

УДК 621.372

А.И. Литвин

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПРОБЛЕМЕ АДАМАРА

Указаны алгоритмы построения матриц Адамара в виде разреженных матриц.

Ключевые слова: матрица Адамара, кронекеровское произведение

Определение 1. Матрицей Адамара называется квадратная матрица порядка N , элементами которой являются числа ± 1 , удовлетворяющие условию

$$H_h(N) H_h^T(N) = NE_N,$$

где $H_h(N)$ – матрица Адамара, $H_h^T(N)$ – сопряжённая матрица для $H_h(N)$, N – порядок матрицы, E_N – единичная матрица порядка N [1 – 6]. Термином КПМ обозначаем кронекеровское произведение матриц.

Матрицу Адамара можно нормализовать, т.е. элементарными действиями (перестановкой строк и столбцов, умножением на -1 строк и столбцов) привести к матрице, у которой первая строка и первый столбец состоят из единиц.

В одной из работ Ж. Адамара было установлено: если

$$A = (a_{ij})_{ij=1}^N,$$

где $|a_{ij}| \leq 1$, a_{ij} – вещественные числа, то

$$|\det A| \leq N^{\frac{N}{2}},$$

причём равенство достигается только для матриц Адамара и только для них.

Очевидно, что с этим результатом связано название матриц Адамара.

Позже было установлено, что порядки матриц Адамара кратны четырём, кроме одной матрицы

$$H(2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(см.[6,7]). Некоторые проблемы, связанные с матрицами Адамара, до сих пор не решены. Так, неизвестно, существуют ли матрицы Адамара порядка N для всех N , кратных четырём. Эта задача получила название проблемы Адамара.

В данной работе указаны алгоритмы построения матриц Адамара порядков кратных четырём, а также способы их факторизации.

Рассмотрим сначала способы построения матриц Адамара порядков $N=2^n$, где n – натуральное число. В этом случае матрицы Адамара можно получить, используя кронекеровские и обобщённые кронекеровские произведения матриц. Например, существует рекуррентный способ построения матриц Уолша – Адамара порядка $N=2^n$:

$$H_h(N) = \otimes^n H(2) = H(2) \otimes H(2) \dots \otimes H(2),$$

где $\otimes^n$ – n -я кронекеровская степень матрицы $H(2)$ [1 – 3, 7].

В работах [1 – 3] описан аналогичный алгоритм Уолша – Пэли и Уолша – Качмана.

Обозначим строки матрицы B через $B_1, B_2, \dots, B_N$, а столбцы – символами $B^{(1)}, B^{(2)}, \dots, B^{(N)}$.

Определение 2 ([1 – 3]). Кронекеровским произведением матриц A и B по строкам называется матрица вида

$$C = A \bar{\otimes} B = \begin{bmatrix} A \otimes B_1 \\ A \otimes B_2 \\ \dots\dots\dots \\ A \otimes B_N \end{bmatrix}.$$

Если матрица A имеет порядок m , а матрица B – порядок n , то матрица C имеет порядок mn .

Определение 3 ([1 – 3]). Кронекеровским произведением матриц A и B по столбцам называется матрица C вида

$$C = A \bar{\otimes} B = [A \otimes B^{(1)} A \otimes B^{(2)} \dots A \otimes B^{(N)}].$$

Определение 4. Почти кронекеровским произведением матриц A и B по строкам называется матрица C вида $C = A \otimes B$, в которой матрица A кронекеровски перемножается на первую строку матрицы B в прямом порядке, а на вторую строку матрицы B в обратном порядке и.т.д.

Пример.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Теорема 1 [1 – 3, 7]. Справедливы равенства

$$H_h(N) = \otimes^n H(2),$$

$$H_p(N) = \bar{\otimes}^n H(2) = \bar{\otimes}^n H(2),$$

$$H_w(N) = \otimes^n H(2),$$

где $H_h(N)$, $H_p(N)$, $H_w(N)$ – матрицы Уолша – Адамара, Уолша – Пэли, Уолша – Качмана соответственно.

Более подробно построение и факторизация матриц Адамара описаны в работах [1 – 4].

Определение и свойства кронекеровских произведений матриц имеются в работах [5 – 7].

Построение матриц Адамара при $N \neq 2^n$ представляет определённые трудности (см. [4, 6]).

Будем производить построение матриц Адамара в факторизованном виде, то есть

$$H_h(N) = X_1 \otimes H_1 + X_2 \otimes H_2,$$

где H_1 и H_2 – матрицы Адамара второго порядка, удовлетворяющие условию

$$H_1^T H_2 + H_2^T H_1 = 0,$$

а X_1 и X_2 – разряженные матрицы, которые удовлетворяют условию

$$X_1 X_2^T - X_2 X_1^T = 0.$$

Выберем пары матриц Адамара второго порядка, удовлетворяющие условию

$$H_1^T H_2 + H_2^T H_1 = 0.$$

Например,

$$H_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad H_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad H_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Лемма 1. Указанные выше пары матриц удовлетворяют равенству

$$H_1^T H_2 + H_2^T H_1 = 0.$$

Справедливость этой леммы проверяется непосредственно. Заметим, что эти матрицы являются симметричными.

Можно указать и другие пары таких матриц. Например,

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad H_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Образующие матриц X_1 и X_2 выберем в виде

$$X_1 = \begin{bmatrix} A & E \\ E & -A \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 & B \\ -B & 0 \end{bmatrix},$$

где матрицы A , B и E – матрицы порядка $\frac{N}{4}$ (напомним, что N кратно четырём).

Рассмотрим следующие последовательности чисел:

n_1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27
$N/2$	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54
N	12	20	28	36	44	52	60	68	76	84	92	100	108

и т.д.

Замечание к таблице. Пусть $n_1=1$, тогда $N=4$. Матрица $H_h(4)$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Последовательность чисел n_1 состоит из всех нечётных чисел, начиная с 3. Очевидно, что этого множества чисел достаточно для построения матриц Адамара порядка N , где $N \neq 2^n$, N кратно четырём. Если $n_1 = 2, 4, 8, \dots$, то $N = 8, 16, 32, \dots$, т.е. $N = 2^n$. Если $n_1 = 6$, то $H_h(24) = H_h(12) \otimes H(2)$, если $n_1 = 10$, то $H_h(40) = H_h(20) \otimes H(2)$, и т.д.

Матрица X_1 по построению является симметрической, а X_2 – кососимметрической. Обе они – блочные матрицы. Блоки A и B будем выбирать симметрическими

и циркулярными (со сдвигом влево или вправо). Пусть матрицы H_1 и H_2 удовлетворяют лемме 1. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Имеют место равенства

$$H_h(N)H_h^T(N) = [X_1^2 - X_2^2] \otimes \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} H_h(N)H_h^T(N) &= (X_1 \otimes H_1 + X_2 \otimes H_2)(X_1 \otimes H_1 + X_2 \otimes H_2)^T = \\ &= (X_1 \otimes H_1 + X_2 \otimes H_2)(X_1^T \otimes H_1^T + X_2^T \otimes H_2^T). \end{aligned}$$

В этом выражении используется тот факт, что $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$. Воспользуемся также основным свойством КПМ: $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$ при условии, что выражения AC и BD существуют. Таким образом,

$$\begin{aligned} H_h(N)H_h^T(N) &= X_1X_1^T \otimes H_1H_1^T + X_2X_1^T \otimes H_2H_1^T + X_1X_2^T \otimes H_1H_2^T + X_2X_2^T \otimes H_2H_2^T = \\ &= (X_1^2 + X_2X_2^T) \otimes \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + (X_2X_1^T - X_1X_2^T) \otimes \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= [X_1^2 - X_2^2] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = [X_1^2 - X_2^2] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

При этом, в силу построения матриц X_1 и X_2 , получаем соотношение

$$X_2X_1^T - X_1X_2^T = X_2X_1 + X_1X_2 = 0.$$

Обратим внимание на равенство

$$\begin{aligned} [X_1X_2 + X_2X_1] &= \begin{bmatrix} A & E \\ E & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B \\ -B & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B \\ -B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & E \\ E & -A \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -B & AB \\ AB & B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & -BA \\ -BA & -B \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Полученное выражение равно нулю при условии, что матрицы A и B перестановочны. Но это свойство у матриц A и B имеется, так как по предположению эти матрицы симметрические и циркулярные. С другой стороны,

$$X_1^2 - X_2^2 = \begin{bmatrix} A^2 + B^2 + E & 0 \\ 0 & A^2 + B^2 + E \end{bmatrix}.$$

Матрица правой части этого равенства должна иметь вид

$$\begin{bmatrix} \frac{N}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{N}{2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{N}{2} \end{bmatrix} = \frac{N}{2} E_{N/2}.$$

Теперь задача построения матриц Адамара сводится к построению матриц A и B определённого вида. Предположим дополнительно, что матрицы A и B таковы, что

$$A^2 = \begin{bmatrix} \frac{N}{4} & a & \dots & a \\ a & \frac{N}{4} & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & \dots & \frac{N}{4} \end{bmatrix}, \quad B^2 = \begin{bmatrix} \frac{N}{4}-1 & -a & \dots & -a \\ -a & \frac{N}{4}-1 & \dots & -a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a & -a & \dots & \frac{N}{4}-1 \end{bmatrix}.$$

При этих предположениях, как легко проверить, справедливо равенство

$$X_1^2 - X_2^2 = \frac{N}{2} E_{N/2}.$$

Указанные выше матрицы A и B найти не так уж трудно. Покажем это на примерах.

Пусть $n_1=3$, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$,

тогда $A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,

$$X_1^2 - X_2^2 = 6E_6.$$

Матрицы A и B – циркулярные, то есть их строки получаются из первой строки сдвигом вправо или влево. При сдвиге влево получим

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Матрицы A и B будем записывать, указывая только первую строку. Матрицы A формируются просто, а в отношении матриц B сделаем следующее замечание. В матрице B на первой позиции первой строки стоит 0, а на второй и последней позициях (кроме $n_1=3$) находятся 1, а величины «-1» расположены с таким расчётом, чтобы из первой строки получить при сдвиге вправо симметрическую матрицу. Число элементов «-1» должно быть чётным и равняться целому чётному числу $\left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor$. Например, при $n_1 = 5$ чётное число $\left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor$ равно 2.

Вообще, при различных значениях n_1 получим такие значения:

$$n_1 = 7 \quad r\left[\frac{7}{2}\right] = 2,$$

$$n_1 = 9 \quad r\left[\frac{9}{2}\right] = 4,$$

$$n_1 = 11 \quad r\left[\frac{11}{2}\right] = 4,$$

$$n_1 = 13 \quad r\left[\frac{13}{2}\right] = 6$$

и т.д.

Приведём примеры формирования матриц A и B .

$n_1 = 5$	$A = [1, -1, -1, -1, -1]$ $B = [0, 1, -1, -1, 1]$
$n_1 = 7$	$A = [1, -1, -1, -1, -1, -1, -1]$ $B = [0, 1, -1, 1, 1, -1, 1]$
$n_1 = 9$	$A = [1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1]$ $B = [0, 1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1]$
$n_1 = 11$	$A = [1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1]$ $B = [0, 1, -1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, 1]$
$n_1 = 13$	$A = [1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1]$ $B = [0, 1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, 1]$
$n_1 = 15$	$A = [1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1]$ $B = [0, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, 1]$

и т.д.

Из леммы и теоремы 2 и вышеприведённых рассуждений следует

Теорема 3. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} H_h(N)H_h^T(N) &= (X_1 \otimes H_1 + X_2 \otimes H_2)(X_1 \otimes H_1 + X_2 \otimes H_2)^T = \\ &= \frac{N}{2} \text{diag } E_{\frac{N}{2}} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = NE_N. \end{aligned}$$

Алгоритмы формирования матриц A и B , а следовательно, и матриц X_1 , X_2 , могут быть различными.

Пример.

$$\begin{aligned} &\left(X_1 \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + X_2 \otimes \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Для получения матриц Уолша – Пэли и Уолша – Качмана можно использовать обобщенное кронекеровское произведение матриц:

$$H_h(N) = X_1 \bar{\otimes} H_1 + X_2 \bar{\otimes} H_2, \quad H_h(N) = X_1 \otimes H_1 + X_2 \otimes H_2.$$

Представление матриц Адамара в факторизованном виде сокращает количество операций. Например, алгоритм быстрого преобразования Адамара для вычисления спектральных коэффициентов последовательности длиной $N=12$ требует всегда 72 операции (сложений и вычитаний) вместо 177 [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Быков В.И., Литвин А.И., Иванов В.А., Росошек С.К. и др. Обобщенные кронекеровские произведения матриц и их применения // Электронное моделирование. 1991. Т. 13. № 5. С. 14 – 19.
2. Литвин А.И., Писаренко Н.А., Росошек С.К. Обобщенные кронекеровские произведения матриц и их применения // Исследования по математическому анализу и алгебре. Томск: Изд-во ТГУ, 2001. Вып. 3. С. 240 – 251.
3. Литвин А.И., Симонженков С.Д. Ортогональные дискретные преобразования и их применение для решения научно-технических задач. Томск: Изд-во ТГУ, 2000. 150 с.
4. Лабунец В.Г. Алгебраическая теория сигналов и систем. Красноярск: Изд-во КГУ, 1984. 244 с.
5. Холл М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970. 424 с.
6. Агаян С.С. Оптимальные алгоритмы быстрых ортогональных преобразований и их реализация на ЭВМ // Кибернетика и вычислительная техника. М.: Наука, 1986. С. 231 – 319.
7. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1967. 315 с.

Принята в печать 10.04.08.