

УДК 515.126 + 515.122

М.А. Патракеев

НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗОРГЕНФРЕЯ НА ВЕЩЕСТВЕННУЮ ПРЯМУЮ

В статье изучаются различные типы непрерывных отображений прямой Зоргенфрея S (вещественной прямой с топологией, базу которой образует семейство всех полуинтервалов, открытых справа) на вещественную прямую R . Построено непрерывное открытое отображение S на R . С другой стороны, доказано, что для любого непрерывного замкнутого отображения из S в R образ не более чем счетен.

Ключевые слова: непрерывное отображение, открытое отображение, замкнутое отображение, прямая Зоргенфрея, вещественная прямая.

Прямая Зоргенфрея S – это вещественная прямая с топологией, базу которой образует семейство всех полуинтервалов, открытых справа. В статье изучаются непрерывные отображения между прямой Зоргенфрея и вещественной прямой R . Поскольку образ связного пространства связан, а прямая Зоргенфрея наследственно несвязна, то не существует непрерывного отображения вещественной прямой ни на какое подмножество прямой Зоргенфрея, отличное от одноточечного. Что касается отображений из S в R , поскольку тождественное отображение S на R непрерывно, то прямая Зоргенфрея уплотняется (т.е. отображается непрерывно и инъективно) на вещественную прямую. Также в 1984 г. Д.В. Моторовым доказано, что метрические образы прямой Зоргенфрея – это в точности A -множества [1]. А в 1988 г. С.А. Светличным – что открытые метрические образы прямой Зоргенфрея полны по Чеху [2].

В работе строится непрерывное открытое отображение прямой Зоргенфрея на вещественную прямую (теорема 1). Также доказывается, что не существует непрерывного замкнутого отображения прямой Зоргенфрея ни на вещественную прямую, ни на отрезок (теорема 16). В конце статьи показано, что существует уплотнение прямой Зоргенфрея на вещественный отрезок (замечание 17).

В статье используются обозначения и терминология, принятые в книге “Общая топология” Р. Энгелькина [3]. Символом N обозначается множество натуральных чисел, символом $f|A$ – сужение отображения f на множество A .

Теорема 1. *Существует непрерывное открытое отображение прямой Зоргенфрея S на вещественную прямую R .*

Доказательство. Известно, что прямая Зоргенфрея гомеоморфна своему подпространству $S_0 = [0, 1) \subset S$. Действительно, поскольку любой полуинтервал вида $[x, y)$ в S является открыто-замкнутым множеством, то прямую Зоргенфрея можно представить в виде счетной прямой суммы полуинтервалов вида $[z, z + 1)$, где z – целое число. Точно так же S_0 можно разбить на счетную сумму непересекающихся открыто-замкнутых полуинтервалов вида $[1 - 1/n, 1 - 1/(n+1))$, где $n \in N$, откуда и следует что S_0 гомеоморфно S . Нам будет удобнее работать с S_0 , чем с S , – мы построим непрерывное открытое отображение пространства S_0 на интервал $(-1, 1) \subset R$, тем самым теорема 1 будет доказана.

Для $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $n_1, \dots, n_k \in \mathbf{N}$ индукцией по k определим числа $a_{n_1 \dots n_k}$, $l_{n_1 \dots n_k}$, $b_{n_1 \dots n_k}$, $h_{n_1 \dots n_k} \in \mathbf{R}$. Отметим, что при $k=0$ мы считаем, что $a_{n_1 \dots n_k}$ есть a , $b_{n_1 \dots n_k}$ есть b , и т.д. для l , h и других аналогичных далее вводимых обозначений. При $k=0$ положим $a_{n_1 \dots n_k} = a = 0$, $l_{n_1 \dots n_k} = l = 1$, $b_{n_1 \dots n_k} = b = 0$, $h_{n_1 \dots n_k} = h = 3/4$. При $k > 0$ и $m \in \mathbf{N}$ положим

$$l_{n_1 \dots n_k, m} = \frac{l_{n_1 \dots n_k}}{2^m}; \quad (1)$$

$$a_{n_1 \dots n_k, m} = a_{n_1 \dots n_k} + \sum_{i=1}^{m-1} l_{n_1 \dots n_k, i}; \quad (2)$$

$$h_{n_1 \dots n_k, m} = (1/2) \cdot (h_{n_1 \dots n_k} + (1/4) \cdot (a_{n_1 \dots n_k, m} - a_{n_1 \dots n_k})); \quad (3)$$

$$b_{n_1 \dots n_k, m} = b_{n_1 \dots n_k} + (-1)^{m+1} \cdot h_{n_1 \dots n_k, m}. \quad (4)$$

Определим множества $T_{n_1 \dots n_k} \subset S_0$ и $T_{n_1 \dots n_k, \dots} \subset S_0$. При $(n_1, \dots, n_i, \dots) \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$, $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ положим

$$T_{n_1 \dots n_k} = [a_{n_1 \dots n_k}, a_{n_1 \dots n_k} + l_{n_1 \dots n_k}),$$

$$T_{n_1 \dots n_i, \dots} = \bigcap_{m \in \mathbf{N} \cup \{0\}} T_{n_1 \dots n_m}.$$

Таким образом при $k=0$ мы имеем $T_{n_1 \dots n_k} = [0, 1) = S_0$. Отметим некоторые свойства построенных нами чисел и множеств.

Лемма 2. Для любых $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $n_1, \dots, n_k \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N}$ выполняются условия (а) – (h):

- (а) Семейство $\{T_{n_1 \dots n_k, i}\}_{i \in \mathbf{N}}$ является разбиением множества $T_{n_1 \dots n_k}$.
- (б) Длина полуинтервала $T_{n_1 \dots n_k}$ равна $l_{n_1 \dots n_k}$ и при этом $l_{n_1 \dots n_k} \leq 1/2^k$.
- (с) Замыкание множества $T_{n_1 \dots n_k, m}$ в топологии вещественной прямой $\mathbf{R}$ содержится в множестве $T_{n_1 \dots n_k}$.

(d) $l_{n_1 \dots n_k} \geq 0$.

(e) $h_{n_1 \dots n_k} \geq 0$.

(f) $h_{n_1 \dots n_k, m} = (1/2) \cdot (h_{n_1 \dots n_k} + (1/4) \cdot l_{n_1 \dots n_k} \cdot (1 - \frac{1}{2^{m-1}}))$.

(g) $h_{n_1 \dots n_k, m} \leq (1/2) \cdot (h_{n_1 \dots n_k} + \frac{l_{n_1 \dots n_k}}{4})$.

(h) $\lim_{i \rightarrow \infty} a_{n_1 \dots n_k, i} = a_{n_1 \dots n_k} + l_{n_1 \dots n_k}$.

Доказательство. Условия (а) – (f) и (h) очевидны, условие (g) следует из условий (f) и (d). ■

Лемма 3. (а) Для любой последовательности $(n_1, \dots, n_i, \dots) \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ мощность множества $T_{n_1 \dots n_i, \dots}$ равна 1.

(б) Для любой точки $x \in [0, 1)$ найдется единственная последовательность $(n_1, \dots, n_i, \dots) \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$, такая, что $T_{n_1 \dots n_i, \dots} = \{x\}$.

Доказательство. Достаточно воспользоваться условиями (а) – (с) леммы 2 и тем фактом, что $T_{n_1 \dots n_k} = [0, 1)$ при $k = 0$. ■

Лемма 4. Для любых $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n_1, \dots, n_{2k+1} \in \mathbb{N}$ выполняются следующие условия:

$$(a) \ 0 \leq h_{n_1 \dots n_{2k+1}} \leq \frac{1}{2^k}.$$

$$(b) \ 0 \leq h_{n_1 \dots n_{2k}} \leq \frac{1}{2^k}.$$

Доказательство. Докажем эту лемму индукцией по k . База индукции при $k = 0$ очевидна. Предположим, что утверждение леммы выполняется при $k = n$, и докажем его для $k = n+1$. Применив два раза подряд условия (b), (d), (e), (g) леммы 2, получаем

$$\begin{aligned} h_{n_1 \dots n_{2n+2}} &\leq (1/2) \cdot (h_{n_1 \dots n_{2n+1}} + \frac{1}{2^{2n+1} \cdot 2^2}) \leq (1/2) \cdot ((1/2) \cdot (h_{n_1 \dots n_{2n}} + \frac{1}{2^{2n} \cdot 2^2}) + \frac{1}{2^{2n+1} \cdot 2^2}) \leq \\ &\leq |\text{по предположению индукции}| \leq (1/2) \cdot ((1/2) \cdot (\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{2n+2}}) + \frac{1}{2^{2n+3}}) = \\ &= (1/2) \cdot (\frac{2^{n+2} + 1}{2^{2n+3}} + \frac{1}{2^{2n+3}}) = \frac{2^{n+2} + 2^1}{2^{2n+4}} \leq |\text{так как } n \geq 0| \leq \frac{2^{n+3}}{2^{2n+4}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Аналогично для первого неравенства имеем

$$\begin{aligned} h_{n_1 \dots n_{2n+3}} &\leq (1/2) \cdot (h_{n_1 \dots n_{2n+2}} + \frac{1}{2^{2n+2} \cdot 2^2}) \leq \\ &\leq (1/2) \cdot ((1/2) \cdot (h_{n_1 \dots n_{2n+1}} + \frac{1}{2^{2n+1} \cdot 2^2}) + \frac{1}{2^{2n+2} \cdot 2^2}) \leq |\text{по предположению индукции}| \\ &\leq (1/2) \cdot ((1/2) \cdot (\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{2n+3}}) + \frac{1}{2^{2n+4}}) = (1/2) \cdot (\frac{2^{n+3} + 1}{2^{2n+4}} + \frac{1}{2^{2n+4}}) = \frac{2^{n+3} + 2^1}{2^{2n+5}} \leq \\ &|\text{так как } n \geq 0| \leq \frac{2^{n+4}}{2^{2n+5}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Построим последовательность $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ непрерывных ступенчатых функций из S_0 в $\mathbb{R}$ (что то же самое – ступенчатых функций, непрерывных справа) следующим образом. При $k \in \mathbb{N}$, $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ положим

$$f_k | T_{n_1 \dots n_k} \equiv b_{n_1 \dots n_k}. \quad (5)$$

В силу условия (а) леммы 2 это определение корректно. Очевидно, что все функции f_k непрерывны.

Лемма 5. Последовательность функций $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ равномерно сходится.

Доказательство. Зафиксируем точку $x \in [0, 1)$. По условию (b) леммы 3 найдется последовательность $(n_1, \dots, n_i, \dots) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, такая, что $x \in T_{n_1 \dots n_i, \dots}$. Тогда для каждого $i \in \mathbb{N}$ справедливо $f_i(x) = b_{n_1 \dots n_i}$. Для начала докажем, что последовательность $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ фундаментальна. Рассмотрим номера $k, m \in \mathbb{N}$, такие, что $m > k$:

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_k(x)| &= |b_{n_1 \dots n_m} - b_{n_1 \dots n_k}| = |\sum_{i=k+1}^m (b_{n_1 \dots n_i} - b_{n_1 \dots n_{i-1}})| = \\ &= |\text{по формуле (4)}| = |\sum_{i=k+1}^m (-1)^{n_i+1} \cdot h_{n_1 \dots n_i}| \leq \sum_{i=k+1}^m h_{n_1 \dots n_i} \leq \\ &\leq |\text{по лемме 4}| \leq \sum_{i=k+1}^m \frac{1}{2^{\lfloor i/2 \rfloor}} \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^{\lfloor i/2 \rfloor}} \leq 2 \cdot \frac{2}{2^{\lfloor (k+1)/2 \rfloor}} \rightarrow 0 \quad (\text{при } k \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

– здесь символ $[a]$ обозначает целую часть числа a . Мы получили, что существует предел $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \in \mathbf{R}$, который мы обозначим через $f(x)$. Теперь докажем, что последовательность функций $\{f_k(x)\}_{k \in \mathbf{N}}$ равномерно сходится к функции $f(x)$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f_m(x)| &= |\lim_{k \rightarrow \infty} b_{n_1 \dots n_k} - b_{n_1 \dots n_m}| = |\text{по формуле (4)}| = \\ &= |(b + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{n_i+1} \cdot h_{n_1 \dots n_i} - (b + \sum_{i=1}^m (-1)^{n_i+1} \cdot h_{n_1 \dots n_i})| = |\sum_{i=m+1}^{\infty} (-1)^{n_i+1} \cdot h_{n_1 \dots n_i}| \leq \\ &\leq \sum_{i=m+1}^{\infty} h_{n_1 \dots n_i} \leq \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{[i/2]}} \leq 2 \cdot \frac{2}{2^{[(m+1)/2]}} = \frac{1}{2^{[(m+1)/2]-2}} \rightarrow 0 \text{ (при } m \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Мы получили, что для любой точки $x \in [0, 1)$ выполняется $|f(x) - f_m(x)| \leq 1/2^{[(m+1)/2]-2}$, следовательно, функциональная последовательность $\{f_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ равномерно сходится к функции f . ■

Итак, мы построили отображение $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$, которое действует из S_0 в $\mathbf{R}$. Мы докажем, что это отображение непрерывно, открыто и что $f(S_0) = (-1, 1)$.

Лемма 6. Для любых $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $n_1, \dots, n_k \in \mathbf{N}$ выполняется

$$f(T_{n_1 \dots n_k}) \supseteq [b_{n_1 \dots n_k} - h_{n_1 \dots n_k}, b_{n_1 \dots n_k} + h_{n_1 \dots n_k}].$$

Доказательство. Пусть $x \in [b_{n_1 \dots n_k} - h_{n_1 \dots n_k}, b_{n_1 \dots n_k} + h_{n_1 \dots n_k}]$. Выберем индукцией по i номера $m_i \in \mathbf{N}$ таким образом, что

$$x \in [b_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_i} - h_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_i}, b_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_i} + h_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_i}]. \quad (6)$$

База индукции при $i = 0$ выполнена. Предположим, что мы построили номера $m_1, \dots, m_n$, такие, что формула (6) выполняется для всех $i \leq n$. Построим номер m_{n+1} так, чтобы формула (6) выполнялась при $i = n + 1$. Рассмотрим два случая:

а) $x \geq b_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_n}$.

В этом случае $x \in [b_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_n}, b_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_n} + h_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_n}]$. Положим $m_{n+1} = 1$.

По условию (f) леммы 2 имеем

$$h_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_{n+1}} = (1/2) \cdot h_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_n}.$$

Тогда по формуле (4)

$$b_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_{n+1}} = b_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_n} + (1/2) \cdot h_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_n},$$

следовательно,

$$\begin{aligned} [b_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_{n+1}} - h_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_{n+1}}, b_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_{n+1}} + h_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_{n+1}}] = \\ [b_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_n}, b_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_n} + h_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_n}] \ni x. \end{aligned}$$

б) $x < b_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_n}$.

В этом случае $x \in [b_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_n} - h_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_n}, b_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_n}]$. Положим $m_{n+1} = 2$.

По условию (f) леммы 2 имеем

$$h_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_{n+1}} = (1/2) \cdot h_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_n} + (1/16) \cdot l_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_n}.$$

Снова по формуле (4)

$$b_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_{n+1}} = b_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_n} - (1/2) \cdot h_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_n} - (1/16) \cdot l_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_n},$$

следовательно,

$$\begin{aligned} & [b_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_{n+1}} - h_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_{n+1}}, b_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_{n+1}} + h_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_{n+1}}] = \\ & = [b_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_n} - h_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_n} - (1/8) \cdot l_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_n}, b_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_n} + h_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_n}] \supseteq \\ & \text{по условию (d) леммы 1} \supseteq [b_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_n} - h_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_n}, b_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_n}] \ni x. \end{aligned}$$

Итак, мы построили последовательность номеров $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, такую, что выполняется (6). Положим $H_n = [b_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_n} - h_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_n}, b_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_n} + h_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_n}]$. Из леммы 4 следует, что диаметр отрезка H_n стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Кроме того, система множеств H_n центрирована, так как по условию (6) $x \in H_n$. А поскольку $b_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_n} \in H_n$, то получаем, что

$$b_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_n} \rightarrow x \text{ (при } n \rightarrow \infty \text{)}. \quad (7)$$

По лемме 3 существует точка $c \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_n}$, значит $c \in T_{n_1 \dots n_k}$. Поскольку $c \in T_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_n}$, то $f_{k+n}(c) = b_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_n} \in H_n$. По определению $f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{k+n}(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n_1 \dots n_k, m_1 \dots m_n} = | \text{по условию (7)} | = x$. А так как $c \in T_{n_1 \dots n_k}$, то тем самым лемма 6 доказана. ■

Лемма 7. Для любых $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, n_1, \dots, n_{k+1} \in \mathbb{N}$ найдется $\varepsilon > 0$, такое, что

$$\begin{aligned} & (b_{n_1 \dots n_{k+1}} - h_{n_1 \dots n_{k+1}} - (1/4) \cdot l_{n_1 \dots n_{k+1}}, b_{n_1 \dots n_{k+1}} + h_{n_1 \dots n_{k+1}} + (1/4) \cdot l_{n_1 \dots n_{k+1}}) \subset \\ & \subset (b_{n_1 \dots n_k} - h_{n_1 \dots n_k} - (1/4) \cdot l_{n_1 \dots n_k} + \varepsilon, b_{n_1 \dots n_k} + h_{n_1 \dots n_k} + (1/4) \cdot l_{n_1 \dots n_k} - \varepsilon). \end{aligned}$$

Доказательство. Возьмем $\varepsilon = 1/4 \cdot l_{n_1 \dots n_k} \cdot 1/2^{n_{k+1}}$. Тогда

$$\begin{aligned} & b_{n_1 \dots n_{k+1}} - h_{n_1 \dots n_{k+1}} - (1/4) \cdot l_{n_1 \dots n_{k+1}} \geq | \text{по формуле (4) и условию (e) леммы 2} | \geq \\ & \geq b_{n_1 \dots n_k} - h_{n_1 \dots n_k, n_{k+1}} - h_{n_1 \dots n_k, n_{k+1}} - (1/4) \cdot l_{n_1 \dots n_{k+1}} = | \text{по условию (f) леммы 2} | = \\ & = b_{n_1 \dots n_k} - (h_{n_1 \dots n_k} + (1/4) \cdot l_{n_1 \dots n_k} \cdot (1 - \frac{1}{2^{(n_{k+1}-1)}})) - (1/4) \cdot l_{n_1 \dots n_{k+1}} = | \text{по формуле (1)} | = \\ & = b_{n_1 \dots n_k} - h_{n_1 \dots n_k} - (1/4) \cdot l_{n_1 \dots n_k} \cdot (1 - \frac{2}{2^{n_{k+1}}}) - (1/4) \cdot \frac{l_{n_1 \dots n_k}}{2^{n_{k+1}}} = \\ & = b_{n_1 \dots n_k} - h_{n_1 \dots n_k} - (1/4) \cdot l_{n_1 \dots n_k} + (1/4) \cdot l_{n_1 \dots n_k} \cdot \frac{1}{2^{n_{k+1}}} = b_{n_1 \dots n_k} - h_{n_1 \dots n_k} + (1/4) \cdot l_{n_1 \dots n_k} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Второе неравенство, утверждающее, что

$$b_{n_1 \dots n_{k+1}} + h_{n_1 \dots n_{k+1}} + (1/4) \cdot l_{n_1 \dots n_{k+1}} \leq b_{n_1 \dots n_k} + h_{n_1 \dots n_k} + (1/4) \cdot l_{n_1 \dots n_k} - \varepsilon,$$

доказывается аналогично. ■

Лемма 8. Для любых $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ выполняется

$$f(T_{n_1 \dots n_k}) = (b_{n_1 \dots n_k} - h_{n_1 \dots n_k} - (1/4) \cdot l_{n_1 \dots n_k}, b_{n_1 \dots n_k} + h_{n_1 \dots n_k} + (1/4) \cdot l_{n_1 \dots n_k}).$$

Доказательство.

I. Докажем включение в одну сторону:

$$f(T_{n_1 \dots n_k}) \supseteq (b_{n_1 \dots n_k} - h_{n_1 \dots n_k} - (1/4) \cdot l_{n_1 \dots n_k}, b_{n_1 \dots n_k} + h_{n_1 \dots n_k} + (1/4) \cdot l_{n_1 \dots n_k}).$$

Возьмем точку $x \in (b_{n_1 \dots n_k} - h_{n_1 \dots n_k} - (1/4) \cdot l_{n_1 \dots n_k}, b_{n_1 \dots n_k} + h_{n_1 \dots n_k} + (1/4) \cdot l_{n_1 \dots n_k})$.

Из условия (f) леммы 2 следует, что

$$h_{n_1 \dots n_k} + (1/4) \cdot l_{n_1 \dots n_k} - 2h_{n_1 \dots n_k, m} = (1/4) \cdot \frac{1}{2^{m-1}} \cdot l_{n_1 \dots n_k}.$$

Тогда из условий (b) и (d) леммы 2 получим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $m_0 \in \mathbb{N}$, такое, что для всех $m > m_0$ выполняется

$$0 < h_{n_1 \dots n_k} + (1/4) \cdot l_{n_1 \dots n_k} - 2h_{n_1 \dots n_k, m} < \varepsilon. \quad (8)$$

Рассмотрим два случая.

а) $x \geq b_{n_1 \dots n_k}$.

В этом случае

$$x \in [b_{n_1 \dots n_k}, b_{n_1 \dots n_k} + h_{n_1 \dots n_k} + (1/4) \cdot l_{n_1 \dots n_k}).$$

Положим

$$\varepsilon = b_{n_1 \dots n_k} + h_{n_1 \dots n_k} + (1/4) \cdot l_{n_1 \dots n_k} - x \quad \text{и} \quad m = 2m_0 + 1.$$

Из неравенства (8) получим, что

$$\begin{aligned} x < b_{n_1 \dots n_k} + 2h_{n_1 \dots n_k, m} &= |\text{по формуле (4)}| = b_{n_1 \dots n_k, m} - (-1)^{m+1} \cdot h_{n_1 \dots n_k, m} + 2h_{n_1 \dots n_k, m} = \\ &= |\text{так как } m = 2m_0 + 1| = b_{n_1 \dots n_k, m} + h_{n_1 \dots n_k, m}. \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} x \geq b_{n_1 \dots n_k} &= |\text{по формуле (4)}| = b_{n_1 \dots n_k, m} - (-1)^{m+1} \cdot h_{n_1 \dots n_k, m} = \\ &= |\text{так как } m = 2m_0 + 1| = b_{n_1 \dots n_k, m} - h_{n_1 \dots n_k, m}. \end{aligned}$$

В итоге получаем, что

$$x \in [b_{n_1 \dots n_k, m} - h_{n_1 \dots n_k, m}, b_{n_1 \dots n_k, m} + h_{n_1 \dots n_k, m}]. \quad (9)$$

б) $x < b_{n_1 \dots n_k}$.

В этом случае $x \in (b_{n_1 \dots n_k} - h_{n_1 \dots n_k} - (1/4) \cdot l_{n_1 \dots n_k}, b_{n_1 \dots n_k})$. Этот случай аналогичен случаю а):

Возьмем

$$\varepsilon = x - (b_{n_1 \dots n_k} - h_{n_1 \dots n_k} - (1/4) \cdot l_{n_1 \dots n_k}) \quad \text{и} \quad m = 2m_0.$$

Из (8) получим, что

$$\begin{aligned} x &> b_{n_1 \dots n_k} - 2h_{n_1 \dots n_k, m} = |\text{по формуле (4)}| = \\ &= b_{n_1 \dots n_k, m} - (-1)^{m+1} \cdot h_{n_1 \dots n_k, m} - 2h_{n_1 \dots n_k, m} = |\text{т.к. } m = 2m_0| = b_{n_1 \dots n_k, m} - h_{n_1 \dots n_k, m}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$x < b_{n_1 \dots n_k} = b_{n_1 \dots n_k, m} - (-1)^{m+1} \cdot h_{n_1 \dots n_k, m} = b_{n_1 \dots n_k, m} + h_{n_1 \dots n_k, m}.$$

Снова получаем, что выполняется (9). Применив лемму 6, получим, что $x \in f(T_{n_1 \dots n_k, m})$. Из условия (a) леммы 2 следует, что $x \in f(T_{n_1 \dots n_k})$, включение “ $\supseteq$ ” доказано.

II. Докажем включение во вторую сторону:

$$f(T_{n_1 \dots n_k}) \subseteq (b_{n_1 \dots n_k} - h_{n_1 \dots n_k} - (1/4) \cdot l_{n_1 \dots n_k}, b_{n_1 \dots n_k} + h_{n_1 \dots n_k} + (1/4) \cdot l_{n_1 \dots n_k}).$$

Зафиксируем произвольную точку $x \in T_{n_1 \dots n_k}$. По лемме 3 существует последовательность $(m_1, \dots, m_i, \dots) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, такая, что $x \in T_{m_1 \dots m_i, \dots}$. Из условия (b) леммы 2 следует, что $m_1 = n_1, \dots, m_k = n_k$. По определению $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{m_1 \dots m_i}$. Для произвольного $i \in \mathbb{N}, i > k$, применив лемму 7 ($i - k$) раз, получим следующую цепочку вложений:

$$\begin{aligned} b_{m_1 \dots m_i} &\in (b_{m_1 \dots m_i} - h_{m_1 \dots m_i} - (1/4) \cdot l_{m_1 \dots m_i}, b_{m_1 \dots m_i} + h_{m_1 \dots m_i} + (1/4) \cdot l_{m_1 \dots m_i}) \subset \\ &\subset (b_{m_1 \dots m_{i-1}} - h_{m_1 \dots m_{i-1}} - (1/4) \cdot l_{m_1 \dots m_{i-1}} + \varepsilon_{i-k}, b_{m_1 \dots m_{i-1}} + h_{m_1 \dots m_{i-1}} + (1/4) \cdot l_{m_1 \dots m_{i-1}} - \varepsilon_{i-k}), \\ &\dots, \subset |\text{т.к. } m_1 = n_1, \dots, m_k = n_k| \subset \\ &\subset (b_{n_1 \dots n_k} - h_{n_1 \dots n_k} - (1/4) \cdot l_{n_1 \dots n_k} + \varepsilon_k, b_{n_1 \dots n_k} + h_{n_1 \dots n_k} + (1/4) \cdot l_{n_1 \dots n_k} - \varepsilon_k). \end{aligned}$$

Но тогда (здесь квадратные скобки обозначают замыкание в топологии $\mathbf{R}$)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_{m_1 \dots m_i} &\in [(b_{n_1 \dots n_k} - h_{n_1 \dots n_k} - (1/4) \cdot l_{n_1 \dots n_k} + \varepsilon_k, b_{n_1 \dots n_k} + h_{n_1 \dots n_k} + (1/4) \cdot l_{n_1 \dots n_k} - \varepsilon_k)] \subset \\ &\subset (b_{n_1 \dots n_k} - h_{n_1 \dots n_k} - (1/4) \cdot l_{n_1 \dots n_k}, b_{n_1 \dots n_k} + h_{n_1 \dots n_k} + (1/4) \cdot l_{n_1 \dots n_k}). \end{aligned}$$

А поскольку $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{m_1 \dots m_i}$, то второе включение также доказано. ■

Лемма 9. Образ полуинтервала $[0, 1)$ при отображении f равен интервалу $(-1, 1)$.

Доказательство. Достаточно взять $k = 0$ и применить лемму 8. ■

Лемма 10. Для любой точки $c \in [0, 1)$ найдется база ее окрестностей $\mathbf{B}(c)$, такая, что для любой окрестности $U \in \mathbf{B}(c)$ ее образ $f(U)$ открыт в $\mathbf{R}$.

Доказательство. По лемме 3 найдется последовательность $(n_1, \dots, n_i, \dots) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, такая, что $c \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} [a_{n_1 \dots n_i}, a_{n_1 \dots n_i} + l_{n_1 \dots n_i})$. Тогда искомая база окрестностей в точке c имеет следующий вид: $\mathbf{B}(c) = \{[c, a_{n_1 \dots n_k} + l_{n_1 \dots n_k}) : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Докажем, что определенное таким образом семейство является исковой базой окрестностей, удовлетворяющей требованиям леммы. Тот факт, что $\mathbf{B}(c)$ является базой окрестностей в точке c , следует из условия (b) леммы 2. Чтобы доказать, что образ $[c, a_{n_1 \dots n_k} + l_{n_1 \dots n_k})$ при отображении f открыт, покажем, что

$$f([c, a_{n_1 \dots n_k} + l_{n_1 \dots n_k})) = (b_{n_1 \dots n_k} - h_{n_1 \dots n_k} - (1/4) \cdot l_{n_1 \dots n_k}, b_{n_1 \dots n_k} + h_{n_1 \dots n_k} + (1/4) \cdot l_{n_1 \dots n_k}).$$

Включение “ $\subseteq$ ” следует из леммы 8.

Обратное включение “ $\supseteq$ ” доказывается практически так же, как и часть I доказательства леммы 8, только с небольшим изменением: в обоих пунктах доказательства, и в а), и в б), на t_0 накладывается дополнительное условие: t_0 должно быть настолько большим, чтобы для каждого $t > t_0$ в дополнение к формуле (8) выполнялось $a_{n_1 \dots n_k, m} > c$ (тот факт, что так можно сделать, следует из условия (h) леммы 2). Все рассуждения при этом сохраняются, и мы получим, что $x \in f(T_{n_1 \dots n_k, m})$. А поскольку $a_{n_1 \dots n_k, m} > c$, то $T_{n_1 \dots n_k, m} \subseteq [c, a_{n_1 \dots n_k} + l_{n_1 \dots n_k})$, следовательно, $x \in f([c, a_{n_1 \dots n_k} + l_{n_1 \dots n_k}))$, что и требовалось. Второе включение доказано, а вместе с ним доказана и лемма 10. ■

Лемма 11. *Отображение f открыто и непрерывно.*

Доказательство. Отображение f непрерывно как предел равномерно сходящейся последовательности функций (лемма 5). Тот факт, что отображение f открыто, вытекает из леммы 10. ■

Поскольку пространство S_0 гомеоморфно S (см. начало доказательства теоремы 1) и интервал $(-1, 1) \subset \mathbf{R}$ гомеоморфен $\mathbf{R}$, то из лемм 9 и 11 получаем, что теорема 1 доказана. ■

Поскольку вещественную прямую можно непрерывно открыто отобразить на отрезок, то из теоремы 1 вытекает

Следствие 12. *Существует непрерывное открытое отображение прямой Зоргенфрея S на отрезок $[0, 1] \subset \mathbf{R}$.*

Теперь мы докажем, что не существует непрерывного замкнутого отображения прямой Зоргенфрея ни на вещественную прямую, ни на отрезок. Предварительно сформулируем две классических теоремы, из которых этот факт легко следует.

Теорема 13 ([4. гл. VI. упр. 87]). *Пусть f – непрерывное замкнутое отображение паракомпакта X на T_1 -пространство Y с первой аксиомой счетности. Тогда существует такое замкнутое подпространство X^* пространства X , что $f(X^*) = Y$ и $f|X^* : X^* \rightarrow Y$ – совершенное отображение.*

Теорема 14 ([3. гл. V. упр. 5.5.7(b)]). *Паракомпакт X с диагональю типа G_δ в $X \times X$ метризуем в том и только том случае, если X допускает совершенное отображение на метризуемое пространство.*

Мы докажем следующую теорему:

Теорема 15. *Пусть $f: B \rightarrow \mathbf{R}$ – непрерывное замкнутое отображение подпространства B прямой Зоргенфрея в числовую прямую. Тогда образ $f(B)$ не более чем счетен.*

Доказательство. Положим $A = f(B)$. Будем следовать от противного, пусть множество A несчетно. Так как прямая Зоргенфрея наследственно паракомпактна (см., например, [5] или [3]), то по теореме 13 существует подпространство $B^* \subset B$, такое, что $f|B^* : B^* \rightarrow A$ – совершенное отображение и $f|(B^*) = A$. Поскольку B^* имеет диагональ типа G_δ в $B^* \times B^*$, то по теореме 14 B^* метризуемо. Поскольку множество A несчетно, то несчетно и множество $B^* = f^{-1}(A)$, следовательно, сетевой вес B^* несчетен (любое несчетное подмножество S имеет несчетный сетевой вес, см., например, [5] или [3]). Так как прямая Зоргенфрея наследственно сепарабельна и B^* метризуемо, то вес B^* счетен, следовательно, счетен и его сетевой вес. Мы получили противоречие, тем самым теорема 15 доказана. ■

В качестве следствия имеем:

Теорема 16. *Не существует непрерывного замкнутого отображения прямой Зоргенфрея ни на вещественную прямую, ни на вещественный отрезок.*

Тождественное отображение S на $\mathbf{R}$ является уплотнением (т.е. непрерывным инъективным отображением). Покажем, что прямая Зоргенфрея уплотняется и на вещественный отрезок.

Замечание 17. *Существует уплотнение прямой Зоргенфрея на вещественный отрезок.*

Доказательство. Учитывая, что прямая Зоргенфрея гомеоморфна своему подмножеству $[0,1) \subset S$ (см. начало статьи), определим искомое отображение $f: [0,1) \rightarrow [0,1]$ следующим образом: $f(0) = 0$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ отображение f переводит полуинтервал $[1/(n+1), 1/n)$ на полуинтервал $(1/(n+1), 1/n]$, при этом на полуинтервале $[1/(n+1), 1/n)$ отображение f действует как симметрия с центром в точке $(1/(n+1) + 1/n)/2$.

Очевидно, что определенное таким образом отображение f является биекцией между полуинтервалом $[0,1)$ и отрезком $[0,1]$. Чтобы доказать непрерывность отображения f в точке $a \in [0,1)$, нужно рассмотреть два случая: $a \neq 0$ и $a = 0$. Если $a \neq 0$, то найдется $n \in \mathbb{N}$, такое, что $a \in [1/(n+1), 1/n)$, и тогда непрерывность в точке a очевидна. Если же $a = 0$, то нужно доказать, что для любого $\delta > 0$ найдется $\varepsilon > 0$, такое, что $f([0, \varepsilon)) \subset [0, \delta)$. Найдем $n \in \mathbb{N}$, такое, что $1/n < \delta$, и возьмем $\varepsilon = 1/n$. Тогда для любого целого $i \geq n$ выполняется $f([x_{i+1}, x_i)) = (x_{i+1}, x_i] \subset [0, \delta)$, следовательно, $f([0, \varepsilon)) \subset [0, \delta)$, что и требовалось. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Моторов Д.В. Метризуемые образы стрелки (прямой Зоргенфрея) // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1984. № 2. С. 35 – 37.
2. Светличный С.А. Проективная полнота и проективные классы пространств // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1988. № 1. С. 75 – 77.
3. Энгелькинг Р. Общая топология: Пер. с англ. М.: Мир, 1986.
4. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974.
5. Michael E.A. Paracompactness and the Lindelof property in finite and countable cartesian products // Compositio Math. 1971. V. 23. P. 199 – 214.

Принята в печать 14.03.08.