

УДК 512.541

С.Я. Гриншпон, Т.А. Ельцова

ГОМОМОРФНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ

В статье исследуется гомоморфная устойчивость прямых произведений абелевых групп.

Ключевые слова: гомоморфный образ, группа гомоморфизмов, узкая группа, сепарабельная группа, прямое произведение.

При изучении групп гомоморфизмов абелевых групп и исследовании вполне характеристических подгрупп интерес представляет следующий вопрос: в каких случаях объединение (теоретико-множественное) гомоморфных образов группы A в группе B является подгруппой группы B .

Группа A называется *гомоморфно устойчивой относительно группы B* , если объединение гомоморфных образов группы A в группе B является подгруппой группы B , то есть если $\bigcup_{\gamma \in \text{Hom}(A, B)} \text{Im } \gamma$ – подгруппа группы B .

В [1] и [2] решен вопрос о гомоморфной устойчивости прямых сум абелевых групп, получено полное описание гомоморфно устойчивых вполне разложимых и жестких групп. Также исследована гомоморфная устойчивость произвольных абелевых групп относительно прямых произведений. В [3] доказаны результаты о гомоморфной устойчивости вполне транзитивных групп.

В настоящей статье исследуется гомоморфная устойчивость прямых произведений абелевых групп без кручения. Везде далее в этой статье под группой будем понимать аддитивно записанную абелеву группу. В большинстве доказанных результатов предполагается неизмеримость множества компонент в прямых произведениях рассматриваемых групп. Это ограничение зависит лишь от аксиоматики теории множеств. Пока неизвестно совместно или нет существование измеримых кардинальных чисел с аксиоматикой ZF – теории множеств.

Напомним определение узкой группы, которое понадобится нам в дальнейшем [4. С.189]. Пусть P обозначает прямое произведение счетного множества бесконечных циклических групп, то есть $P = \prod_{n=1}^{\infty} \langle e_n \rangle$, где $o(e_n) = \infty$. Группа без круче-

ния G называется *узкой*, если при любом гомоморфизме $\eta: P \rightarrow G$ для почти всех n выполняется равенство $\eta e_n = 0$.

Рассмотрим гомоморфную устойчивость прямых произведений групп без кручения относительно узких групп.

Теорема 1. Пусть B – узкая группа и $\{A_i\}_{i \in I}$ – семейство групп без кручения, каждая из которых гомоморфно устойчива относительно группы B , причем множество I неизмеримо. Тогда группа $\prod_{i \in I} A_i$ также гомоморфно устойчива относительно группы B .

Доказательство. Пусть $A = \prod_{i \in I} A_i$. Возьмем произвольные элементы c и d из множества $\bigcup_{\gamma \in \text{Hom}(A, B)} \text{Im } \gamma$. Тогда существуют гомоморфизмы α, β группы A в группу B и элементы a_1, a_2 из группы A , такие, что $c = \alpha a_1, d = \beta a_2$. Обозначим для каждого $i \in I$ через π_i – проекцию группы A на группу A_i , а через ρ_i – координатное вложение группы A_i в группу A .

Пусть α_i и β_i являются ограничениями гомоморфизмов α и β соответственно, на подгруппе $\rho_i \pi_i A$ ($i \in I$). Из теоремы 94.4 ([4, С. 191]) следует, что для гомоморфизмов α и β существуют соответственно конечные подмножества I_α и I_β множества I , такие, что для всякого элемента $a \in A$ имеем $\alpha a = \sum_{i \in I_\alpha} \alpha_i (\rho_i \pi_i a)$ и $\beta a = \sum_{i \in I_\beta} \beta_i (\rho_i \pi_i a)$.

Пусть $I' = I_\alpha \cap I_\beta$. Возможны два случая: 1) $I' = \emptyset$, 2) $I' \neq \emptyset$.

В первом случае рассмотрим следующий гомоморфизм δ группы A в группу B : для всякого элемента $a \in A$ имеем $\delta a = \sum_{i \in I_\alpha} \alpha_i (\rho_i \pi_i a) + \sum_{i \in I_\beta} \beta_i (\rho_i \pi_i a)$. Пусть h – такой элемент группы A : $\pi_i h = \pi_i a_1$, если $i \in I_\alpha$; $\pi_i h = -\pi_i a_2$, если $i \in I_\beta$ и $\pi_i h = 0$, если $i \in I \setminus (I_\alpha \cup I_\beta)$. Имеем

$$\begin{aligned} \delta h &= \sum_{i \in I_\alpha} \alpha_i (\rho_i \pi_i h) + \sum_{i \in I_\beta} \beta_i (\rho_i \pi_i h) = \sum_{i \in I_\alpha} \alpha_i (\rho_i \pi_i a_1) - \\ &\quad - \sum_{i \in I_\beta} \beta_i (\rho_i \pi_i a_2) = \alpha a_1 - \beta a_2 = c - d. \end{aligned}$$

Значит, $c - d \in \text{Im } \delta$ и поэтому $c - d \in \bigcup_{\gamma \in \text{Hom}(A, B)} \text{Im } \gamma$.

Рассмотрим второй случай. Так как $\rho_i \pi_i A \cong A_i$ для всякого $i \in I$, то любая группа $\rho_i \pi_i A$ ($i \in I$) гомоморфно устойчива относительно группы B . Значит, для всякого $i \in I$ существуют гомоморфизм φ_i группы $\rho_i \pi_i A$ в группу B и элемент $a^{(i)} \in A$, такие, что $\alpha_i (\rho_i \pi_i a_1) - \beta_i (\rho_i \pi_i a_2) = \varphi_i (\rho_i \pi_i a^{(i)})$. Пусть $I'_\alpha = I_\alpha \setminus I'$ и $I'_\beta = I_\beta \setminus I'$. Рассмотрим следующий гомоморфизм μ группы A в группу B : для всякого элемента $a \in A$ имеем $\mu a = \sum_{i \in I'_\alpha} \alpha_i (\rho_i \pi_i a) + \sum_{i \in I'_\beta} \beta_i (\rho_i \pi_i a) + \sum_{i \in I'} \varphi_i (\rho_i \pi_i a)$. Пусть h – такой элемент группы A : $\pi_i h = \pi_i a^{(i)}$, если $i \in I'$; $\pi_i h = \pi_i a_1$, если $i \in I'_\alpha$; $\pi_i h = -\pi_i a_2$, если $i \in I'_\beta$ и $\pi_i h = 0$, если $i \in I \setminus (I_\alpha \cup I_\beta)$. Имеем

$$\begin{aligned} \mu h &= \sum_{i \in I'_\alpha} \alpha_i (\rho_i \pi_i h) + \sum_{i \in I'_\beta} \beta_i (\rho_i \pi_i h) + \sum_{i \in I'} \varphi_i (\rho_i \pi_i h) = \sum_{i \in I'_\alpha} \alpha_i (\rho_i \pi_i a_1) - \\ &\quad - \sum_{i \in I'_\beta} \beta_i (\rho_i \pi_i a_2) + \sum_{i \in I'} \varphi_i (\rho_i \pi_i h) = \sum_{i \in I'_\alpha} \alpha_i (\rho_i \pi_i a_1) - \sum_{i \in I'_\beta} \beta_i (\rho_i \pi_i a_2) + \\ &\quad + \sum_{i \in I'} \varphi_i (\rho_i \pi_i a^{(i)}) = \sum_{i \in I'_\alpha} \alpha_i (\rho_i \pi_i a_1) - \sum_{i \in I'_\beta} \beta_i (\rho_i \pi_i a_2) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\sum_{i \in I'} \alpha_i (\rho_i \pi_i a_1) - \sum_{i \in I'} \beta_i (\rho_i \pi_i a_2) \right) = \left(\sum_{i \in I'_\alpha} \alpha_i (\rho_i \pi_i a_1) + \sum_{i \in I'} \alpha_i (\rho_i \pi_i a_1) \right) - \\
& - \left(\sum_{i \in I'_\beta} \beta_i (\rho_i \pi_i a_2) + \sum_{i \in I'} \beta_i (\rho_i \pi_i a_2) \right) = \sum_{i \in I'_\alpha} \alpha_i (\rho_i \pi_i a_1) - \sum_{i \in I'_\beta} \beta_i (\rho_i \pi_i a_2) = \\
& = \alpha a_1 - \beta a_2 = c - d.
\end{aligned}$$

Итак, $c - d \in \text{Im } \mu$ и поэтому $c - d \in \bigcup_{\gamma \in \text{Hom}(A, B)} \text{Im } \gamma$.

Таким образом, группа A гомоморфно устойчива относительно группы B .

Для исследования гомоморфной устойчивости прямого произведения сепарабельных групп без кручения нам понадобится результат о гомоморфной устойчивости сепарабельных групп [4. С. 7], то есть групп, в которых каждое конечное подмножество элементов содержится в прямом слагаемом этой группы, являющейся прямой суммой групп ранга 1.

Теорема 2 (см. также [2]). Всякая сепарабельная группа гомоморфно устойчива относительно любой группы.

Доказательство. Докажем вначале, что любая группа ранга 1 гомоморфно устойчива относительно любой группы.

Всякая группа ранга 1 изоморфна либо ненулевой подгруппе квазициклической группы $Z(p^\infty)$ для некоторого простого числа p , либо ненулевой подгруппе группы $\mathbf{Q}$ всех рациональных чисел.

Пусть A — циклическая p -группа, B — произвольная группа, $a_1, a_2 \in \bigcup_{\alpha \in \text{Hom}(A, B)} \text{Im } \alpha$. Тогда существуют такие гомоморфизмы $\beta, \gamma \in \text{Hom}(A, B)$,

что $a_1 = \beta b_1$ и $a_2 = \gamma b_2$ для некоторых элементов $b_1, b_2 \in A$. Так как элементы b_1, b_2 принадлежат группе A , то их можно представить в виде: $b_1 = ka$, $b_2 = ma$, где a — образующий элемент группы A , а k и m — целые числа. Рассмотрим разность $a_1 - a_2$. Имеем $a_1 - a_2 = \beta b_1 - \gamma b_2 = \beta(ka) - \gamma(ma) = (k\beta - m\gamma)(a)$. $\beta, \gamma \in \text{Hom}(A, B)$, поэтому разность $k\beta - m\gamma$ также принадлежит группе $\text{Hom}(A, B)$. Обозначим эту разность через η . Тогда имеем $a_1 - a_2 = \eta a$. Значит, $a_1 - a_2 \in \bigcup_{\alpha \in \text{Hom}(A, B)} \text{Im } \alpha$, поэтому

A является гомоморфно устойчивой относительно любой группы.

Если $A \cong Z(p^\infty)$, то, учитывая локальную цикличность группы A и проводя рассуждения, аналогичные вышеприведенным, получим, что A — гомоморфно устойчива относительно любой группы.

Пусть A — группа без кручения ранга 1; B — произвольная группа; $a_1, a_2 \in \bigcup_{\alpha \in \text{Hom}(A, B)} \text{Im } \alpha$. Тогда существуют такие гомоморфизмы β и γ из

$\text{Hom}(A, B)$, что $a_1 = \beta b_1$ и $a_2 = \gamma b_2$, для некоторых элементов b_1, b_2 из группы A . Пусть b — некоторый ненулевой элемент группы A . Так как A — группа ранга 1, то существуют такие взаимно простые целые числа m и n , что $mb = nb_1$ и существуют такие взаимно простые целые числа k и l , что $kb = lb_2$. Элемент b делится на числа n и l , то есть уравнения $nx = b$ и $lx = b$ разрешимы в группе A . Итак,

$b_1 = m \frac{b}{n}$; $b_2 = k \frac{b}{l}$. Не умаляя общности, можно считать, что числа n и l – натуральные. Пусть наименьшее общее кратное чисел n и l равно r и $\frac{r}{n} = n_1$; $\frac{r}{l} = l_1$ ($n_1, l_1 \in \mathbb{N}$). Так как элемент b делится на n и на l , то элемент b делится на r . Пусть $c = \frac{b}{r}$. Тогда $b_1 = mn_1c$, $b_2 = kl_1c$. Имеем $a_1 - a_2 = \beta(b_1) - \gamma(b_2) = \beta(mn_1c) - \gamma(kl_1c) = (mn_1\beta - kl_1\gamma)(c)$. Так как гомоморфизмы β и γ из $\text{Hom}(A, B)$, то разность $mn_1\beta - kl_1\gamma$ также принадлежит этой группе. Значит, $a_1 - a_2 \in \bigcup_{\alpha \in \text{Hom}(A, B)} \text{Im } \alpha$. Следова-

тельно, группа A является гомоморфно устойчивой относительно любой группы.

Пусть теперь A – сепарабельная группа, B – произвольная группа и $c, d \in \bigcup_{\alpha \in \text{Hom}(A, B)} \text{Im } \alpha$. Существуют такие гомоморфизмы $\beta, \gamma \in \text{Hom}(A, B)$ и эле-

менты $a_1, a_2 \in A$, что $c = \beta a_1$, $d = \gamma a_2$. Вкладываем элементы a_1 и a_2 в прямое слагаемое A_1 группы A , являющееся прямой суммой групп ранга 1 ($A = A_1 \oplus A_2$). Пусть β' – ограничение гомоморфизма β на A_1 , а γ' – ограничение гомоморфизма γ на A_1 . Имеем $c = \beta' a_1$, $d = \gamma' a_2$, где $\beta', \gamma' \in \text{Hom}(A_1, B)$, и поэтому $c, d \in \bigcup_{\alpha \in \text{Hom}(A_1, B)} \text{Im } \alpha$.

Так как по лемме 5 [2. С. 21] и теореме 1 [2. С. 18] A_1 – гомоморфно устойчива относительно любой группы, то $c - d \in \bigcup_{\alpha \in \text{Hom}(A_1, B)} \text{Im } \alpha$. Следовательно, существуют

$\delta' \in \text{Hom}(A_1, B)$ и элемент $a_3 \in A_1$, такие, что $c - d = \delta' a_3$. Рассмотрим гомоморфизм $\delta \in \text{Hom}(A, B)$, действующий следующим образом: $\delta a = \delta' \pi a$ для всякого элемента $a \in A$, где π – проекция группы A на прямое слагаемое A_1 . Имеем $c - d = \delta a_3$ и, значит, $c - d \in \bigcup_{\alpha \in \text{Hom}(A, B)} \text{Im } \alpha$. Следовательно, A – гомоморфно

устойчива относительно любой группы.

Из теорем 1 и 2 получаем такой результат.

Теорема 3. Прямое произведение сепарабельных групп без кручения (в частности, любая векторная группа) с неизмеримым множеством компонент является гомоморфно устойчивой группой относительно любой редуцированной узкой группы.

Учитывая, что всякая счетная редуцированная группа без кручения является узкой [5], получаем такое

Следствие 4. Прямое произведение сепарабельных групп без кручения (в частности, любая векторная группа) с неизмеримым множеством компонент является гомоморфно устойчивой группой относительно любой счетной редуцированной группы без кручения.

Пусть p – произвольное простое число. Обозначим через J_p – аддитивную группу кольца целых p -адических чисел. Докажем следующий результат.

Теорема 5. Пусть B – группа без кручения, не содержащая подгрупп, изоморфных одной из групп P или J_p , где p – произвольное простое число. Если

$\{A_i\}_{i \in I}$ – семейство групп без кручения, каждая из которых гомоморфно устойчива относительно группы B и множество I неизмеримо, то группа $\prod_{i \in I} A_i$ также гомоморфно устойчива относительно группы B .

Доказательство. Пусть $A = \prod_{i \in I} A_i$. Рассмотрим вначале случай, когда B – редуцированная группа. Тогда B не содержит никакой подгруппы, изоморфной одной из групп Q , P или J_p , где p – произвольное простое число. Значит, B – узкая группа [6] и поэтому по теореме 1 группа A гомоморфно устойчива относительно группы B .

Пусть теперь B – нередуцированная группа. Тогда $B = D \oplus B'$, где D – делимая группа, B' – редуцированная группа. Так как B' не содержит подгрупп, изоморфных одной из групп Q , P или J_p , то B' – узкая группа. Пусть π_1, π_2 – проекции группы B на прямые слагаемые D и B' соответственно. Если $\alpha, \beta \in \text{Hom}(A, B)$, то $\pi_1\alpha, \pi_1\beta \in \text{Hom}(A, D)$; $\pi_2\alpha, \pi_2\beta \in \text{Hom}(A, B')$. Для любых элементов a_1 и a_2 из группы A имеем $\alpha a_1 = \pi_1\alpha a_1 + \pi_2\alpha a_1$, $\beta a_2 = \pi_1\beta a_2 + \pi_2\beta a_2$. Тогда $\alpha a_1 - \beta a_2 = (\pi_1\alpha a_1 - \pi_1\beta a_2) + (\pi_2\alpha a_1 - \pi_2\beta a_2)$. Так как $\pi_2\alpha a_1 - \pi_2\beta a_2 \in B'$ и B' – узкая группа, то по теореме 1 существуют гомоморфизм $\lambda \in \text{Hom}(A, B')$ и элемент $a_3 \in A$, такие, что $\pi_2\alpha a_1 - \pi_2\beta a_2 = \lambda a_3$ (если $\pi_2\alpha a_1 - \pi_2\beta a_2 = 0$, то полагаем $\lambda = 0$, а в качестве a_3 берем произвольный ненулевой элемент группы A). Существует гомоморфизм $\xi: \langle a_3 \rangle \rightarrow D$, такой, что $\xi a_3 = \pi_1\alpha a_1 - \pi_1\beta a_2$. В силу инъективности группы D ([7], теорема 27.1. С.119) гомоморфизм ξ можно продолжить до гомоморфизма η группы A в группу D . Итак, имеем $\alpha a_1 - \beta a_2 = \eta a_3 + \lambda a_3$. Так как гомоморфизмы η и λ можно рассматривать как гомоморфизмы группы A в группу B (D и B' – подгруппы группы B), то $\alpha a_1 - \beta a_2 = (\eta + \lambda)a_3$, где $\eta + \lambda \in \text{Hom}(A, B)$. Значит, группа A гомоморфно устойчива относительно группы B .

Следствие 6. Прямое произведение сепарабельных групп без кручения (в частности, любая векторная группа) с неизмеримым множеством компонент является гомоморфно устойчивой относительно любой группы без кручения, не содержащей подгрупп, изоморфных одной из групп P или J_p , где p – произвольное простое число.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гриншпон С.Я., Ельцова Т.А. Гомоморфно устойчивые абелевы группы // Вестник ТГУ. 2003. № 280. С. 31 – 33.
2. Гриншпон С.Я., Ельцова Т.А. Гомоморфные образы абелевых групп // Фундаментальная и прикладная математика. 2007. Т. 13. № 3. С. 17 – 24.
3. Гриншпон С.Я., Ельцова Т.А. Гомоморфная устойчивость и вполне транзитивность абелевых групп // Вестник ТГУ. 2007. № 298. С. 114 – 116.
4. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1977. Т. 2. 416 с.
5. Sasiada E. Proof that every countable and reduced torsion-free abelian group is slender // Bull. Acad. Polon. Sci. 1959. V.7. P. 143 – 144.
6. Nunke R.J. Slender groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1961. V. 67. P. 274 – 275.
7. Nunke R.J. Slender groups // Acta. Sci. Math. Szeged. 1962. V. 23. P. 67 – 73.
8. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1. 335 с.