X \rightarrow X/K$ – естественная проекция. Пусть, далее, $X^+ = X \oplus \{*\}$, где $* \notin X$. Тогда существует топологический изоморфизм $U: B(X^+, *) \rightarrow B((X/K) \oplus K, y_0)$ с нормой $\|U\| \leq 2$.

Доказательство. Пусть r – ретракция X на K . Определим отображение $g: X^+ \rightarrow B((X/K) \oplus K, y_0)$ формулой

$$g(x) = \begin{cases} y_0, & x = *, \\ p(x) + r(x), & x \in X. \end{cases}$$

Так как $p(x) \in X/K$ и $r(x) \in K$, то отображение заданно корректно. Оно непрерывно, ибо непрерывны операция сложения и, кроме того, отображения p и r . Определим также отображение

$$h(y) = \begin{cases} y, & y \in K, \\ x + r(x), & y \in X/K, y = p(x). \end{cases}$$

Отображение h определено корректно, так как при $y \neq y_0$ существует единственное $x \in X$, такое, что $y = p(x)$, а если $y = y_0$ и $y = p(x)$, то $x \in K$, следовательно, $r(x) = x$ и $h(y_0) = *$. Непрерывность h в точках множества K очевидна. Для оставшегося случая рассмотрим отображение $f: X \rightarrow B(X^+, *)$, заданное формулой $f(x) = * + x + r(x)$. Очевидно, что отображение f непрерывно и $f = h \circ p$. Так как $B(X^+, *)$ есть вполне регулярное пространство, то получаем, что h непрерывно в точках X/K . Продолжим g и h до непрерывных гомоморфизмов $B(g)$ и $B(h)$. Несложные вычисления показывают, что эти гомоморфизмы являются взаимнообратными. Остается только положить $U = B(g)$. ■

Следствие 11. Пусть пространство X гомеоморфно пространству $X \oplus \{*\}$, где $*$ $\notin X$. Пусть далее x_1 и x_2 – некоторые точки в X . Тогда $B(X, x_1) \cong B(X, x_2)$, причем норма изоморфизма не превосходит 4.

Доказательство. Пусть $K = \{x\}$ – одноточечное подмножество в X и y – та же точка x , но рассматриваемая как элемент пространства X/K . Тогда пара $((X/K) \oplus K, y)$ гомеоморфна паре (X, x) . Возьмем теперь $K_1 = \{x_1\}$ и $K_2 = \{x_2\}$. По теореме 10 $B(X, x_1) \cong B(X \oplus \{*\}, *)$ и $B(X, x_2) \cong B(X \oplus \{*\}, *)$, причем нормы изоморфизмов не превосходят 2. Осталось применить лемму 9. ■

Замечание 12. Теорема 10 и следствие 11 являются аналогами хорошо известного в функциональном анализе метода разложения линейных топологических пространств в декартовы произведения (восходящего к Банаху и Борсуку – см., например, [12,13]), только перенесенного на свободные булевы топологические группы. Впервые такого рода конструкции для свободных групп использовал Окунев [7]. Фактически наше доказательство является определенной перефразировкой доказательств из [3,5] на язык групп.

Доказательство основной теоремы 3

Лемма 13. Пусть $\{X_i; i \in I\}$ и $\{Y_i; i \in I\}$ – два семейства попарно дизъюнктивных локально компактных пространств. Тогда если $B(a(X_i), \infty) \cong B(a(Y_i), \infty)$ для каждого $i \in I$, то $B(a(\oplus_{i \in I} X_i), \infty) \cong B(a(\oplus_{i \in I} Y_i), \infty)$.

Доказательство. Искомый изоморфизм определяется естественным образом: каждой букве $x \in X_i$ сопоставляем именно то слово, которое ему соответствует при заданном изоморфизме $B(a(X_i), \infty) \cong B(a(Y_i), \infty)$. Это соответствие естественным образом расширяется на слова, составленные из этих букв. ■

Замечание 14. Аналогичное утверждение статьи [4] содержит дополнительное ограничение на координатные изоморфизмы для каждого $i \in I$, а именно, они не должны «удлинять» слова более чем в n раз для некоторого числа n . Здесь этого ограничения нет и этот факт указывает на большое отличие структуры свободных булевых групп от структуры групп $F(X)$ и $A(X)$.

Следующее утверждение легко доказывается и хорошо известно (см., например, [14]).

Лемма 15. Каждое замкнутое подмножество произвольного отрезка ординалов является его ретрактом. ■

Лемма 16. Если α – бесконечный ординал, то пространство $[1, \alpha]$ гомеоморфно пространству $[1, \omega^{\xi \cdot n}]$ при некотором ξ и $n \in [1, \omega)$.

Доказательство. Это утверждение есть известная теорема Мазуркевича – Серпинского (см. [10; 12, предложение 8.6.5]). ■

Из перечисленных выше утверждений следует ключевое

Предложение 17. Пусть K есть замкнутое конфинальное подмножество в отрезке ординалов $[1, \alpha]$, гомеоморфное отрезку $[1, \beta]$, причем наименьший элемент в K бесконечен и строго больше, чем β . Пусть, далее, $h: [1, \beta] \rightarrow K$ – соответствующее гомеоморфное вложение. Тогда $B[1, \alpha] \cong B(a(\oplus_{\gamma \in K}[h(\gamma), h(\gamma+1)), \infty)$. ■

Лемма 18. Пусть α является бесконечным ординалом и $\lambda = |\alpha|$. Тогда

- 1) если $\alpha \geq \lambda^2$, то $B[1, \alpha] \cong B(a(\oplus_\lambda[1, \lambda]), \infty)$;
- 2) если $\lambda \cdot \sigma \leq \alpha < \lambda \cdot \sigma^+$, то $B[1, \alpha] \cong B(a(\oplus_\sigma[1, \lambda]), \infty)$.

Доказательство. 1). Пусть $\alpha = \lambda^2$. Обозначим $K = \{\lambda\sigma; \sigma - \text{кардинал}, 1 \leq \sigma \leq \lambda\}$. Это замкнутое подмножество в отрезке ординалов $[1, \lambda^2]$, гомеоморфное отрезку $[1, \lambda]$. По предложению 17 $B[1, \lambda^2] \cong B(a([1, \lambda^2] \setminus K) \oplus K, \infty)$. Подпространство $[1, \lambda^2] \setminus K$ есть дискретное объединение интервалов $(\lambda \cdot \sigma, \lambda \cdot \sigma^+)$. Одноточечная компактификация интервала $(\lambda \cdot \sigma, \lambda \cdot \sigma^+)$ гомеоморфна отрезку $[1, \lambda]$. Суммируя эти аргументы, приходим к выводу, что $B[1, \lambda^2] \cong B(a(\oplus_\lambda[1, \lambda]) \oplus [1, \lambda], \infty)$, которое можно отождествить с $B(a(\oplus_\lambda[1, \lambda]), \infty)$.

Пусть теперь $\alpha \geq \lambda^2$. Согласно лемме 16, нам достаточно доказать утверждение для ординала α , имеющего вид $\alpha = \omega^\beta \cdot n$. Так как λ является кардиналом, то $\lambda = \omega^\lambda$ (см. [6]) и поэтому $\lambda^2 = \omega^{\lambda \cdot 2}$. Из $\alpha = \omega^\beta \cdot n \geq \lambda^2 = \omega^{\lambda \cdot 2}$ мы заключаем, что $\beta \geq \lambda \cdot 2$. Пусть теорема уже доказана для всех ординалов γ , $\gamma < \beta$. Предположим вначале, что $n = 1$. Тогда рассмотрим замкнутое множество $K = \{\omega^\gamma; \lambda \cdot 2 \leq \gamma \leq \beta\}$ в отрезке $[1, \omega^\beta]$. Применяя предложение 17, приходим к выводу, что $B[1, \omega^\beta] \cong B(a(\oplus_\lambda[1, \lambda]), \infty)$, что и требовалось. Пусть теперь $\alpha = \omega^\beta \cdot n$ и для чисел $\omega^\beta \cdot k$, $k < n$, утверждение уже доказано. Пусть $K = \{\omega^\beta \cdot (n-1) + \gamma; 1 \leq \gamma \leq \omega^\beta\}$. По предложению 17 группа $B[1, \omega^\beta \cdot n]$ изоморфна группе $B(a(\oplus_{\omega^\beta}[1, \omega^\beta \cdot (n-1)]), \infty)$, которая по предположению индукции изоморфна группе $B(a(\oplus_\lambda[1, \lambda]), \infty)$.

Рассмотрим, наконец, случай $\lambda \cdot \sigma \leq \alpha < \lambda \cdot \sigma^+$. Тогда ординал α можно записать в виде $\alpha = \lambda \cdot \sigma + \beta$. Хорошо известно и легко видеть, что отрезок $[1, \lambda \cdot \sigma + \beta]$ гомеоморфен отрезку $[1, \lambda \cdot \sigma]$. Возьмем теперь в качестве K замкнутого множества $K = \{\lambda \cdot \beta; 1 \leq \beta \leq \lambda\}$. Применение предложения 17 приводит, как и выше, к изоморфизму $B[1, \lambda \cdot \sigma] \cong B(a(\oplus_\sigma[1, \lambda]), \infty)$. Что и требовалось доказать. ■

Следующая лемма очевидна.

Лемма 19. Если $B(a(\oplus_\lambda X), \infty) \cong B(X)$, то $B(a(\oplus_\sigma X), \infty) \cong B(X)$ для любого кардинала σ , $1 \leq \sigma < \lambda$. ■

Лемма 20. Пусть λ – сингулярный кардинал. Тогда $B[1, \lambda] \cong B(a(\oplus_\lambda[1, \lambda]), \infty)$.

Доказательство. Так как λ сингулярен, то он является пределом меньшего числа меньших кардиналов. Отсюда следует [6], что существует трансфинитная возрастающая последовательность $\lambda_\beta < \lambda$, $\beta < \alpha$, сходящаяся к λ , причем $\alpha < \lambda$. Обозначим первый элемент этой последовательности через σ , т.е. $\sigma = \lambda_1$. Очевидно, что к λ будет сходиться и последовательность ординалов λ_β^2 . Рассмотрим замкнутое подмножество $K = \{\lambda_\beta^2; \beta < \alpha\} \cup \{\lambda\}$ в отрезке $[1, \lambda]$. Опять, применяя предложение 17, мы придем к выводу, что $B[1, \lambda]$ изоморфно $B(a(\oplus_{\beta < \alpha} X_\beta), \infty)$, где $X_\beta = [\lambda_\beta^2 + 1, \lambda_{\beta+1}^2)$ при $\beta > 1$ и $X_1 = [1, \lambda_1]$. Пространство X_β гомеоморфно $[1, \lambda_{\beta+1}^2)$ и

по первому пункту леммы 18 $B(a(X_\beta), \infty)$ изоморфно группе $B(a(\bigoplus_{\lambda_\beta}[1, \lambda_\beta]), \infty)$.

Другими словами, каждое X_β оказалось эквивалентным одноточечной компактификации дискретной суммы своих копий в числе λ_β экземпляров. По предыдущей лемме оно будет эквивалентно и дискретной сумме с меньшим числом слагаемых, в том числе сумме σ экземпляров. Отсюда мы заключаем, что группа $B[1, \lambda]$ изоморфна группе $B(a(\bigoplus_\sigma[1, \lambda]), \infty)$. Итак, мы доказали, что отрезок $[1, \lambda]$ эквивалентен любой одноточечной компактификации прямой суммы своих копий в любом числе, меньшем самого λ . Но теперь мы можем записать $B[1, \lambda] \cong B(a(\bigoplus_{|\alpha|}[1, \lambda]), \infty)$, где α – как в начале доказательства. Далее, пользуясь тем, что каждое слагаемое $[1, \lambda]$ в этой сумме эквивалентно дизъюнктивной сумме λ_β своих копий, мы выводим, что вся сумма $\bigoplus_{|\alpha|}[1, \lambda]$ эквивалентна дизъюнктивной сумме $\bigoplus_{\beta < \alpha} \bigoplus_{\lambda_\beta}[1, \lambda]$. Но

$\lambda = \sum_{\beta < \alpha} \lambda_\beta$, следовательно, лемма доказана. ■

Теперь рассмотрим оставшийся случай, когда ординалы α и β лежат в промежутке $[\lambda, \lambda^2]$, где λ является регулярным кардиналом.

Лемма 21. Пусть λ является регулярным несчетным кардиналом и σ, τ – кардиналы, такие, что $1 \leq \sigma < \tau \leq \lambda$. Тогда пространства $L_p([1, \lambda\sigma], D)$ нельзя отообразить линейно и непрерывно на $L_p([1, \lambda\tau], D)$.

Доказательство. Предположим, что существует линейная непрерывная сюръекция S пространства $L_p([1, \lambda\sigma], D)$ на пространство $L_p([1, \lambda\tau], D)$. Мы уже знаем, что пространство $L_p[1, \lambda\sigma]$ можно отождествить с пространством $L_p(a(\bigoplus_\sigma[1, \lambda]), \infty)$ и соответственно $L_p([1, \lambda\tau])$ с $L_p(a(\bigoplus_\tau[1, \lambda]), \infty)$. Пусть это сделано. Для каждого ординала α обозначим через L_α (соответственно M_α) множество всех элементов из $L_p(a(\bigoplus_\sigma[1, \lambda]), \infty)$ (соответственно $L_p(a(\bigoplus_\tau[1, \lambda]), \infty)$), в записи которых используются только элементы из $a(\bigoplus_\sigma[1, \alpha])$ (соответственно $a(\bigoplus_\tau[1, \alpha])$). Покажем, что существует замкнутое и конфинальное подмножество A ординалов в $[1, \lambda)$, такое, что $S(L_\alpha) = M_\alpha$ для всех $\alpha \in A$. Для этого установим, что для произвольного бесконечного ординала $\beta < \lambda$, такого, что $\beta \geq \sigma$, существует ординал $\alpha \in A$, такой, что $\alpha > \beta$ и $|\alpha| = |\beta|$. Положим $\gamma_1 = \beta$. Если ординал γ_n уже определен, то выберем γ_{n+1} равным супремуму тех ординалов δ , которые входят в запись элементов $S(x)$ для $x \in L_{\gamma_n}$. Ясно, что ординалы последовательности γ_n имеют одинаковую мощность и образуют неубывающую последовательность. Положим $\alpha = \sup \gamma_n$. По построению ясно, что $\alpha \in A$.

Итак, множество A не пусто и конфинально λ . Замкнутость A следует из непрерывности оператора S . Выберем в A строго возрастающую последовательность $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots$, и пусть $\alpha_\infty = \sup \alpha_n$. В силу замкнутости A элемент α_∞ ему принадлежит. Имеем $S(L_{\alpha_n}) = M_{\alpha_n}$ при $n = 1, 2, \dots, \infty$. Следовательно, $S(L_{\alpha_\infty} \setminus \bigcup_{n=1}^\infty L_{\alpha_n}) = M_{\alpha_\infty} \setminus \bigcup_{n=1}^\infty M_{\alpha_n}$. Но последнее невозможно, так как множества $L_{\alpha_\infty} \setminus \bigcup_{n=1}^\infty L_{\alpha_n}$ имеет мощность σ , а множество $M_{\alpha_\infty} \setminus \bigcup_{n=1}^\infty M_{\alpha_n}$ имеет мощность τ и $\tau > \sigma$. Полученное противоречие доказывает теорему. ■

Совокупность представленных здесь утверждений завершает доказательство теоремы 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гензе Л.В. Свободные булевы топологические группы // Вестник ТГУ. 2006. № 290. С. 11 – 13.
2. Граев М.И. Свободные топологические группы // Изв. АН СССР, сер. матем. 1948. Т. 12. № 3. С. 279 – 324.
3. Гулько С.П., Оськин А.В. Изоморфная классификация пространств непрерывных функций на вполне упорядоченных бикompактах // Функц. анализ и прил. 1975. Т. 9. № 1. С. 61 – 62.
4. Гулько С.П. Свободные топологические группы и пространства непрерывных функций на ординалах // Вестник ТГУ. 2003. Т. 280. С. 34 – 38.
5. Кисляков С.В. Изоморфная классификация пространств непрерывных функций на ординалах // Сиб. матем. журн. 1975. Т. 16. С. 293 – 300.
6. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970.
7. Окунев О.Г. Метод построения М-эквивалентных пространств // 5-й Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее прил. 1985. С. 186.
8. Пелчинский А. Линейные продолжения, линейные усреднения и их применения к линейной топологической классификации пространств непрерывных функций. М.: Мир, 1970.
9. Bessaga C., Pelczynski A. Spaces of continuous functions (IV). On isomorphic classification of spaces of continuous functions // Studia Math. 1960. V. 19. P. 53 – 62.
10. Mazurkiewicz S., Sierpinski W. Contributions a la topologie des ensembles denombrables // Fund. Math. 1920. V. 1. P. 17 – 27.
11. Semadeni Z. Banach spaces non-isomorphic to their Cartesian squares // Bull. Acad. Pol. sci. ser. math., astron. et phys. 1960. V. 8. P. 81 – 84.
12. Semadeni Z. Banach spaces of continuous functions. Warszawa: Monogr. Mat., 1971.
13. Borsuk K. Uber Isomorphie der Funktionalraume // Bull. Int. Acad. Pol. Sci. 1933. P. 1 – 10.
14. Van Douwen E.K. Simultaneous extension of continuous functions. Amsterdam, 1975.

Принята в печать 17.11.07.